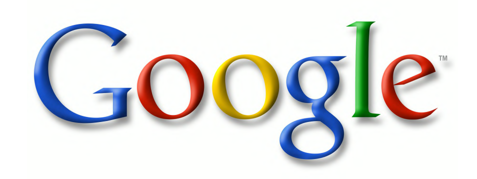
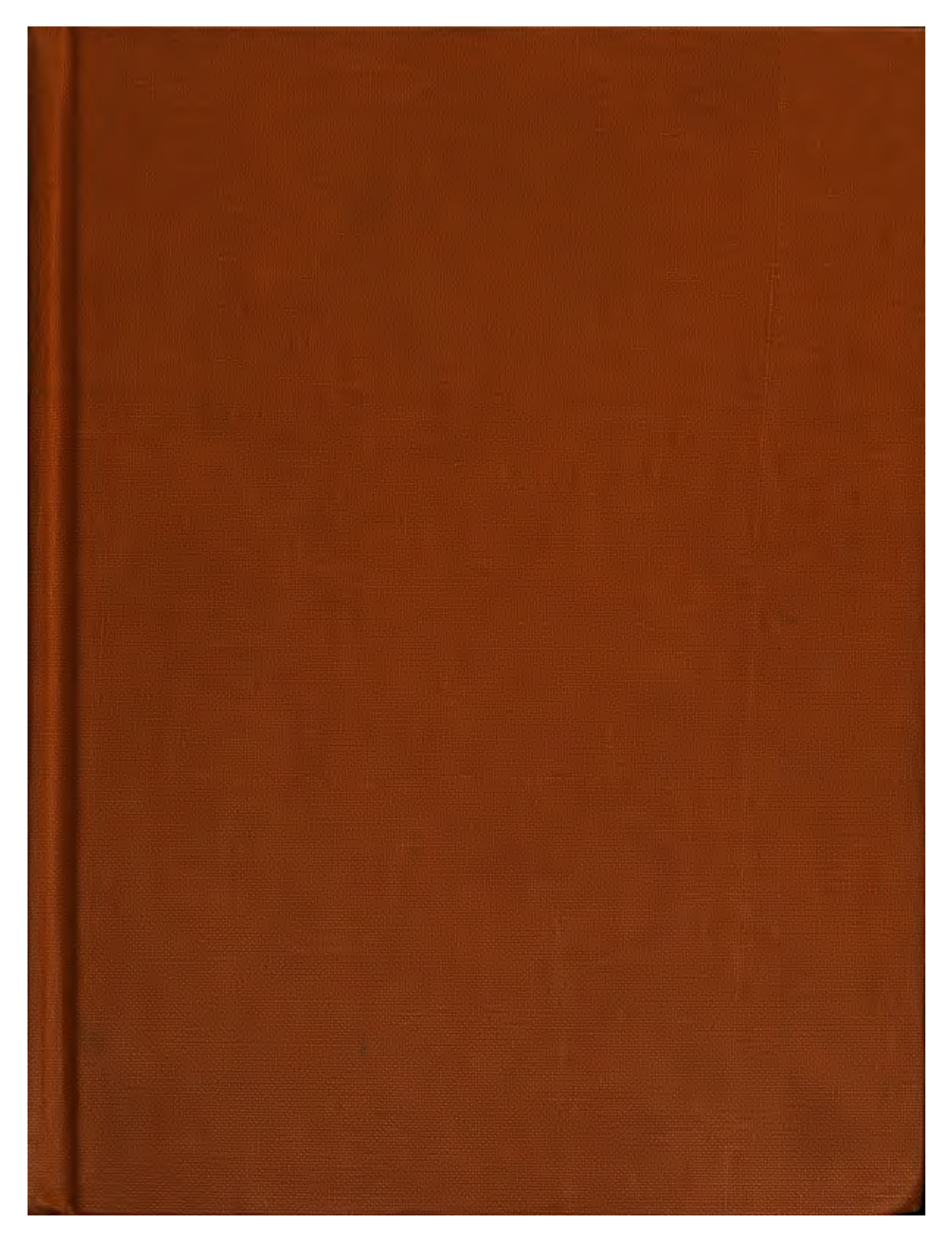




MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉES 1821 ET 1822.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

ANNÉES 1821 ET 1822.

TOME V.



IMPRIMÉ,

PAR AUTORISATION DU ROI,

A L'IMPRIMERIE ROYALE.

1826.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le cinquième *de la collection des Mémoires de l'Académie des sciences, depuis l'Ordonnance du 21 Mars 1816.*

MÉMOIRE sur l'écoulement de l'air atmosphérique et du gaz hydrogène carboné dans des tuyaux de conduite; par M. GIRARD........................ Page 1.

Recherches sur les canaux de navigation, considérés sous le rapport de la chute et de la distribution de leurs écluses; par M. GIRARD........................ 27.

Mémoire sur les inflammations des intestins, ou les entérites, qui surviennent dans les maladies du foie; par M. PORTAL........................ 56.

Mémoire sur quelques nouvelles propriétés des axes permanens de rotation des corps et des plans directeurs de ces axes; par M. AMPÈRE........................ 86.

Suite du Mémoire intitulé : Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides; par M. FOURIER........... 153.

Mémoire sur la théorie du magnétisme; par M. POISSON.... 247.

Mémoire sur la diffraction de la lumière; par M. FRESNEL... 339.

Note sur la propriété que possèdent quelques métaux, de faciliter la combinaison des fluides élastiques; par MM. DULONG et THÉNARD........................ 476.

Nouvelles Observations sur la propriété dont jouissent certains corps de favoriser la combinaison des fluides élastiques; par MM. DULONG et THÉNARD................ 481.

Second Mémoire sur la théorie du magnétisme; par M. POISSON. 488.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie mathématique; par M. le chevalier DELAMBRE, secrétaire perpétuel.............Page 1.

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1821, partie physique; par M. le baron CUVIER, secrétaire perpétuel.................... 153.

Éloge de M. Banks; par M. le baron CUVIER, secrétaire perpétuel.................................. 204.

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1822, partie mathématique; par M. le baron FOURIER.................................. 231.

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences pendant l'année 1822, partie physique; par M. le baron CUVIER.................................. 321.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1821.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

PAR M. LE CHEVALIER DELAMBRE, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Sur l'Attraction des Corps sphériques et sur la Répulsion des Fluides élastiques, par M. DE LAPLACE.

NEWTON a démontré ces deux propriétés remarquables de la loi d'attraction réciproque au carré de la distance : l'une, que la sphère attire un point situé au-dehors, comme si toute sa masse était réunie à son centre; l'autre, qu'un point situé au-dedans d'une couche sphérique ne reçoit de son attraction aucun mouvement. On a fait voir, dans le second livre de la *Mécanique céleste*, que, parmi toutes les lois d'attraction

décroissante à l'infini par la distance, la loi de la nature est la seule qui jouisse de ces propriétés : dans toute autre loi d'attraction, l'action des sphères est modifiée par leurs dimensions. Pour déterminer ces modifications, l'auteur du Mémoire est parti des formules qu'il a données dans le livre cité, sur l'attraction des couches sphériques; il en a déduit les expressions générales de l'attraction des sphères sur des points placés au-dedans et au-dehors, et les unes sur les autres. La comparaison de ces expressions conduit à ce théorème fort simple, qui donne l'attraction d'une sphère sur les points intérieurs, lorsqu'on ~~a son attraction~~ sur les points situés au-dehors, et réciproquement, quelle que soit la loi de l'attraction :

« Si l'on imagine dans l'intérieur d'une sphère une petite » sphère qui lui soit concentrique, l'attraction de la grande » sphère sur un point placé à la surface de la petite est à l'at- » traction de la petite sphère sur un point placé à la surface » de la grande, comme la grande surface est à la petite. Ainsi » les actions de chacune des sphères sur la surface entière de » l'autre sont égales. »

Les mêmes expressions s'appliquent évidemment aux sphères fluides dont les molécules se repoussent et sont contenues par des enveloppes. L'auteur continue à présenter, dans l'extrait suivant, les résultats de ses recherches. Newton a supposé entre deux molécules d'air une force répulsive réciproque à leur distance mutuelle. Mais, en appliquant à ce cas mes formules, je trouve que la pression du fluide à l'intérieur et à la surface suit une loi bien différente de la loi générale des fluides élastiques, suivant laquelle la pression, à températures égales, est proportionnelle à la densité. Aussi Newton n'admet-il la répulsion qu'une molécule doit exercer sur les autres, que dans une très-petite étendue; mais l'explication qu'il donne de ce défaut de continuité est bien peu satisfaisante. Il faut

sans doute admettre entre les molécules de l'air une loi de répulsion qui ne soit sensible qu'à des distances imperceptibles. La difficulté consiste à déduire de ce genre de forces les lois générales que présentent les fluides élastiques. Je crois y être parvenu, en appliquant à cet objet les formules dont je viens de parler.

Je suppose que les molécules des gaz sont à une distance telle, que leur attraction mutuelle soit insensible ; ce qui me paraît être la propriété caractéristique de ces fluides, même des vapeurs, de celles du moins qu'une légère compression ne réduit point en partie à l'état liquide. Je suppose ensuite que ces molécules retiennent par leur attraction la chaleur, et que leur répulsion mutuelle est due à la répulsion des molécules de la chaleur, répulsion dont je suppose l'étendue de la sphère d'activité insensible. Je fais voir que, dans ces suppositions, la pression à l'intérieur et à la surface d'une sphère formée d'un pareil fluide est égale au produit du carré du nombre de ses molécules contenues dans un espace donné pris pour unité, par le carré de la chaleur renfermée dans une quelconque de ces molécules, et par un facteur constant pour le même gaz. Ce résultat étant indépendant du rayon de la sphère, il est facile d'en conclure qu'il a lieu, quelle que soit la figure de l'enveloppe qui contient le fluide.

J'imagine ensuite l'enveloppe de l'espace pris pour unité, à une température donnée, et contenant un gaz à la même température. Il est clair qu'une molécule quelconque de ce gaz sera atteinte à chaque instant par des rayons caloriques émanés des corps environnans. Elle éteindra une partie de ces rayons ; mais il faudra, pour le maintien de la température, qu'elle remplace ces rayons éteints par son rayonnement propre. La molécule, dans tout autre espace à la même température, sera atteinte à chaque instant par la même quantité de rayons caloriques; elle en éteindra la même partie qu'elle rendra par

rayonnement. La quantité de ces rayons calorifiques, qu'une surface donnée reçoit à chaque instant, est donc une fonction de la température, indépendante de la nature des corps environnans; et l'extinction est le produit de cette fonction par une constante dépendante de la nature de la molécule ou du gaz. J'observerai ici que la quantité des rayons émanés des corps environnans, et qui forment la chaleur libre de l'espace, est, à cause de l'extrême vîtesse que l'on doit supposer à ces rayons, une partie insensible de la chaleur contenue dans ces corps, comme on l'a reconnu d'ailleurs par les expériences que l'on a faites pour condenser cette chaleur. Tous ces rayons forment ainsi un fluide discret d'une extrême rareté, et dont la densité, augmentant avec la chaleur de ces corps, peut servir à mesurer leur température, et même en donner une définition précise. Cette densité croît proportionnellement aux dilatations de l'air dans un thermomètre d'air à pression constante; et, par cette raison, ce thermomètre me paraît être le vrai thermomètre de la nature: c'est à lui que je rapporterai la température des corps. Maintenant, pour avoir l'expression du rayonnement d'une molécule d'air, il faut remonter à la cause de ce rayonnement. On ne peut pas l'attribuer à la molécule même, qui est supposée n'agir que par attraction sur le calorique; il paraît donc naturel de la faire dépendre de la force répulsive du calorique contenu, soit dans la molécule, soit dans les molécules environnantes. Le calorique de la molécule étant infiniment petit par rapport à l'ensemble du calorique des molécules environnantes, on peut n'avoir égard qu'à la force répulsive de cet ensemble. Sans chercher à expliquer comment cette force détache une très-petite partie du calorique d'une molécule A et la fait rayonner (1), je considère que l'action du calorique d'une

---

(1) Les mouvemens des molécules d'un gaz, produits par les rayons calori-

molécule *B* pour cet objet est proportionnelle à ce calorique et au calorique de la molécule *A*, qui lui est égal. Je fais ainsi le rayonnement proportionnel au produit du carré de ce calorique par le nombre des molécules environnantes, ou par la densité du gaz. En égalant ce rayonnement à l'extinction qui, comme on vient de le voir, est le produit d'une constante par la température, on voit que le nombre des molécules du gaz, multiplié par le carré de leur chaleur propre, est proportionnel à la température. Ce rapport montre que, la température restant la même, la chaleur propre de chaque molécule est réciproque à la racine carrée de la densité du gaz dans ses diverses condensations ; d'où il suit que, par la pression, il doit développer de la chaleur. On conçoit, en effet, que le rapprochement des molécules d'un gaz par la pression et sur-tout par son changement en liquide doit, en augmentant la force répulsive de la chaleur, en dissiper une partie.

Maintenant, si, dans l'expression donnée ci-dessus de la pression du gaz, on substitue au produit du nombre des molécules par le carré de la chaleur propre à chaque molécule, la température multipliée par un facteur constant, on aura cette pression proportionnelle au produit de la température par le nombre des molécules du gaz renfermées dans l'espace pris pour unité.

Cette proportionnalité donne les deux lois générales des gaz. On voit d'abord que, la température restant la même, la pression est proportionnelle au nombre des molécules du gaz, et par conséquent à sa densité. On voit ensuite que, la pression restant la même, ce nombre est réciproque à la

---

fiques, et dont les liquides soumis à l'action de la lumière et de la chaleur offrent des exemples, ne peuvent-ils pas occasionner leur rayonnement, en faisant varier alternativement l'action répulsive du calorique des molécules qui environnent chaque molécule du gaz, sur le calorique de cette molécule?

température, qui, comme on l'a vu, est indépendante de la nature du gaz; d'où résulte évidemment la belle loi que M. Gay-Lussac nous a fait connaître, et suivant laquelle, sous la même pression, le même volume des divers gaz croît également par un accroissement égal de température.

On peut appliquer des considérations semblables, au mélange de divers gaz qui, dans ce mélange, n'exercent point d'affinité les uns avec les autres, tels que l'oxigène et l'azote, dans l'atmosphère. Il est facile de voir que chaque molécule du mélange ne peut être en équilibre au milieu des forces qui la sollicitent, que dans le cas où chaque partie du mélange renferme dans la même proportion les divers gaz; ce qui est conforme à l'expérience. En considérant le rayonnement d'une molécule d'un gaz, on parvient à une équation entre ce rayonnement et l'extinction correspondante de la chaleur par la molécule, analogue à l'équation que l'on a trouvée ci-dessus, dans le cas d'un seul gaz. Chaque gaz du mélange fournit une équation semblable. La somme de ces diverses équations multipliées respectivement par la densité des gaz correspondans du mélange, comparée à l'expression de la pression du mélange, donne ce théorème général, confirmé par l'expérience, et qui renferme toute la théorie de ces mélanges:

« Si l'on conçoit plusieurs gaz renfermés séparément dans » des espaces égaux, et à la même température; si l'on con- » dense ensuite tous ces gaz dans un seul de ces espaces; » lorsque le mélange aura pris la température primitive des » gaz, sa pression sera la somme des pressions particulières » que chaque gaz exerçait dans l'espace où il était primitive- » ment enfermé. »

La même analyse fait voir que les deux lois de Mariotte et de M. Gay-Lussac ont encore lieu relativement à ce mélange; chaque molécule de ce mélange pouvant être considérée

comme un groupe dans lequel les molécules de chaque gaz entrent dans le même rapport que dans le mélange total.

Les principes que nous venons d'exposer donnent donc une explication naturelle et simple des lois de la répulsion des fluides élastiques. Mais, pour satisfaire à l'ensemble des phénomènes de chaleur que les gaz nous présentent, il est nécessaire de considérer le calorique contenu dans chacune de leurs molécules, comme y existant dans deux états différens; une partie de ce calorique est libre, et il exerce une force répulsive qui, en écartant les molécules les unes des autres, en forme un fluide élastique : l'autre partie est latente ou combinée; dans cet état, le calorique n'exerce aucune force répulsive sensible; mais il se développe, soit dans le changement du gaz en liquide, soit par la variation de densité du gaz. Les lois de répulsion des gaz dépendent de la première partie, à laquelle seule on doit appliquer les raisonnemens précédens : les phénomènes du développement de la chaleur des gaz dépendent à-la-fois de ces deux parties.

Les vibrations des molécules des gaz ou la vîtesse du son en dépendent encore. Pour les déterminer, je considère chaque molécule d'un gaz comme un corps isolé dans l'espace, et soumis à l'action répulsive du calorique des molécules environnantes : je parviens ainsi à une équation aux différences partielles, dont l'intégrale donne la vîtesse du son; et j'en conclus le théorème suivant, que j'ai énoncé sans démonstration dans les *Annales de physique et de chimie* de l'année 1816 :

« La vîtesse du son est celle que donne la formule de » Newton multipliée par la racine carrée du rapport de la » chaleur spécifique du gaz sous une pression constante, à » sa chaleur spécifique sous un volume constant. »

Newton a fondé sa formule sur des principes différens. Il considère la pression de l'air agissant sur une molécule

aérienne comme sur un corps d'une épaisseur sensible ; ce qui n'est pas exact : il suppose de plus la température de la molécule, constante pendant la durée de la vibration ; ce qui n'est pas. Aussi la vîtesse du son, donnée par cette formule, est-elle trop faible d'un sixième. Cependant, malgré ses inexactitudes, elle me paraît être un des traits les plus remarquables du génie de son auteur. Pour déterminer le facteur dont j'ai parlé, et par lequel on doit multiplier cette formule, j'ai fait usage des expériences déjà faites sur le développement de la chaleur des gaz par la compression, et spécialement d'une expérience de MM. Clément et Désormes, qu'ils ont insérée dans le *Journal de physique* du mois de novembre 1819 ; et j'en ai conclu la vîtesse du son, très-peu différente de celle que l'on a observée. Je ne doute point qu'en répétant avec un très-grand soin cette curieuse expérience ou d'autres semblables, on ne parvienne à déterminer ainsi la vîtesse du son, au moins aussi exactement que par l'observation directe.

La théorie précédente revient à considérer chaque molécule des corps, comme rayonnant du calorique par la force répulsive que le calorique des molécules environnantes exerce sur celui qu'elle contient.

Un espace qui renferme un système de corps, jouit d'une température constante, lorsque chaque corps y rayonne autant de calorique qu'il en absorbe. La densité du fluide discret, formé par tous les rayons caloriques répandus dans cet espace, croît avec sa température, et peut lui servir de mesure : elle est représentée par les dilatations d'un thermomètre d'air à pression constante. Tous les espaces dans lesquels cette densité est la même, sont à la même température, et un corps en équilibre de température dans l'un de ces espaces le sera dans tous les autres. La température d'un corps plus chaud que l'espace dans lequel il se trouve, est la densité

du calorique de l'espace dans lequel il serait en équilibre de température.

Le calorique des molécules des corps y existe dans deux états différens : une partie de ce calorique est libre, et elle exerce une force répulsive dont la sphère d'activité ne s'étend qu'à des distances imperceptibles : une autre partie est latente ou combinée, et, dans cet état, elle n'exerce aucune force répulsive sensible ; mais elle se développe ou s'absorbe dans les changemens d'état et même de densité des corps.

Ces principes, appliqués aux gaz, satisfont aux lois de leur répulsion et de leurs vibrations, et aux phénomènes de chaleur qu'ils offrent dans leurs changemens de densité et dans leur passage à l'état liquide.

Recherches sur l'Analyse algébrique, par M. FOURIER.

L'OBJET de ces recherches est l'examen approfondi des méthodes principales de l'analyse algébrique. Dans un premier Mémoire, lu à l'Académie le 14 janvier 1821, l'auteur considère les rapports singuliers des séries récurrentes avec la théorie des équations : il se propose de prouver que l'usage de ces séries n'est point borné à la plus grande ou à la moindre des racines, et aux seules racines réelles, mais qu'il s'étend à toutes les racines, soit réelles, soit imaginaires ; en sorte qu'il détermine tous les coefficiens de tous les facteurs d'un degré quelconque. Après avoir rapporté la règle de Daniel Bernoulli, les développemens donnés par Euler, et les réflexions de La Grange, l'auteur ajoute : « L'extrême simplicité de cette méthode et l'utilité de ses applications, » qu'Euler a mise dans tout son jour, m'ont porté à rechercher avec soin si elle peut s'étendre à toutes les racines, » soit réelles, soit imaginaires, et quels sont les rapports les » plus généraux des séries récurrentes avec la théorie des

» équations. » Voici les questions principales qui se présentent : 1.° Quelle est la mesure exacte de la convergence de l'approximation? et lorsqu'on procède à l'emploi de cette règle au moyen de substitutions successives, quelles sont les relations précises de cette opération avec celles qu'exige l'approximation newtonienne? 2.° Peut-on employer un procédé analogue pour découvrir la seconde racine, la troisième, et en général toutes les racines réelles de la proposée, sans recourir à aucune autre méthode pour déterminer les limites de ces racines? Quelles règles faut-il suivre dans cette application générale des séries récurrentes, et quelle est la mesure exacte de la convergence? 3.° Lorsque les racines cherchées sont ou peuvent être imaginaires, le même emploi des séries récurrentes peut-il encore avoir lieu, et comment en déduira-t-on les valeurs de plus en plus approchées de la partie réelle de chaque racine et de la partie imaginaire? L'auteur rapporte ensuite la solution distincte des trois questions précédentes, et cet exposé suffit pour faire connaître clairement l'objet et les résultats de ce premier Mémoire, terminé par le résumé suivant :

« Nous avons examiné avec le même soin les autres parties » de cette science qui ont un rapport direct avec les résolu» tions numériques des équations, savoir : 1.° la règle singu» lière inventée par Newton, qui est fondée sur l'usage du » parallélogramme analytique; 2.° la méthode exégétique de » Viète; 3.° le théorème de Descartes sur la nature des racines, » et son usage pour la résolution numérique des équations; » 4.° la méthode d'approximation de Newton, celle des frac» tions continues, et l'usage de l'équation aux différences; » 5.° la détermination effective des limites, et la distinction » des racines imaginaires, par des règles générales toujours » praticables et d'une application facile. Cette énumération » suffit pour présenter l'ensemble de mon travail sur l'analyse

» algébrique. J'ai l'honneur de remettre à l'Académie, pour » être déposé au secrétariat, un écrit qui contient l'énumération détaillée des résultats principaux de mes recherches. »

Second Mémoire sur les Canaux de navigation, considérés sous le rapport de la chute et de la distribution des écluses, par M. GIRARD. (25 juin 1821.)

DANS son premier Mémoire, M. Girard a donné l'équation rigoureuse qui exprime le rapport entre la chute d'une écluse quelconque, le tirant d'eau des bateaux qui la montent, celui des bateaux qui la descendent, et le volume d'eau dépensé pour opérer ce double passage. De cette équation il conclut, non-seulement que l'on peut rendre cette dépense aussi petite que l'on voudra, mais encore qu'il est possible de faire remonter un certain volume d'eau d'un bief inférieur quelconque dans le bief supérieur contigu. Ce dernier effet exige une condition : c'est que le tirant d'eau des bateaux qui descendent soit plus fort que le tirant d'eau des bateaux qui remontent; et il suffit de considérer les matières diverses au transport desquelles les canaux doivent servir, et la situation des lieux d'où elles proviennent et où elles sont ordinairement consommées, pour reconnaître que cette condition existe presque toujours. Ainsi la consommation des canaux de navigation éprouvera de grandes réductions ; et la difficulté de rassembler un volume d'eau considérable à leur point culminant ne sera plus un obstacle qui empêche de les entreprendre. Ici l'auteur, empruntant des expressions dont on s'était servi comme d'objections contre ses idées, ajoute : « Il » ne s'agit de rien moins que de changer les règles du tracé » des canaux, de proscrire les dimensions des écluses actuelles, » et de prononcer que la pratique qu'on a suivie jusqu'à pré» sent, a fait perdre au commerce une partie de son activité

» et à plusieurs nations un accroissement de richesses. » Un système de navigation intérieure, susceptible d'étendre ses ramifications dans des contrées que la nature ne semblait pas avoir destinées à profiter des avantages de ce mode de communication, est un objet tout-à-fait digne d'une discussion approfondie. Des idées généralement reçues, des préjugés consacrés par le temps, pourront s'opposer à son adoption. C'est une raison, dit encore l'auteur, pour nous hâter d'en développer les principes avec plus d'étendue, et d'en indiquer des applications nouvelles. Ici commence la partie analytique, dans laquelle il ne nous est pas permis de le suivre. Pour exemple des applications utiles qu'on peut faire de sa théorie, il cite le projet de communication entre le Rhône et la Loire. Ce qui caractériserait sur-tout cette communication à travers le plateau de Saint-Étienne, c'est qu'on trouve dans la propre masse des matières pesantes qu'on y exploite une partie de la force nécessaire à leur transport, puisqu'en descendant sur le canal qui servirait à leur exploitation, elles pourraient faire remonter de ses biefs inférieurs une partie de l'eau nécessaire à son entretien. L'auteur passe alors aux graves inconvéniens dans lesquels on est tombé pour avoir ignoré ces principes. Pour exemple, il cite le canal de Briare, le plus ancien de France et le plus généralement connu. Il résulte de ses calculs que la dépense due au maintien de la navigation sur ce canal pourrait être réduite à 200,000 tonneaux : ainsi les $\frac{23}{24}$ au moins du volume d'eau spécialement réservé pour cet usage sont consommés en pure perte; et cependant, faute d'eau, la navigation est souvent interrompue sur ce canal pendant plusieurs mois de l'année.

Mémoire sur le Développement des Fonctions en séries, et sur l'Intégration des Équations différentielles, ou aux différences partielles, par M. Augustin CAUCHY.

POUR découvrir et démontrer les propriétés les plus remarquables des fonctions, on a souvent employé leur développement en séries, ou suites infinies, c'est-à-dire, composées d'un nombre infini de termes; et parmi les géomètres, ceux même qui n'ont pas, suivant la méthode de La Grange, fait de ce développement la principale base du calcul infinitésimal, s'en sont du moins servis pour établir plusieurs théories importantes; par exemple, pour déterminer le nombre des constantes arbitraires, ou des fonctions arbitraires que comportent les intégrales générales des équations différentielles, ou aux différences partielles, pour calculer ces intégrales, pour fixer les caractères auxquels on doit reconnaître les solutions particulières, ou intégrales singulières, des équations différentielles, &c. Toutefois, en remplaçant les fonctions par des séries, on suppose implicitement qu'une fonction est complétement caractérisée par un développement composé d'un nombre infini de termes, au moins tant que ces termes obtiennent des valeurs finies. Par exemple, lorsqu'on substitue à la fonction $f(x)$ la série de Maclaurin, et que l'on écrit en conséquence

$$(1)\quad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\&c...$$

on suppose qu'à un système donné de valeurs finies des quantités

$$f(0),\ f'(0),\ f''(0),\ \&c...$$

correspond toujours une valeur unique de la fonction $f(x)$. Considérons, pour fixer les idées, le cas le plus simple, celui

où les quantités $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, &c... s'évanouissent toutes à-la-fois. Dans cette hypothèse, on devra, ce semble, conclure de l'équation (1) que la fonction $f(x)$ s'évanouit elle-même. Néanmoins cette conclusion peut n'être pas exacte. En effet, si l'on prend

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}},$$

on trouvera

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 0,\ f''(0) = 0,\ \&c...$$

Il en serait encore de même, si l'on supposait

$$f(x) = e^{-\left(\frac{1}{\sin. x}\right)^2},$$

ou bien

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2(a+bx+cx^2+\ldots\ldots)}},$$

a désignant une constante positive, et $a+bx+cx^2+$ &c.... une fonction entière de x; ou simplement

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}},$$

la variable x étant assujettie à demeurer constamment positive, &c.... On peut donc trouver pour $f(x)$ une infinité de fonctions différentes, dont les développemens en séries ordonnées suivant les puissances acendantes de x, se réduisent à zéro.

On serait naturellement porté à croire qu'étant données les quantités $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$....., l'équation (1) fera du moins connaître la valeur de $f(x)$ toutes les fois que la série comprise dans le second membre restera convergente. Néanmoins il n'en est pas ainsi. En effet, nommons $\varphi(x)$ une fonction développable par le théorème de Maclaurin en série convergente, et, de plus, équivalente à la somme de la

série obtenue; désignons par $\chi(x)$ une autre fonction dont le développement se réduise à zéro : les deux fonctions

$$\phi(x) \text{ et } \phi(x) + \chi(x),$$

distinctes l'une de l'autre, auront pour développement une même série convergente. Par exemple, les fonctions

$$e^{-x^2} \text{ et } e^{-x^2} + e^{-\frac{1}{x^2}},$$

ont pour développement commun la série convergente

$$1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1.2} - \frac{x^6}{1.2.3} + \&c. \ldots,$$

dont la somme équivaut à une seule d'entre elles.

Il suit de ces remarques qu'à une seule série, même convergente, correspondent une infinité de fonctions différentes les unes des autres. Il n'est donc pas permis de substituer indistinctement les séries aux fonctions ; et pour être assuré de ne commettre aucune erreur, on doit borner cette substitution au cas où les fonctions, étant développables en séries convergentes, sont équivalentes aux sommes de ces séries. Dans toute autre hypothèse, les séries ne peuvent être employées avec une entière confiance qu'autant qu'elles se trouvent réduites à un nombre fini de termes, et complétées par des restes dont on connaît les valeurs exactes ou approchées. Ainsi, en particulier, lorsqu'on veut déterminer par une méthode rigoureuse les *maxima* ou *minima* des fonctions, et les véritables valeurs des fractions qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, on emploie la série de Taylor, non pas en la regardant comme composée d'un nombre infini de termes, mais en la complétant par un reste dont la valeur demeure comprise entre certaines limites.

Après les considérations que nous venons d'exposer, on ne sera pas surpris de trouver en défaut, dans certains cas,

des propositions générales établies par le moyen des séries. Nous nous contenterons de citer à ce sujet les exemples qui suivent.

Soient (2) $dy = f(x, y) . dx$

une équation différentielle entre les variables x, y; et

$$y = F(x)$$

une valeur de y propre à vérifier cette équation. On démontre, par le moyen des séries, que cette valeur de y est une intégrale singulière toutes les fois qu'elle rend infini le coefficient différentiel

$$\frac{d f(x, y)}{dy}.$$

Mais cette proposition n'est pas toujours vraie. Ainsi l'on satisfait à l'équation différentielle

$$(3) \qquad dy = [1 + (y - x) \log (y - x)] \, dx,$$

par la valeur $y = x$, qui rend infinie la fonction

$$\frac{d[1 + (y - x) \log (y - x)]}{dy} = 1 + \log (y - x);$$

et cependant $y = x$, au lieu d'être une intégrale singulière, est tout simplement une intégrale particulière, puisqu'elle se trouve comprise dans l'intégrale générale, savoir :

$$\log (y - x) = c . e^x.$$

C'est encore par le moyen des séries que l'on détermine le plus souvent le nombre de constantes ou de fonctions arbitraires que doit renfermer l'intégrale générale d'une équation différentielle, ou aux différences partielles. Toutefois, ce mode de détermination ne saurait être considéré comme suffisamment exact. Supposons, pour fixer les idées, qu'une équation linéaire aux différences partielles renferme avec les variables indépendantes x, y, et la variable principale z, 1.° la dérivée partielle du premier ordre de z, par rapport à x;

2.° une ou plusieurs dérivées partielles de z, relatives à y. Dans ce cas, la valeur générale de z pourra être représentée par une série ordonnée suivant les puissances ascendantes de x, et qui ne renfermera d'arbitraire que la fonction de y, à laquelle z est censée se réduire pour $x = 0$. Par conséquent, si cette fonction est connue pour toutes les valeurs possibles de y, il semble que la valeur de z sera complétement déterminée. Néanmoins il n'en est pas ainsi. Concevons en effet que l'équation donnée soit la suivante :

$$(4) \qquad \frac{dz}{dx} = \left(1 + \frac{1}{y^2}\right)\frac{d^2z}{dy^2} - \frac{1}{y^3}\frac{dz}{dy};$$

et désignons par $\varphi(y)$ la fonction de y, à laquelle z doit se réduire par $x = 0$. La valeur de z, déduite de l'équation (4) par le développement en série, prendra la forme,

$$(5)\; z = \varphi(y) + \frac{x}{1}\left[\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)\frac{d^2\varphi(y)}{dy^2} - \frac{1}{y^3}\frac{d\varphi(y)}{dy}\right] + \&c...$$

Tous les termes de la série précédente étant des fonctions déterminées des variables x et y, lorsque la fonction $\varphi(y)$ est elle-même déterminée, il semble en résulter qu'une seule valeur de z remplira la double condition de vérifier l'équation aux différences partielles proposées, et de se réduire à $\varphi(y)$ pour $x = 0$. Néanmoins il est facile de s'assurer que si l'on satisfait aux deux conditions énoncées par une certaine valeur

$$(6) \qquad z = \chi(x, y),$$

on y satisfera encore en attribuant à z la valeur plus générale

$$(7) \qquad z = \chi(x, y) + c\,x^{-\frac{1}{2}}\,e^{-\frac{1+y^2}{4x}},$$

dans laquelle c désigne une constante arbitraire.

Après avoir montré l'insuffisance des méthodes d'intégration fondées sur le développement en séries, il me reste à dire en peu de mots ce qu'on peut leur substituer.

Pour déterminer le nombre des constantes arbitraires que

comportent les intégrales générales des équations différentielles entre deux ou plusieurs variables, et pour démontrer l'existence de ces mêmes intégrales, il suffit d'employer les méthodes que j'expose depuis plusieurs années dans mes leçons à l'École polytechnique. Ces méthodes seront l'objet d'un nouveau Mémoire. La détermination du nombre des constantes arbitraires, en particulier, repose sur le théorème suivant.

Si une fonction $\varpi(x)$ de la variable x s'évanouit pour $x = 0$, le rapport de cette fonction à sa dérivée, savoir,

$$\frac{\varpi(x)}{\varpi'(x)},$$

s'évanouira lui-même quand on fera décroître la variable x au-delà de toute limite.

J'ajouterai que la méthode dont je fais usage pour démontrer l'existence des intégrales dans tous les cas possibles, sert en même temps à calculer, avec telle approximation que l'on veut, les valeurs des intégrales particulières correspondantes à des valeurs données des variables.

Pour distinguer, relativement aux équations différentielles du premier ordre, les intégrales singulières d'avec les intégrales particulières, il suffit d'appliquer la règle que j'ai fait connaître dans un Mémoire lu à l'Institut le 13 mai 1816. D'après cette règle, que l'on démontre rigoureusement sans le secours des séries, pour juger si une certaine valeur de y, par exemple,

$$y = F(x),$$

est une intégrale particulière ou singulière de l'équation différentielle

$$dy = f(x, y).\, dx,$$

on doit recourir, non pas à la fonction dérivée

$$\frac{df(x,y)}{dy},$$

mais à l'intégrale définie

$$\int \frac{dy}{f(x,y)-f(x,Fx)},$$

l'intégration étant effectuée par rapport à y seule, et à partir de $y=F(x)$. Suivant que cette intégration donnera pour résultat une quantité finie ou infinie, $y=F(x)$ sera une intégrale singulière ou une intégrale particulière. Ainsi l'on peut affirmer que la valeur $y=x$ vérifie, comme intégrale singulière, l'équation différentielle

$$dy=\left[1+(y-x)^{\frac{1}{2}}\right]dx;$$

et, comme intégrale particulière, les deux suivantes :

$$dy=[1+(y-x)]dx,$$
$$dy=[1+(y-x)\log(y-x)]dx,$$

attendu qu'en effectuant les intégrations relatives à y, à partir de $y=x$, on trouve

$$\int \frac{dy}{(y-x)^{\frac{1}{2}}}=2(y-x)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int \frac{dy}{y-x}=\log(y-x)-\log 0=\infty,$$

$$\int \frac{dy}{(y-x)\log(y-x)}=\log\log\frac{1}{y-x}-\log\log\frac{1}{0}=-\infty.$$

Quant à l'intégration des équations aux différences partielles, il ne semble pas possible, dans l'état actuel de l'analyse, d'assigner les caractères auxquels on doit reconnaître leurs intégrales générales, si ce n'est pour les équations du premier ordre, et pour celles qui s'intègrent par les mêmes procédés.

Du Fleuve Blanc, ou de la Branche principale du Nil, par M. JOMARD, *membre de l'Institut.*

ON ignore le lieu où le Nil prend naissance, et les directions diverses qu'il suit depuis sa source jusqu'au royaume de Dongolah. Encore n'est-ce que depuis très-peu de temps que la géographie du Nil, au-dessous de Dongolah, s'est un peu perfectionnée. En remontant un peu plus haut, on n'avait aucune observation de longitude sur laquelle on pût compter; on était réduit à quelques latitudes, à la vérité assez exactes, observées par le célèbre voyageur Bruce : mais, comme il s'était faussement persuadé que le bras du Nil qu'il avait suivi du côté de l'est, était la branche principale du fleuve, il n'avait donné aucune lumière sur le pays à l'occident. C'était cependant de ce côté qu'il fallait tourner son attention, pour être sur la voie des sources du Nil. Aussi la gloire de cette grande découverte, qui avait excité son ambition, lui a-t-elle tout-à-fait échappé; il n'a pas même obtenu l'honneur d'avoir vu le premier la source de la rivière Bleue, bras oriental du Nil : deux siècles auparavant, elle avait été visitée par les jésuites portugais. Le tort que Bruce s'est fait ainsi a rendu ses successeurs et même ses compatriotes injustes envers lui. On présume que la véritable source du Nil diffère de plus de 12 degrés en longitude, de celle de la rivière Bleue. Comment Bruce a-t-il pu se faire cette illusion, puisqu'il connaissait les rapports du voyageur français Lenoir du Roule, antérieur à lui d'un siècle; l'opinion du consul Maillet, fondée sur les renseignemens des caravanes; enfin le Mémoire lu par Delisle à l'Académie des inscriptions en 1752? Tous assuraient que le Nil vient de la partie occidentale de l'Afrique, et ce rapport se trouvait conforme au sentiment des anciens et à celui des Arabes. En effet, tous les écrivains, ou presque

tous, font descendre ce fleuve des hautes montagnes situées à l'ouest; et dans les écrivains arabes, comme dans les auteurs grecs, ce sont les *montagnes de la Lune*. Pressé par ces autorités, Bruce fut contraint de donner dans sa carte une place au fleuve *Blanc;* mais, pour écarter tous les doutes sur sa prétendue découverte, il traça le cours de cette branche parallèlement à l'autre, et la fit sortir également de la région de l'est. Quinze ans plus tard, Browne pénétra jusqu'au royaume de Darfour; là il recueillit des rapports conformes à ceux de Lenoir du Roule : aussi le major Rennell, en 1798 (et tous les géographes l'ont imité depuis), n'hésita pas à placer la source du Nil dans le pays de Douga, vers le 8.ᵉ degré de latitude et le 23.ᵉ de longitude. Malgré ce concours d'autorités, comme nul Européen n'avait parcouru le fleuve *Blanc*, on pouvait encore douter, sinon de son existence, du moins de son importance et de sa direction; et le tracé de son cours demeurait problématique.

Un voyageur français, plein d'intelligence comme de zèle et de courage, aura le mérite d'avoir, le premier, levé tous les doutes. Il a reconnu le point de concours du *Bahr el Abyad*, ou *le fleuve Blanc*, avec la branche appelée *Bahr el Azraq*, ou *la rivière Bleue*, celle que Bruce avait suivie. Cette embouchure a été déterminée par des observations astronomiques faites avec soin. Il en est de même de l'embouchure de l'*Atbara* dans le Nil (l'*Astaboras* des anciens). Au point où le Nil reçoit la rivière Bleue, sa largeur n'est pas aussi considérable qu'ailleurs; mais, un peu plus haut, cette largeur augmente beaucoup. La couleur de ses eaux est en effet blanche, et fait présumer quelle est la nature des terres qu'il arrose, dans la partie supérieure de son cours. A la hauteur de Sennaar, il cesse de courir parallèlement à l'autre branche du fleuve. Là aussi cesse la civilisation musulmane; au-delà règnent le paganisme et la barbarie. Les hommes se servent de flèches

empoisonnées, et ils se nourrissent de chair humaine. Tel est le pays presque entièrement inconnu que M. Cailliaud, avec son compagnon de voyage M. de Torzec, se proposait de parcourir au mois d'août dernier, afin de remonter le plus possible dans le sud-ouest. Comme ce voyageur a des connaissances en histoire naturelle, et qu'il fait des collections, on peut s'attendre à des découvertes en ce genre aussi précieuses que celles qu'il fait en géographie, sans négliger les observations barométriques et thermométriques, ni l'étude des monumens, ni les mœurs des habitans actuels. Quant aux observations de latitude et de longitude, on peut compter sur leur précision, si l'on en juge par celles dont M. Arago a fait à l'Académie un rapport favorable. Depuis long-temps, aucun voyageur n'a été dans une meilleure position pour étendre au loin les découvertes géographiques dans cette partie du continent africain. Peut-être aussi est-il réservé à M. Cailliaud de résoudre le problème de la relation qui existe entre le cours du Niger et le cours du Nil; question qui, dans tous les temps, a intéressé l'Europe savante et commerciale, mais jamais à un aussi haut degré qu'aujourd'hui. Bien que la plupart des récits faits par les nègres s'accordent à faire communiquer ces deux grands fleuves, il n'est pas possible de compter sur de pareilles informations. De tous les itinéraires que nous possédons, aucun ne suit le cours du Niger depuis Ségo, où Mungo-Park l'a laissé, jusqu'au méridien qui coupe les sources présumées du Nil. On n'a jamais suivi ce fleuve que partiellement; encore l'a-t-on souvent confondu avec le *Gambarou*. Enfin le grand lac intérieur (s'il existe tel qu'on le dépeint) semble devoir toujours empêcher les voyageurs africains de distinguer cette communication, d'ailleurs contraire à toutes les données géologiques et physiques. On sent de plus que l'espace immense qui sépare le Nil de l'Afrique occidentale, ne peut être traversé qu'avec des fatigues infinies.

L'auteur finit cette note en parlant de la découverte des grandes ruines situées à Assour, non loin de Chendy, latitude 16° 50′ environ. Plusieurs Européens avaient passé à quelques lieues seulement, sans se douter de leur existence. M. Cailliaud y a trouvé des statues colossales, une multitude de pyramides, et plusieurs temples sculptés à la manière de ceux de l'Égypte. Ainsi l'on ne peut plus douter que les arts de la civilisation de l'Égypte n'aient existé à plus de trois cents lieues de la dernière cataracte. Ces ruines sont celles de Méroé, capitale d'un empire puissant, qui entretenait une armée nombreuse et une multitude d'artistes et d'ouvriers. On ne peut douter que telle ne soit la position de Méroé, quand on lit attentivement les rapports des historiens et des géographes de l'antiquité. Ce point a été l'objet d'un Mémoire spécial, que l'auteur a lu à l'Académie des inscriptions et belles-lettres, le 9 novembre dernier.

Contradictions remarquées dans le dernier Journal de Mungo-Park, expliquées par les Observations astronomiques qu'il a faites en 1796, et rétablies, en tenant compte de l'erreur qu'il avait commise en donnant trente-un jours au mois d'avril, par J. EDWARD BOWDITCH, *Esq. 1821.*

M. WALCKENAER avait remarqué cette erreur du 31 avril, sans en tirer la conséquence que cette méprise pourrait avoir influé sur les latitudes calculées peu de temps après, en se trompant d'un jour sur leur date véritable; ce qui a dû altérer plus ou moins toutes les déclinaisons prises dans le *Nautical Almanac*, et sur-tout celles de la lune. Il en résulte, par exemple, que l'importante position de Ségo, et cette partie du cours du Niger, doivent être abaissées de plus d'un tiers de degré. Mungo-Park voyagea depuis en 1805, et son journal

n'a été publié qu'en 1815. Toute sa route, à compter de Pisania, son point de départ, est donc mal placée sur toutes les cartes d'Afrique publiées depuis en Europe.

On voit, dans son journal, que le 28 avril il partit de Pisania; il donne ensuite, jour par jour, ce qu'il a fait le 29, le 30 et *le 31 avril*, le 1.er, le 2, le 3, &c. de mai. Mais dans les premiers jours on ne voit aucune observation astronomique. Il continue ainsi jusqu'à la fin de son journal, sans omettre un seul jour, et sans témoigner que jamais il se fût aperçu du jour qu'il avait compté de trop en avril. Il était possible que cette erreur ne fût remarquée de long-temps, et l'on aurait trouvé dans le journal des contradictions palpables et dont il eût été difficile d'assigner la cause. En voici un premier exemple : au 15 mai, page 22, on lit, sans autre détail, qu'à Walter's well (à trois heures de marche N. E. de Néaulico), par l'observation de la lune au méridien, Rennell a trouvé la latitude 14° 38′ 46″ *B.* En 1796, Mungo-Park, à son retour, avait passé par ce même lieu, et son observation ne donnait pour latitude que 13° 12′. Du 15 au 16 mai, la différence de la lune en déclinaison était de 42′. Par cette considération, M. Bowditch réconcilie, à quelques minutes près, les deux observations. Il appuie cette correction de quelques autres calculs qui lui donnent, à quelques secondes près, le même résultat. L'artiste qui avait construit la carte avait senti les difficultés de faire accorder les routes et leurs directions avec les observations directes, et il avait fini par donner la préférence aux observations astronomiques, n'ayant aucune idée de la cause qui avait altéré toutes les déclinaisons. Il en est résulté une suite extrêmement défectueuse de latitudes : M. Bowditch en a fait la comparaison avec les latitudes véritables; on y voit des différences qui vont jusqu'à 65′. Les plus grandes ont lieu quand on s'est servi de la lune; elles sont médiocres, quand on s'est servi du soleil, dont la déclinaison

d'un jour à l'autre ne varie pas de 24'; elles sont très-petites, quand on s'est servi de Jupiter, dont la déclinaison ne change presque pas en vingt-quatre heures. Ainsi pour Ségo, dont la latitude a été observée vers l'équinoxe, l'erreur est de 23' seulement. Pour Jupiter, elle n'est que d'une minute. Par ces corrections, M. Bowditch parvient à réconcilier Mungo-Park avec lui-même, et les latitudes de son premier voyage avec celles qui résultent véritablement du second. Il n'en est pas de même des observations de longitude; elles ont été déterminées par les éclipses des satellites de Jupiter; et les jours où les observations ont été faites, s'accordent avec ceux qui sont indiqués dans la *Connaissance des temps*, et par conséquent dans le *Nautical Almanac*. Mais l'erreur d'un jour aurait dû tromper Mungo-Park pour les éclipses comme pour les déclinaisons; elle rendait les déclinaisons inexactes, mais elle aurait dû rendre impossible l'observation des éclipses. M. Bowditch regrette que Mungo-Park n'ait pas déterminé de même la longitude de Pisania, son point de départ. Du reste, il ne résout pas la difficulté. Plus loin, il nous dit qu'ayant tracé la route du Niger d'après les itinéraires d'Ashantee, il l'a trouvée de 2 degrés plus basse que dans la carte de Rennell. Il signale des différences non moins considérables pour les latitudes de Ségo, de Tombuctou, Cassina et Bournoo, entre Rennell, Browne, Walckenaer, Burckhardt, Ritchie, Lyon, et lui-même. Il élève quelques doutes sur les assertions de Palisot de Beauvois, desquelles il résulterait qu'il aurait pénétré cent lieues plus avant qu'aucun autre voyageur européen; ce qui l'aurait conduit au onzième parallèle nord, et ferait plus de la moitié du chemin entre la côte et le Niger. Il a vu entre les mains de M. Cuvier un récit de ce voyage de Palisot de Beauvois : mais rien alors n'avait éveillé ses soupçons; il desire que ce voyage soit publié. En attendant, il nous dit :

At nos hinc alii sitientes ibimus Afros;

ce qui nous indique le projet d'un autre voyage qui ne peut manquer d'être intéressant et de redresser beaucoup d'erreurs.

Il finit par quelques remarques sur les *Recherches géographiques* de M. Walckenaer *sur l'intérieur de l'Afrique septentrionale*, Paris, 1821.

Ce Mémoire, écrit en anglais, a été présenté en manuscrit à l'Académie; il a été écrit à l'occasion d'une remarque faite par un membre de l'Institut : le contenu intéresse tous ceux qui s'occupent de la géographie de l'Afrique; nous avons cru qu'il serait utile d'en consigner ici les principaux résultats.

Rapport sur les Tontines, présenté dans la séance du 9 avril 1821. La Commission était composée de MM. FOURIER, *rapporteur*, LACROIX *et* POISSON.

L'ACADÉMIE a arrêté que ce rapport serait imprimé en entier dans la partie historique de ses Mémoires.

1. Deux particuliers ont sollicité du Gouvernement l'autorisation d'établir une nouvelle tontine dont ils deviendraient les administrateurs perpétuels. Le ministre de l'intérieur, à qui le projet a été présenté, a desiré que l'Académie des sciences choisît dans son sein une commission chargée d'examiner les articles qui règlent les intérêts respectifs des actionnaires. La commission a pris connaissance de toutes les pièces relatives à cette affaire, et elle propose le rapport suivant.

On ne rappellera point ici la première origine des projets de ce genre, l'emploi qu'on en a fait dans les emprunts publics, les motifs qui ont obligé de recourir à des modes d'emprunt et de remboursement plus ingénieux et plus utiles, les résultats récens des tontines établies par des particuliers, et les contestations judiciaires auxquelles elles ont donné lieu. Tous ces faits sont assez connus, et montrent dans tout son jour la

nécessité d'un examen attentif, fondé sur les principes mathématiques propres à ce genre de questions.

2. Les *associations* que l'on a appelées *tontines*, du nom de leur inventeur, ont pour objet de mettre en commun des fonds qui, après le décès de chaque associé, sont partagés entre tous les survivans. Les biens soumis à ces obligations réciproques se trouvent ainsi soustraits à l'ordre commun de la société; ils ne passent pas aux héritiers de droit; ils deviennent la propriété d'un petit nombre de sociétaires parvenus à un âge très-avancé.

La forme la plus simple et la plus ordinaire de ces sociétés consiste à réunir dans une même classe les personnes d'un même âge; celui des actionnaires qui vit le dernier hérite des fonds qui avaient appartenu à la classe entière.

3. On peut varier ces combinaisons à l'infini, et comprendre dans la même classe des personnes dont l'âge diffère de cinq ans ou de dix ans. On peut aussi établir des rapports entre ces classes, en sorte qu'à l'extinction de l'une d'elles les revenus passent, en totalité ou en partie, aux classes survivantes, en assujettissant ces dernières à une retenue proportionnelle. Les sociétés de ce genre sont donc susceptibles de formes très-composées; et pour opérer une compensation équitable de tant d'intérêts divers, il faudrait les régler selon les probabilités de la vie.

(Les articles 4, 5 et 6 se rapportent uniquement aux projets présentés.)

7. Afin de comprendre sous un même point de vue les questions semblables qui pourraient se présenter par la suite, et sur lesquelles l'Académie serait consultée, nous placerons ici un exposé sommaire des principes communs à toutes ces questions; on en déduira les conséquences propres à chaque cas particulier.

Les tontines sont, à proprement parler, des paris sur la

vie des hommes; ce sont des jeux de hasard dont l'issue est éloignée. Pour s'en former une idée juste, il faut considérer attentivement la nature des mises, les conditions du jeu, et ses résultats.

Le montant de chaque mise, dans la tontine simple, est pris, en général, sur la fortune que les joueurs laisseraient après leur mort. Les actionnaires ne compromettent point leur revenu actuel; car ce revenu ne peut pas diminuer, il ne peut qu'augmenter : la somme des mises, ou l'enjeu, provient des capitaux qui seraient le partage légitime des héritiers; ce sont ces derniers qui fournissent la matière du pari.

8. Le fondement principal des tontines est l'exhérédation. Elles exercent deux penchans funestes : l'un est la disposition à attendre du hasard ce qui devrait être le fruit d'une industrie profitable à tous, ou le résultat ordinaire des institutions ; l'autre est le desir d'augmenter ses jouissances personnelles, en s'isolant du reste de la société. L'invention d'un tel jeu ne pouvait manquer de réussir; car il consiste dans une loterie dont tous les lots rapportent quelque profit, excepté un seul, savoir, le lot de l'actionnaire qui meurt le premier; et le prix du billet semble ne rien coûter au joueur, parce qu'il est retranché du bien qui resterait après lui. Cette combinaison a donc un attrait qui lui est propre; il suffit que l'usage en soit rendu facile et soit publiquement autorisé, pour qu'il se répande de plus en plus dans les diverses classes de la société. On peut, il est vrai, citer plusieurs cas où des particuliers en feraient une application utile et même louable; mais ces exceptions ne suffisent point pour justifier des établissemens dont la raison condamne l'objet principal.

9. Si tous les actionnaires ont le même âge, et s'ils fournissent la même mise, les conditions du jeu sont équitables; c'est-à-dire que le sort des joueurs est le même, abstraction faite de toutes circonstances personnelles. Si les actionnaires

sont distribués en plusieurs classes, selon les âges, et que la plus grande différence d'âge puisse être de cinq ans, il se trouve une inégalité très-sensible dans les conditions, lorsqu'on suppose les mises égales et les intérêts égaux; si cette différence d'âge peut être de dix ans, l'inégalité est excessive.

10. Si les actionnaires ont des âges inégaux, ou si, étant distribués en classes, on établit que les revenus d'une classe éteinte sont réversibles sur les classes survivantes, le jeu est beaucoup plus composé; mais on peut rendre les conditions équitables, soit en faisant varier les mises, soit en réglant les intérêts selon la proportion des âges. Cette question appartient à l'analyse des probabilités, et il y a des cas où la solution rigoureuse exigerait des calculs extrêmement longs, pour lesquels il n'existe point de tables; mais ces cas ne sont point ceux qui se présentent communément. La question relative aux associations très-nombreuses admet une solution générale et d'une application facile. Cette solution ne se trouve dans aucun ouvrage rendu public; mais il est aisé d'y suppléer. Pour satisfaire avec plus d'étendue aux intentions du Gouvernement et de l'Académie, nous avons dû nous proposer et résoudre la question suivante.

11. Supposons que l'on forme une association très-nombreuse, comprenant des personnes de tout âge, et qui ait pour objet de transmettre aux survivans les fonds mis en commun; que l'on règle, dans le projet de statuts, 1.° la composition de ces classes, c'est-à-dire, l'âge et le nombre de ceux qui les forment, ou seulement le nombre total; 2.° les valeurs respectives des mises; 3.° le mode de réversibilité en faveur des survivans ou des classes survivantes; 4.° les frais de gestion; 5.° le mode de liquidation : il s'agit de reconnaître si les intérêts annuels sont répartis équitablement entre les classes et les actionnaires, conformément à une table de mortalité proposée, et le taux de l'intérêt étant connu.

12. Tel est l'énoncé de la question prise dans le sens le plus général; on la résout facilement au moyen de ce principe : *Que la mise de chaque actionnaire, d'un âge donné, doit être proportionnelle à la valeur moyenne de toutes les sommes éventuelles que peuvent recevoir les actionnaires de cet âge.* La somme *éventuelle* est celle que l'on doit recevoir, si un certain événement a lieu; on estime cette somme en multipliant sa valeur absolue par la probabilité de l'événement, et l'on rapporte le paiement à une époque fixe, suivant la règle de l'intérêt composé. En suivant ces principes, on est assuré de régler équitablement les intérêts des actionnaires.

13. Cette somme moyenne ainsi calculée est, à proprement parler, la valeur légale de la mise. En cas de contestations portées aux cours de justice, ces cours se conformeraient exactement à cette règle, parce qu'elle fait droit à tous.

Indépendamment des conséquences dont on vient d'indiquer le principe, nous avons déduit de notre solution des résultats pratiques qui donnent dans plusieurs cas une approximation suffisante, et préviennent du moins les erreurs principales.

14. Si l'on se borne à une première approximation, ce que l'on peut faire dans un assez grand nombre de cas, à raison de l'incertitude sur le choix des tables, sur la composition des classes, et sur le taux de l'intérêt, on voit que les valeurs des mises sont assez exactement proportionnelles à la durée moyenne de la vie, à partir d'un âge donné.

On pourrait suivre cette règle pour déterminer les supplémens de mise, lorsque les actionnaires compris dans une même classe ont des âges différens.

15. Nous allons maintenant ajouter une remarque fort importante concernant la composition des sociétés dont il s'agit. On conçoit que dès l'origine d'un pareil établissement,

où le revenu d'une classe est réversible sur les autres, des particuliers ou des compagnies pourraient acquérir toutes les actions destinées aux classes des âges les moins élevés, et par-là se procurer, indépendamment du revenu éventuel de leurs actions, la possession éloignée, mais certaine, d'un fonds immense appartenant à toutes les classes. A défaut de cette première spéculation, qui n'est pas la plus à craindre, parce qu'il est assez facile de la prévoir, on pourrait acquérir un grand nombre d'actions d'un certain ordre, dont la valeur intrinsèque serait supérieure à celle des autres, et cette inégalité ne pourrait être découverte que par l'expérience ou par un examen antérieur très-approfondi, tel que celui que nous proposons.

16. Or il n'y a que l'application de la règle mathématique dont nous venons de parler, qui rende impossibles de pareilles spéculations. Il suffit et il est nécessaire de la suivre, pour être assuré que l'établissement ne peut donner lieu à aucune de ces combinaisons; car tous les intérêts se trouveraient tellement compensés, que pour acquérir la propriété réservée aux survivans, ou les actions d'un ordre quelconque, il faudrait les payer à leur juste prix. On reconnaît ainsi toute la sagesse des motifs qui ont porté le Gouvernement à exiger, conformément à la proposition du comité de l'intérieur du Conseil d'état, que les conditions des statuts fussent l'objet d'un examen spécial fondé sur la science du calcul.

17. Nous devons maintenant considérer les résultats mathématiques des combinaisons propres aux tontines.

On remarquera d'abord que ces résultats sont opposés à ceux que procurent les caisses d'épargne, de prévoyance, de secours, &c. Ces établissemens ont un objet honorable et précieux; ils encouragent l'esprit d'ordre et d'économie, font connaître tout le prix d'un travail constant, conservent et multiplient les dons de la reconnaissance et de l'affection. Il

en est de même des banques ou des sociétés d'assurances sur la vie humaine, lorsqu'elles sont sagement constituées. Mais, indépendamment de ces considérations générales, il convient à l'objet de ce rapport, que nous exprimions ici une des conséquences de l'examen mathématique : elle consiste en ce que les transactions qui, au prix d'un léger sacrifice, nous peuvent garantir contre les pertes fortuites, augmentent en effet l'avantage actuel de chaque possesseur. L'expression analytique de cet avantage prouve qu'il est devenu plus grand, par cela seul que le contrat de garantie a été conclu. La sécurité est un bien réel, dont on peut, sous un certain rapport, estimer et mesurer le prix; c'est une valeur nouvelle, entièrement due aux transactions qui nous prémunissent contre l'incertitude du sort, et il y a des cas où cette valeur est immense.

18. Quant aux banques de jeux ou de tontines, elles produisent les effets contraires. Aussitôt que l'on a consenti à céder une partie de ce qu'on possède, dans l'espoir d'obtenir une somme considérable, on a diminué l'avantage de sa première situation. A la vérité, si les conditions ont été réglées équitablement, la valeur mathématique moyenne demeure la même; mais l'avantage relatif est diminué, et il peut être beaucoup moindre qu'auparavant. A conditions mathématiques égales, tout échange d'une valeur certaine contre une somme éventuelle est une perte véritable; et, aux mêmes conditions, l'échange d'un bénéfice incertain contre sa valeur moyenne et fixe est un avantage acquis.

La vérité de ces propositions devient plus sensible dans les combinaisons qui servent de fondement aux tontines. Il est évident que la société ne peut être intéressée à ce qu'une multitude de familles perdent une partie de ce qu'elles devaient posséder un jour, et qu'elles contribuent involontairement à enrichir un très-petit nombre de personnes pendant les dernières années de leur vie. Ceux à qui la fortune réserve cette

faveur n'en retirent pas un avantage équivalent au préjudice que les autres ont souffert.

19. Les principes énoncés dans ce rapport ne s'appliquent pas indistinctement à tous les placemens viagers; il y a un assez grand nombre de cas où l'on fait, au moyen de ces placemens, un usage honorable ou nécessaire des capitaux. Rien ne s'oppose à ce que des particuliers contractent librement entre eux des obligations de ce genre; elles ne sont restreintes que par les limites qui conservent les droits des héritiers en ligne directe. Nos lois civiles, qui n'accordent point d'action en matière de pari pour cause purement fortuite, autorisent et garantissent les contrats de rente viagère, et deux autres contrats aléatoires, qui se rapportent au commerce de mer. De plus, il existe déjà en France et il se forme chaque jour des établissemens fondés sur des principes très-différens de ceux des tontines, où les capitaux peuvent être placés sous les formes les plus diverses. Nous ajouterons même que nous regarderions ces établissemens comme incomplets, s'ils n'offraient point aussi des modes de placement très-variés, au moyen desquels des particuliers peuvent retirer de grands avantages de la combinaison des chances de la vie humaine, et se procurer, dans un âge avancé, un revenu viager, ou fixe, ou croissant; mais ces associations utiles ne peuvent point être comparées à celles qui ont pour unique objet de réunir un très-grand nombre de personnes, pour qu'elles se transmettent une partie de leurs biens par l'effet des survivances.

20. Si l'on veut apprécier exactement les conséquences de ce dernier mode de placement, il suffit de jeter les yeux sur la table ci-jointe, qui convient spécialement aux tontines établies en France; elle fait connaître l'accroissement progressif du revenu annuel que les actionnaires obtiendront aux différens âges. On suppose, par exemple, qu'un très-grand

nombre de personnes âgées de vingt ans fournissent chacune un capital portant 100 francs de rente, et que le revenu total doive être partagé à la fin de chaque année entre les seuls survivans; il en résultera, pour ces derniers, une augmentation continuelle de revenu : mais cette augmentation sera peu considérable pendant un long intervalle de temps; elle ne procurera un grand avantage qu'à ceux des actionnaires qui parviendront à un âge très-avancé. Le revenu, qui était de 100 francs pour la première année, sera de 100 francs 98 centimes à la seconde année, 102 francs 3 centimes à la troisième année, 103 francs 4 centimes à la quatrième année, ainsi de suite, comme on le voit dans la table; il s'écoulera plus de vingt-six ans avant que le revenu de l'action soit 133 francs; il sera égal à 150 francs après trente-quatre ans environ; il s'écoulera environ quarante-quatre ans avant que le revenu soit doublé. A la vérité, pour les derniers survivans, et lorsqu'ils seront peu éloignés du terme de leur vie, le revenu annuel croîtra très-rapidement, et quelques-uns d'entre eux, dans une extrême vieillesse, auront acquis à peu de frais une fortune énorme.

21. Il faut remarquer que c'est dans les dernières années seulement que les avantages sont fortuits. Le jeu ne s'établit que lorsque les actionnaires sont en petit nombre; jusque-là, le revenu de l'action n'est point incertain, et l'on peut être assuré que pendant plus de quarante années ce revenu croîtra lentement, et selon une loi semblable à celle que l'on vient d'indiquer.

22. Les inventeurs des projets s'efforcent, pour la plupart, de dissimuler ces premiers résultats; ils promettent des augmentations rapides, qu'ils supposent fondées sur le calcul des chances de la vie; ou ils remplacent par des combinaisons compliquées les modes plus simples qui laisseraient apercevoir les conséquences inévitables de leur projet; et

comme les connaissances positives en cette matière sont peu répandues, il leur est facile de faire naître des espérances exagérées ou confuses. Lorsque l'expérience a démenti leurs promesses, ils allèguent qu'ils ont été eux-mêmes induits en erreur, et que toutefois ils s'étaient conformés aux règles connues; mais cette allégation est dénuée de tout fondement. On s'en convaincra en recourant aux sources où ces règles peuvent être puisées, depuis l'ouvrage de M. Deparcieux, qui écrivait sur cette matière en 1745, jusqu'aux traités les plus récens. Les tables de mortalité sont encore sujettes à des incertitudes, et sur-tout pour les premiers âges et pour les derniers; mais l'imperfection n'est pas telle, qu'il ne soit très-facile de connaître, sans aucun doute, le résultat d'une tontine nombreuse. Nous devons rappeler à ce sujet, que l'Académie des sciences de Paris, consultée par le Gouvernement sur le projet de l'établissement de la caisse dite *de Lafarge*, proposa un avis contraire à ce projet. Nous avons trouvé dans nos archives le rapport de la commission chargée de l'examen de cette question; il a été adopté dans la séance du 1.er décembre 1790 : il est signé de M. de Laplace, rapporteur, Vandermonde, Coulomb, La Grange et Condorcet.

23. Le but principal que se proposent les inventeurs de ces projets, est de créer des emplois dont ils se réservent la jouissance à perpétuité, et d'acquérir ainsi une fortune considérable à titre de frais de gestion ou de premier établissement. Leurs prétentions, à cet égard, sont excessives, et ils se fondent sur l'exemple de ceux qui les ont précédés dans cette carrière. Ils perçoivent des droits fixes, des rentes annuelles, des parts dans les extinctions. Nous avons sous les yeux des projets dont les auteurs auraient été autorisés, en complétant leur établissement, à recevoir, pour prix d'un travail très-borné, une première somme de 1,500,000 francs, indépendamment d'une rente annuelle de 145,000 fr. qui subsisterait

pendant toute la durée de l'association. Aussi long-temps que l'esprit de spéculation pourra concevoir de telles espérances, il s'exercera sous les formes les plus variées, et il est facile de prévoir tous les effets d'une cause aussi active. Telle est l'origine de la plupart des projets que nous voyons se former chaque jour.

24. Il est vrai que, dans plusieurs états de l'Europe, des gouvernemens éclairés ont eu recours, pour les emprunts publics, aux combinaisons des tontines; mais il est vraisemblable que ces formes d'emprunt ne se renouvelleront jamais: on les regardait alors comme un élément nécessaire du succès; ils appartenaient donc à cette classe de dispositions dont on ne prétend pas justifier les principes, mais qui du moins s'expliquent par des motifs d'utilité générale. D'ailleurs on cherchait à rendre les chances favorables aux prêteurs, on ne prélevait point de frais de gestion; enfin on suppléait ainsi à des impôts onéreux : mais on ne peut alléguer ces exemples en faveur d'établissemens du même genre qui seraient créés par des particuliers et dont la société ne retirerait aucun avantage.

L'article 25 concerne spécialement un des projets présentés.

26. On a vu que l'accroissement du revenu, au profit des survivans d'une même classe, est nécessairement médiocre et tardif. Quant à la proposition de réserver aux plus jeunes l'héritage des classes plus âgées, et de faire acquitter d'avance par les premiers le prix de cet héritage, elle n'est la source d'aucun avantage réel. Dans la tontine simple, le fonds commun, devenu la propriété du dernier survivant, passe du moins à ses héritiers de droit, et toutes les familles des sociétaires peuvent l'espérer également. Ici, cet héritage est attribué d'avance aux classes plus jeunes; ainsi pour toutes les autres l'exhérédation est consommée : mais, dans ces premières classes, chacun des actionnaires paie en annuités

viagères le juste prix du fonds qui peut lui revenir un jour; il commence donc par diminuer son revenu actuel; et cette perte subsistera assez long-temps avant d'être compensée par l'accroissement de revenu résultant de la survivance. On est assuré qu'une partie de ces actionnaires les plus jeunes mourra avant que leur revenu ait repris sa valeur primitive. L'effet de l'association aura été pour eux, 1.° d'aliéner le fonds, 2.° de diminuer le revenu, 3.° d'acquitter le prix dû aux inventeurs de la tontine.

En continuant cet examen, on voit qu'un très-grand nombre d'actionnaires des quatre premières classes contribuent, pendant toute la durée de leur vie, à payer un héritage qu'ils ne doivent point recevoir. Par exemple, le revenu annuel de la classe de vingt à vingt-cinq ans ne passera aux quatre premières classes qu'après un intervalle de plus de soixante ans; car sur un grand nombre d'hommes de vingt à vingt-cinq ans, il s'en trouvera un ou plusieurs qui atteindront un âge très-avancé. Or, après cet intervalle, la plus grande partie des actionnaires qui composaient les quatre premières classes, n'existera plus; le nombre de ceux qui formaient la quatrième classe, de quinze à vingt ans, sera réduit au-dessous de la sixième partie : par conséquent, les cinq sixièmes auront contribué, pendant plus de soixante ans, à payer un bien qui ne sera possédé ni par eux, ni par leurs héritiers. Lorsqu'un particulier achète d'un autre une propriété qu'il doit posséder après la mort du vendeur, il a du moins la certitude d'ajouter ce fonds aux siens, et d'en augmenter les avantages de sa famille; de plus, il regarde comme possible que l'annuité ne soit pas payée pendant un très-long temps : ce sont les motifs ordinaires de cette sorte de contrats. Ici toutes les conditions sont changées.

1.° L'acquéreur paiera certainement la rente viagère pendant plus de soixante années.

2.° Il est très-vraisemblable que le bien dont il paie le prix n'appartiendra ni à lui, ni à ses héritiers. Quelle utilité peut-il y avoir à troubler l'ordre commun de la transmission des biens pour arriver à de tels résultats? Et comment peut-on espérer l'autorisation publique de faire de semblables propositions à plusieurs milliers de familles, en réclamant, pour prix de son invention et de ses soins, plus de deux pour cent de tous les capitaux, et deux pour cent de tous les revenus?

27. Dans le premier projet qui nous a été présenté, nous avions remarqué l'article des statuts qui autorise la réunion de plusieurs actions sur une seule tête. Nous ne traitons point ici cette question, parce que nous ignorons si les auteurs du second projet ont le dessein de conserver l'article. Nous ferons seulement remarquer que cette disposition porterait un préjudice notable à ceux qui en feraient usage, et que leur consentement n'est pas, dans une pareille matière, un motif suffisant pour justifier cette lésion de leurs intérêts.

Au reste, cette partie de la question a été traitée par M. Navier dans un écrit très-remarquable, présenté à l'Académie, où il a soumis à une analyse exacte et approfondie les chances relatives aux tontines.

28. Nous avons vu que les effets généraux des associations dont il s'agit se réduisent à intervertir fortuitement, sans aucun fruit pour la société et dans un très-grand nombre de familles, l'ordre commun de l'hérédité que déterminent les rapports naturels et les lois positives; mais si, indépendamment de ces motifs, on examine seulement les conséquences relatives aux intérêts des actionnaires, on reconnaît que le placement des capitaux en tontine est beaucoup moins favorable que le simple contrat de rente viagère. Cette dernière transaction a aussi pour objet d'aliéner la propriété des fonds; mais elle procure du moins un résultat constant, facile à apprécier, et conforme à des règles simples et connues. Celui au profit

duquel la rente est constituée, voit son revenu augmenter d'une quantité assez considérable; il reçoit, dès la première année et jusqu'à sa mort, une valeur fixe qui améliore sensiblement l'état de sa fortune. Tout homme prudent préférera cet avantage moyen et invariable à un accroissement de revenu fort modique pendant un long temps, et suivi de chances très-favorables, mais très-incertaines.

29. On pourrait développer davantage cette comparaison du placement en tontine et du placement en rente viagère: mais nous n'insérons point dans notre rapport les détails de cette question; elle dépend d'une branche de l'analyse des probabilités où l'on considère, au lieu des valeurs absolues, les avantages relatifs que ces valeurs procurent. On est ainsi ramené à la conséquence fondamentale que nous avons déjà indiquée, savoir, que l'on diminue nécessairement l'avantage actuel du possesseur, si l'on remplace une valeur moyenne et certaine par des valeurs inégales assujetties à des chances. Le résultat mathématique moyen est le même; mais l'avantage réel est devenu moindre, et il diminue de plus en plus, à mesure que les valeurs éventuelles deviennent moins probables et plus inégales.

30. Nous terminerons ce rapport en résumant comme il suit les conséquences principales de notre examen, savoir :

Qu'en général l'établissement des tontines ne présente point de motifs d'utilité publique, et ne nous paraît mériter à aucun titre l'autorisation du Gouvernement ;

Que si cette autorisation ne pouvait être refusée, sauf à restreindre ces spéculations par la seule concurrence des établissemens analogues, et si toute la question qui nous est proposée se réduit à régler équitablement les intérêts respectifs des actionnaires, nous disons qu'on atteindra ce but, soit en réunissant dans une même classe toutes les personnes du même âge, sans établir aucune relation entre les différentes

classes, soit en déterminant les intérêts et les mises, en sorte que chaque mise correspondante à un âge donné représente la valeur moyenne des sommes éventuelles que tous les actionnaires de cet âge peuvent recevoir;

Qu'en s'écartant de ce dernier principe, on serait exposé aux plus graves inconvéniens, et notamment, que l'on pourrait donner lieu à des spéculations qui consisteraient à acquérir toutes les actions d'un certain ordre, pour s'assurer un gain énorme au détriment des autres sociétaires;

Que, dans l'intérêt des particuliers qui usent du droit d'aliéner leurs fonds, le placement en tontine est en général le moins avantageux de tous; que le contrat de rente viagère, constitué sur une ou plusieurs têtes, est à-la-fois plus simple et plus favorable; qu'il en est de même de plusieurs autres placemens dont la forme peut être variée, et qui procurent un revenu viager, fixe, ou croissant avec l'âge;

En ce qui concerne les deux projets qui ont été l'objet spécial de notre examen..........................

....

Que les indemnités réclamées pour frais de gestion sont énormes, et certainement disproportionnées aux services rendus aux actionnaires;

Que l'exécution de cette entreprise donnerait lieu à des contestations inévitables et nombreuses;

Enfin, que l'Académie ne peut que refuser son approbation à un établissement irrégulier, contraire aux vues du Gouvernement et même aux intentions des auteurs du projet.

L'Académie approuve le rapport et en adopte les conclusions.

TABLE

de l'Accroissement annuel du Revenu des Fonds placés dans les Tontines.

ÂGES.	REVENUS.	ÂGES.	REVENUS.	ÂGES.	REVENUS.	ÂGES.	REVENUS.
ans.	fr. c.	ans.	fr. c.	ans.	fr. c.	ans.	fr. c.
0.	60. 00.	24.	104. 09.	48.	135. 89.	72.	300. 36.
1.	74. 55.	25.	105. 15.	49.	137. 96.	73.	324. 30.
2.	78. 05.	26.	106. 15.	50.	140. 10.	74.	352. 38.
3.	81. 40.	27.	107. 18.	51.	142. 55.	75.	385. 78.
4.	83. 92.	28.	108. 63.	52.	145. 35.	76.	423. 95.
5.	85. 86.	29.	109. 70.	53.	148. 26.	77.	470. 52.
6.	87. 53.	30.	110. 89.	54.	151. 30.	78.	528. 57.
7.	88. 96.	31.	112. 12.	55.	154. 75.	79.	598. 52.
8.	90. 24.	32.	113. 37.	56.	158. 36.	80.	689. 83.
9.	91. 46.	33.	114. 64.	57.	162. 15.	81.	805. 94.
10.	92. 50.	34.	115. 95.	58.	166. 46.	82.	957. 64.
11.	93. 35.	35.	117. 29.	59.	171. 01.	83.	1,146. 04.
12.	93. 99.	36.	118. 65.	60.	175. 80.	84.	1,379. 05.
13.	94. 65.	37.	120. 15.	61.	180. 88.	85.	1,695. 08.
14.	95. 32.	38.	121. 31.	62.	186. 27.	86.	2,142. 01.
15.	95. 99.	39.	122. 59.	63.	192. 43.	87.	2,806. 08.
16.	96. 67.	40.	123. 89.	64.	198. 61.	88.	3,700. 00.
17.	97. 48.	41.	125. 23.	65.	206. 07.	89.	5,087. 00.
18.	98. 31.	42.	126. 59.	66.	214. 21.	90.	7,400. 00.
19.	99. 15.	43.	127. 98.	67.	223. 62.	91.	11,628. 00.
20.	100. 00.	44.	129. 41.	68.	234. 58.	92.	20,350. 00.
21.	100. 98.	45.	130. 86.	69.	247. 30.	93.	40,700. 00.
22.	102. 03.	46.	132. 35.	70.	262. 58.	94.	81,400. 00.
23.	103. 00.	47.	134. 10.	71.	279. 72.	95.	"

Observations relatives à l'usage de la Table.

I. CETTE table fait connaître quel sera, après un temps donné, le revenu des actionnaires survivans. On suppose qu'une société soit formée d'un grand nombre de personnes d'un même âge, que chacune d'elles fournisse un capital portant 100 francs de rente, et qu'à la fin de chaque année le revenu commun doive être partagé entre les seuls actionnaires survivans. Le revenu de ces derniers augmentera d'une année à l'autre. La table montre le progrès annuel du revenu.

Par exemple, si l'âge des associés est vingt ans, le revenu primitif, qui était de 100 francs, sera de 110 francs 89 centimes à trente ans; il sera de 175 francs 80 cent. à soixante ans. Ceux qui parviendront à l'âge de soixante-dix ans auront 262 francs 58 centimes de revenu. Ceux qui atteindront l'âge de quatre-vingts ans auront 689 francs 83 centimes de revenu. Enfin ce revenu sera de 7400 francs pour ceux qui auront achevé leur quatre-vingt-dixième année.

II. Lorsque le revenu marqué dans la table, pour l'âge proposé, n'est pas 100 francs, comme cela avait lieu dans le cas précédent, on connaît l'augmentation de revenu en comparant le nombre qui répond à l'âge proposé, au nombre qui répond à un âge plus grand.

Par exemple, si l'âge des actionnaires, à l'origine de la société, était cinq ans, et que l'on voulût connaître combien il doit s'écouler de temps pour que le revenu fût doublé par l'effet des survivances, il faudrait, après avoir remarqué le nombre 85 francs 86 centimes qui répond à cinq ans, lire les nombres suivans, et continuer jusqu'à ce qu'on trouve un nombre double ou plus grand que le double de 85 francs 86 centimes, et l'on reconnaît qu'il doit s'écouler plus de cinquante-quatre ans avant que le revenu annuel soit doublé.

ceux des actionnaires qui parviendraient à l'âge de soixante ans, auraient doublé leur revenu. En général, si l'on suppose que l'âge des actionnaires, à l'origine de la société, a une valeur quelconque, par exemple, 15, et que l'on veuille connaître dans quel rapport le revenu sera augmenté après un certain temps, par exemple, après trente-cinq années, on cherchera le nombre qui répond à 15 + 35; et ce nombre étant 140 francs 10 centimes, on en conclut que le revenu, qui était à quinze ans 95 francs 99 centimes, sera 140 francs 10 centimes pour ceux des actionnaires qui parviendront à l'âge de cinquante ans; le revenu sera augmenté dans le rapport de 95 francs 99 centimes à 140 francs 10 centimes.

III. La partie de cette table qui se rapporte aux premiers âges (depuis la naissance jusqu'à cinq ans), est sujette à plusieurs causes d'incertitude. La même remarque s'applique à l'usage que l'on ferait de la table pour les âges très-avancés (ceux qui sont au-dessus de quatre-vingt-cinq ans); la partie moyenne de la table donne des résultats que l'on peut regarder comme constans.

Cette table est déduite de documens authentiques, c'est-à-dire qu'elle peut être vérifiée au moyen de pièces officielles qui constatent des faits positifs, et qui sont conservées dans les archives publiques; mais les observations ne sont point assez nombreuses et assez variées.

On possède aujourd'hui, en France et en Angleterre, des documens non moins certains et beaucoup plus multipliés. L'examen et la discussion de ces élémens donneront un jour des connaissances précieuses : mais ce travail, plus difficile qu'il ne paraît l'être, exige nécessairement une connaissance approfondie de l'analyse des probabilités; il ne peut être utile que s'il est fondé sur les principes de cette science.

Nouvelles Expériences électro-magnétiques, par M. AMPÈRE.

M. AMPÈRE a communiqué à l'Académie les principaux résultats auxquels il est parvenu en continuant ses recherches sur l'action des conducteurs voltaïques et des aimans, dont la découverte est due à M. Oersted; sur celle que deux conducteurs exercent l'un sur l'autre, et sur celle qui existe entre la terre et un conducteur, qu'il a observées le premier. Ces résultats sont de deux sortes. Les premiers se trouvent consignés dans un Mémoire lu à l'Académie au commencement de l'année dernière : ils sont relatifs à l'explication qu'il a donnée de ce genre d'action; explication fondée sur l'identité qu'il s'est proposé d'établir entre les fluides électriques et magnétiques, d'abord en comparant les effets qu'ils produisent, et ensuite en imitant tous les phénomènes que présentent les aimans, avec des fils conducteurs pliés en hélice. Nous avons rendu compte de ses recherches dans l'Analyse des travaux de l'Académie pendant l'année 1820; mais, dès le mois de janvier 1815, M. Ampère avait observé quelques différences entre la manière d'agir de ces hélices et des aimans. C'est en cherchant à rendre raison de ces différences que, dans un Mémoire lu dans les séances des 8 et 15 janvier, et qui contenait diverses tentatives pour soumettre au calcul les phénomènes électro-magnétiques, il examinait si l'on devait considérer les courans électriques qu'il admettait dans les aimans, comme étant concentriques à leurs axes, ou comme existant séparément autour de chacune de leurs particules; question qu'il laissait indécise, tout en convenant que cette dernière manière de concevoir ces courans lui paraissait présenter quelques probabilités de plus; et qu'il concluait, de la comparaison des effets qu'un aimant devait produire d'après sa théorie et de ceux qu'il produisait réellement, que les courans électriques,

auxquels il attribue ces effets, doivent être d'autant plus énergiques, qu'ils sont plus près du milieu de cet aimant, tandis que, dans un conducteur plié en hélice, ils ont nécessairement par-tout la même intensité (1).

Dans la suite de son Mémoire, M. Ampère a étendu cette considération au globe terrestre, et il en a conclu que les courans électriques, qu'on est naturellement porté à y admettre pour expliquer son action sur les aimans et les conducteurs voltaïques, et dont l'existence a depuis été regardée comme probable par MM. Oersted et H. Davy, doivent être d'autant plus énergiques qu'ils sont plus près de l'équateur.

Les autres résultats obtenus par M. Ampère consistent dans de nouvelles expériences, par lesquelles il a établi,

---

(1) La principale différence entre la manière d'agir d'un aimant et d'un conducteur voltaïque, dont une partie est roulée en hélice autour de l'autre, consiste en ce que les pôles du premier sont situés plus près du milieu de l'aimant que ses extrémités, tandis que les points qui présentent les mêmes propriétés dans l'hélice, sont exactement placés à ses extrémités. C'est ce qui doit arriver quand l'intensité des courans de l'aimant va en diminuant de son milieu vers ses extrémités. Mais M. Ampère a reconnu depuis une autre cause qui peut aussi déterminer cet effet. Après avoir conclu de ses nouvelles expériences, dont nous parlerons tout-à-l'heure, que les courans électriques d'un aimant doivent en effet exister autour de chacune de ses particules, il lui a été aisé de voir qu'on n'est pas obligé de supposer, comme il l'avait fait d'abord, que les plans de ces courans sont par-tout perpendiculaires à l'axe de l'aimant; leur action mutuelle doit tendre à donner à ces plans une situation inclinée à l'axe, sur-tout vers ses extrémités, en sorte que les pôles, au lieu d'y être exactement situés, comme ils devraient s'y trouver, d'après les calculs déduits des formules données par M. Ampère, lorsqu'on suppose tous les courans de même intensité et dans des plans perpendiculaires à l'axe, doivent se rapprocher du milieu de l'aimant d'une partie de sa longueur d'autant plus grande, que les plans d'un plus grand nombre de courans sont ainsi inclinés et qu'ils le sont davantage, c'est-à-dire, d'autant plus que l'aimant est plus épais relativement à sa longueur; ce qui est conforme à l'expérience. Dans les fils conducteurs pliés en hélice, et dont une partie revient par l'axe pour détruire l'effet de la partie des courans de chaque spire, qui agit comme s'ils étaient parallèles à l'axe, les deux circonstances qui, d'après ce que nous venons de dire, n'ont pas nécessairement lieu dans les aimans, existent au contraire nécessairement dans ces fils : aussi observe-t-on que les hélices ont des pôles semblables à ceux des aimans, mais placés exactement à leurs extrémités, comme le donne le calcul.

1.° Qu'un circuit fermé, placé très-près d'un faisceau de fils conducteurs, n'acquiert par l'influence de ces fils aucune propriété électro-magnétique sensible à l'aimant;

2.° Qu'on peut obtenir sans l'interposition du mercure (et par une disposition très-simple, d'où il résulte que la partie mobile du conducteur tourne dans l'eau acidulée nécessaire à l'action voltaïque) le mouvement toujours dans le même sens d'un fil conducteur; mouvement dont la découverte est due à M. Faraday, qui l'a obtenu en interposant du mercure dans le circuit pour en rendre une partie mobile, indépendamment de l'autre, condition nécessaire à la production d'un mouvement de rotation toujours dans le même sens;

3.° Qu'on peut produire sans aimant ce mouvement de rotation continue; d'abord, en substituant à l'aimant avec lequel on l'a d'abord obtenu, un fil conducteur plié en spirale autour du vase qui contient soit le mercure, soit l'eau acidulée où tourne le conducteur mobile; ensuite, en disposant l'appareil de manière que l'action de la terre suffise à la production du même mouvement;

4.° Qu'enfin on peut faire tourner sur lui-même autour de son axe, soit un aimant par l'action d'un fil conducteur, soit un fil conducteur par celle d'un aimant.

Ces diverses expériences, dont la première remonte au mois de juillet 1821, ont été communiquées à l'Académie par diverses notes que M. Ampère a lues dans les séances des 19 novembre, 3 et 10 décembre 1821, et 7 janvier 1822.

Tous ces faits, et d'autres aussi nombreux qu'intéressans, que plusieurs physiciens étrangers ont découverts depuis un an sur le même sujet, s'accordent tellement avec la théorie de M. Ampère, qu'ils auraient pu être prévus d'après cette théorie; ils auraient pu l'être également d'après d'autres considérations par lesquelles on a expliqué les mêmes faits : mais ce n'est qu'en les ramenant au phénomène général des attrac-

tions et répulsions des courans électriques, comme l'a fait M. Ampère, qu'on n'a à admettre que des forces dirigées suivant la ligne qui joint les deux points entre lesquels elles s'exercent. Toutes les autres explications données jusqu'à présent, qui peuvent rendre raison des faits observés, supposent des forces qui agissent dans des directions perpendiculaires à cette ligne; supposition que M. Ampère s'est spécialement proposé d'éviter, quand il a cherché à remonter aux causes des phénomènes électro-magnétiques.

Mémoire sur l'Intégration des Équations linéaires aux différences partielles, à coefficiens constans, et avec un dernier terme variable; par M. Augustin CAUCHY.

L'OBJET de ce Mémoire est de résoudre généralement la question suivante :

Étant proposée, entre la variable principale φ et les variables indépendantes

$$x, y, z, \ldots t,$$

une équation linéaire aux différences partielles et à coefficiens constans, avec un dernier terme fonction des variables indépendantes; intégrer cette équation de manière que les quantités

$$\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \text{\&c.},$$

se réduisent à des fonctions connues de $x, y, z, \ldots$ pour $t = 0$.

La solution générale de cette question peut se déduire d'une formule qui, donnée pour la première fois par M. Fourier dans le Mémoire sur la chaleur, a depuis été appliquée à d'autres problèmes, et en particulier, par MM. Poisson et Cauchy, à la théorie des ondes. Cette formule, étendue à un

nombre n de variables $x, y, z, \ldots$ sert à remplacer une fonction quelconque de ces variables par une intégrale multiple, dans laquelle $x, y, z \ldots$ ne se trouvent plus que sous les signes *sin* ou *cos*. M. Cauchy observe que, pour rendre plus faciles les applications de cette formule, il convient de la modifier un peu, et de l'écrire ainsi qu'il suit :

$$(1) \qquad f(x, y, z \ldots) =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \iiint \ldots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\, e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots f(\mu, \nu, \varpi \ldots)\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots,$$

les intégrations relatives à α, β, $\gamma \ldots$ étant effectuées entre les limites $-\infty$, $+\infty$, et celles qui se rapportent à $\mu, \nu, \varpi \ldots$ entre des limites quelconques μ_0, μ_1 ; ν_0, ν_1 ; ϖ_0, ϖ_1 ; &c., pourvu que ces limites comprennent les valeurs attribuées à $x, y, z \ldots$ Si la fonction $f(\mu, \nu, \varpi \ldots\ldots)$ était telle, que, dans l'équation (1), la valeur du second membre parût indéterminée, on ferait aisément cesser cette indétermination en multipliant la fonction dont il s'agit par une expression de la forme

$$(2) \qquad \frac{\psi(k\alpha, k'\beta, k''\gamma \ldots)}{\psi(0, 0, 0 \ldots\ldots)}$$

convenablement choisie, et supposant qu'après les intégrations effectuées, les nombres $k, k', k'' \ldots$ se réduisent à zéro. On peut même, à l'aide de cette seule considération, établir directement la formule (1). Dans un grand nombre de cas, il suffira de prendre pour la fonction (2) l'expression très-simple

$$(3) \qquad e^{-(k\alpha)^2 - (k'\beta)^2 - (k''\gamma)^2 - \ldots};$$

ou même celle qu'on en déduit en posant $k = k' = k'' = \&c.$, savoir :

$$(4) \qquad e^{-k^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \ldots)},$$

ou bien encore

$$(5) \qquad e^{-k\sqrt{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\ldots)}},$$

&c.....

En s'appuyant sur les principes qu'on vient d'énoncer, M. Cauchy fait dépendre l'intégration d'une équation linéaire aux différences partielles et à coefficiens constans, mais sans dernier terme, entre la fonction φ et les $n+1$ variables indépendantes $x, y, z \ldots\ldots t$, de la résolution de l'équation algébrique

$$(6) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta) = 0,$$

$F(\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta)$ étant ce que devient le premier membre de l'équation linéaire donnée, quand on y remplace φ par 1, $\frac{d\varphi}{dx}$ par $\alpha\sqrt{-1}$, $\frac{d\varphi}{dy}$ par $\beta\sqrt{-1}$, &c..., et généralement

$$\frac{d^{p+q+r+\ldots+s}\varphi}{dx^p\, dy^q\, dz^r \ldots dt^s}$$

par

$$(\alpha\sqrt{-1})^p (\beta\sqrt{-1})^q (\gamma\sqrt{-1})^r \ldots (\theta\sqrt{-1})^s.$$

Si l'équation donnée renfermait un second membre variable, représenté par $\mathcal{F}(x, y, z \ldots t)$, pour ramener ce nouveau cas au précédent, il suffirait de connaître une valeur particulière de φ, propre à vérifier la proposée. Or on obtiendra évidemment une semblable valeur, si l'on prend

$$(7) \qquad \varphi =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n+1} \iiint \ldots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\, e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}} \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots e^{\theta(t-\tau)\sqrt{-1}}\, \frac{\mathcal{F}(\mu, \nu, \ldots \tau)}{F(\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta)}\, d\alpha\, d\mu\, d\beta\, d\nu\, d\gamma\, d\varpi \ldots d\theta\, d\tau,$$

les variables $\alpha, \beta, \gamma \ldots \theta$ étant considérées comme indépendantes.

Après avoir indiqué la méthode employée par M. Cauchy,

nous allons faire connaître la forme sous laquelle il a obtenu la valeur de φ, pour une classe très-étendue d'équations linéaires aux différences partielles et à coefficiens constans. Cette classe, à laquelle se rapportent les problèmes du son, de la chaleur, des cordes vibrantes, des ondes, des plaques élastiques, &c...., se compose des équations qui ne renferment qu'une seule des dérivées de φ, relatives à t. Concevons, pour fixer les idées, que $\frac{d^m\varphi}{dt^m}$ soit la dérivée dont il s'agit, et que l'équation donnée n'ait pas de dernier terme indépendant de φ. Désignons par $f_0(x,y,z\ldots)$, $f_1(x,y,z\ldots)$, $f_2(x,y,z\ldots)$, &c. $f_{m-1}(x,y,z\ldots)$, les fonctions de $x, y, z,\ldots$, auxquelles

$$\varphi, \quad \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \&c.\ldots \quad \frac{d^{m-1}\varphi}{dt^{m-1}},$$

doivent respectivement se réduire pour $t=0$. Enfin représentons par

$$1, a, b, c \ldots . h$$

les racines de l'unité du degré m. Si, en supposant la valeur de θ tirée de l'équation (6), et les intégrations relatives aux variables $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ effectuées entre les limites $-\infty$, $+\infty$, on fait, pour abréger,

$$(8)\begin{cases} T=\frac{1}{m}\left(e^{\theta t\sqrt{-1}}+e^{a\theta t\sqrt{-1}}+e^{b\theta t\sqrt{-1}}+\ldots+e^{h\theta t\sqrt{-1}}\right) \\ P=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n\int\int\int\ldots e^{\alpha(x-\mu)\sqrt{-1}}\, e^{\beta(y-\nu)\sqrt{-1}}\, e^{\gamma(z-\varpi)\sqrt{-1}}\ldots T\,d\alpha\, d\beta\, d\gamma\ldots \end{cases}$$

la valeur de φ sera déterminée par la formule

$$(9)\quad \varphi=\int\int\int\ldots Pf_0(\mu,\nu,\varpi\ldots)\,d\mu\, d\nu\, d\varpi\ldots$$
$$+\int dt\int\int\int\ldots Pf_1(\mu,\nu,\varpi\ldots)\,d\mu\, d\nu\, d\varpi\ldots$$
$$+\ \&c.\ldots$$
$$+\int^{m-1} dt^{m-1}\int\int\int\ldots Pf_{m-1}(\mu,\nu,\varpi\ldots)\,d\mu\, d\nu\, d\varpi\ldots$$

les intégrations relatives à μ, ν, ϖ.... étant faites entre des limites qui comprennent les valeurs attribuées à x, y, z...., et l'intégration relative à t, à partir de $t=0$. S'il arrive que l'équation (6) donne pour θ une fonction paire des variables α, β, γ..., la valeur de P deviendra

(10) $$P= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int \ldots T \cos\alpha(\mu-x).\cos\beta(\nu-y).\cos\gamma(\varpi-z)\, ..d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots$$

Dans cette hypothèse, on trouvera en particulier, pour $m=1$,

(11) $$P= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int\int \ldots e^{\theta t\sqrt{-1}} \cos\alpha(\mu-x).\cos\beta(\nu-y).\cos\gamma(\varpi-z)\ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots;$$

pour $m=2$,

(12) $$P= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int\int \ldots \frac{e^{\theta t\sqrt{-1}}+e^{-\theta t\sqrt{-1}}}{2} \cos\alpha\,(\mu-x).\cos\beta\,(\nu-y)\ldots d\alpha\, d\beta\, d\gamma \ldots;$$

&c.....

Nous allons maintenant présenter quelques-unes des applications les plus importantes des formules (11) et (12); et nous retrouverons ainsi les résultats contenus dans les divers Mémoires des auteurs déjà cités.

La loi suivant laquelle la chaleur se distribue dans un corps solide, dépend de l'équation

(13) $$\frac{d\varphi}{dt} = a\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right),$$

dans laquelle a désigne une constante positive. En partant de cette équation, on trouve que la formule (6) se réduit à

(14) $$\theta\sqrt{-1} = -a(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$$

Si l'on substitue la valeur précédente de $\theta\sqrt{-1}$ dans la formule (11), et que l'on effectue les intégrations relatives à α, β, γ...., on aura

$$(15) \qquad P = \frac{1}{2^3 (a\pi)^{\frac{3}{2}}} t^{-\frac{3}{2}} . e^{-\frac{(\mu-x)^2+(\nu-y)^2+(\varpi-z)^2}{4at}}.$$

En adoptant cette valeur de P, on trouvera pour l'intégrale de l'équation (13)

$$(16) \qquad \varphi = \iiint P f_0 (\mu, \nu, \varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi.$$

Les petites vibrations des plaques sonores, homogènes, et d'une épaisseur constante, se rapportent à l'équation

$$(17) \qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + b^2 \left(\frac{d^4\varphi}{dx^4} + 2\, \frac{d^4\varphi}{dx^2\, dy^2} + \frac{d^4\varphi}{dy^4} \right) = 0,$$

dans laquelle b^2 désigne une constante positive, et φ une ordonnée de surface courbe. Si l'on prend cette équation pour exemple, la formule (6) deviendra

$$(18) \qquad \theta^2 - b^2 (\alpha^2 + 6^2)^2 = 0.$$

Par suite, on pourra prendre

$$\theta = b(\alpha^2 + 6^2),$$

et l'on tirera de la formule (12)

$$P = \frac{1}{4\pi^2} \iint \cos (\alpha^2 + 6^2) bt . \cos \alpha (\mu - x) . \cos 6 (\nu - y) . d\alpha\, d6,$$

puis, en effectuant les intégrations,

$$(19) \qquad P = \frac{1}{4\pi bt} \sin \frac{(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2}{4bt}.$$

En adoptant cette dernière valeur de P, on trouvera pour l'intégrale de l'équation (17)

$$(20) \qquad \varphi = \iint P f_0 (\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu + \int dt \iint P f_1 (\mu, \nu)\, d\mu\, d\nu.$$

Considérons encore l'équation aux différences partielles, qui sert à déterminer le mouvement des fluides élastiques, savoir :

(21) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).$$

En prenant cette équation pour exemple, on aura

(22) $$\theta^2 = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2),$$

et par suite

(23) $$P = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint \cos(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}} at . \cos\alpha(\mu-x) . \cos\beta(\nu-y) . \cos\gamma(\varpi-z) d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Cela posé, la fonction φ sera donnée par la formule

(24) $$\varphi = \iiint P f_0(\mu,\nu,\varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi + \int dt \iiint P f_1(\mu,\nu,\varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi.$$

Il est facile de s'assurer que la valeur précédente de φ se présente sous une forme indéterminée. Mais l'indétermination cessera, si l'on a recours à l'artifice de calcul indiqué au commencement de cette note, et que dans la formule (23) on multiplie la fonction placée sous les signes $\iiint$ par l'expression (5), dans laquelle la lettre k désigne une quantité infiniment petite. Alors, en effectuant les intégrations relatives aux variables α, β, γ, et faisant, pour abréger,

(25) $$r = [(\mu - x)^2 + (\nu - y)^2 + (\varpi - z)^2]^{\frac{1}{2}},$$

(26) $$Q = \frac{1}{4a\pi^2 r}\left[\frac{k}{k^2+(r-at)^2} - \frac{k}{k^2+(r+at)^2}\right],$$

on trouvera

(27) $$P = \frac{dQ}{dt}.$$

Si l'on substitue cette dernière valeur de P dans la formule (24), ou, ce qui revient au même, si l'on substitue la valeur de Q dans l'équation

(28) $$\varphi = \frac{d}{dt}\iiint Q f_0(\mu,\nu,\varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi + \iiint Q f_1(\mu,\nu,\varpi)\, d\mu\, d\nu\, d\varpi;$$

puis, que l'on remplace les trois variables μ, ν, ϖ, considérées comme représentant des coordonnées rectangulaires par trois coordonnées polaires, dont l'une soit précisément la variable r, l'intégration relative à cette variable pourra s'effectuer. En même temps, la quantité infiniment petite désignée par k disparaîtra du calcul, et l'on obtiendra pour valeur définitive de la fonction φ, celle que M. Poisson a donnée dans un Mémoire lu à l'Académie le 19 juillet 1819.

Nous terminerons cette note en observant que, si l'on développe en séries les intégrales formées par les méthodes précédentes, on obtiendra précisément les résultats présentés par M. Brisson dans le quatorzième cahier du *Journal de l'École polytechnique.*

OUVRAGES IMPRIMÉS.

Sur les Variations des Élémens du Mouvement elliptique, et sur les Inégalités lunaires à longue période, par M. LAPLACE.

Sur la Détermination des Orbites des Comètes, par M. LAPLACE; *avec un exemple calculé par M.* BOUVARD.

Sur l'Attraction des Sphères et la Répulsion des Fluides élastiques, par M. LAPLACE.

CES différens Mémoires, composés presque en entier de formules, sont peu susceptibles d'extrait, et nous renverrons à la *Connaissance des temps*, année 1821, où ils ont été réunis.

On y trouvera de même un Mémoire de M. Burckhardt.

Sur le moyen Mouvement de la Lune, et sur l'Équation à longue période.

CES recherches ont constaté que le moyen mouvement ne peut suffire seul pour satisfaire aux observations; que l'inégalité à longue période, actuellement employée, explique les irrégularités observées, mais que bien d'autres équations y satisferaient de même.

Tables de Jupiter, Saturne et Uranus, d'après la théorie de la Mécanique céleste, dédiées à M. le Marquis Laplace, *par M.* BOUVARD.

PEU de temps après la première édition des *Tables de Jupiter et de Saturne* par le même astronome, M. Laplace reconnut une erreur de signe dans une équation du cinquième ordre. M. Bouvard sentit la nécessité de recommencer tout son travail. Il s'était borné d'abord aux oppositions observées depuis 1747 jusqu'en 1804. Maintenant il a pu aller jusqu'à celle de 1814. (Pour les tables publiées en 1789, on avait été obligé de s'arrêter à 1787.) En outre, les masses des trois planètes avaient éprouvé des modifications. Elles étaient devenues : Jupiter $\frac{1}{1070,5}$, Saturne $\frac{1}{3512}$, Uranus $\frac{1}{17915}$.

Pour Uranus, les observations se partagent en deux séries: celles dans lesquelles la planète avait été observée par hasard, et comme une étoile fixe, et celles qui sont incontestablement de la planète. On avait fait la même chose pour les tables envoyées à l'Académie en 1789 et 1790, pour ces trois mêmes planètes. En se bornant aux observations depuis 1747 jusqu'en 1787, les observations se représentaient avec la précision des observations mêmes. Mais on avait des erreurs qui passaient 30″, si l'on faisait usage des observations plus

anciennes, à commencer de Flamsteed. Il avait paru peu sûr de se borner aux oppositions de quarante années, et l'on s'était rendu moins exigeant du côté de la précision. Quant à Uranus, on avait réuni, d'une part, toutes les observations depuis 1781 jusqu'à 1789, et elles étaient parfaitement représentées. On n'avait alors qu'une observation de Flamsteed, en 1690; une observation de Mayer, en 1756; et deux de Lemonnier, en 1769 : elles allaient moins bien. Mais, par divers essais, on était parvenu à représenter à + 4" l'observation de 1690, à + 10" celle de 1756, enfin à — 24" près les observations de 1769. Soixante-quinze observations faites depuis 1781 jusqu'en 1789 étaient satisfaites à 4 ou 5" près, sauf deux observations moins sûres, où l'erreur paraissait de 8". Dans le Mémoire couronné alors par l'Académie, l'auteur disait : « Quelque satisfaisant que puisse paraître cet accord, on » n'ose se flatter que les tables n'aient pas besoin d'améliora- » tions dans quelques années. » Cet accord s'est soutenu le même, à fort peu près, pendant quinze ou vingt ans. Depuis dix ou douze ans, il diminuait progressivement, et enfin les erreurs montaient à une minute. Il devenait donc indispensable de refaire les tables d'Uranus. La peine qu'on avait eue à représenter passablement l'observation de Mayer, avait fait concevoir quelque doute sur cette observation unique, isolée, et faite au dernier fil de la lunette. On avait cherché à imaginer toutes les causes qui pouvaient disculper le célèbre observateur. Ces doutes et ces conjectures ont été traités par un critique comme autant de blasphèmes, et comme un manque de respect pour la mémoire d'un grand homme. Avec trente-deux années de plus d'observations, M. Bouvard avait le droit de se montrer plus confiant et plus hardi. Ne pouvant représenter exactement les observations anciennes, il a osé les rejeter toutes comme suspectes; et, se bornant à celles qui sont bien incontestablement d'Uranus, il les représente toutes

à 5 ou 6" près, comme avait fait le premier auteur pour les huit années dont il pouvait répondre. Mais il n'a pas été plus heureux pour les observations anciennes. Ainsi, pour l'observation de 1690, ses tables se trouvent en excès de 41", et cet excès n'était que de 4" dans les anciennes tables. En 1756, l'excès est de 63"; il n'était que de 10". En 1769, l'excès est — 31" au lieu de — 24". Il faut donc se résoudre, quoi qu'on ait dit, à supposer qu'il a pu se glisser quelque erreur dans l'observation de Mayer, ainsi que dans celles qu'on a depuis trouvées dans les recueils de Flamsteed, Bradley et Lemonnier. Depuis que la planète est connue, elle n'a pas encore décrit sous nos yeux la moitié de son orbite. On ne peut se flatter encore que la théorie en soit parfaitement déterminée : elle pourra l'être beaucoup mieux dans quarante ou cinquante ans. On peut espérer du moins que jusque-là les erreurs des tables ne monteront pas à une minute; car, en choisissant les deux observations les plus suspectes parmi celles qu'on a rejetées, la variation dans les erreurs ne passera guère 2 minutes, et la justice veut qu'on en attribue la moitié aux observations, si l'on rejette l'autre moitié sur les imperfections de la théorie actuelle. Heureusement cette précision est plus que suffisante pour une petite planète, qui n'a guère à nos yeux d'autre mérite que la confirmation inattendue qu'elle nous a fournie des principes de l'astronomie moderne.

Recherches sur les Zodiaques égyptiens, par M. LATREILLE.

Nous avons hautement exprimé notre opinion, ou plutôt nos doutes, sur ces zodiaques, dans un rapport dont un extrait se trouve dans notre *Analyse des travaux de 1820*; et qui a depuis été publié en entier par M. de Paravey, à la suite de son *Aperçu sur l'origine de la sphère et sur ces mêmes zodiaques.* Les nouvelles recherches de M. Latreille, comme celles de

M. de Paravey, ont pour fondement des connaissances qui nous sont trop étrangères, pour que nous hasardions d'en faire une analyse exacte. Nous nous bornerons à ce qui peut, jusqu'à un certain point, être soumis au calcul astronomique. Suivant M. Latreille, ces zodiaques sont des tableaux hiéroglyphiques, religieux, historiques, civils, et disposés dans un ordre astronomique; ils offrent des faits relatifs aux saisons, des levers et couchers acronyques des constellations principales, et la marche annuelle du soleil. Il distingue deux sortes d'astronomie : l'une naturelle, et l'autre mathématique. Celle-ci commencerait à l'époque de Nabonassar. L'astronomie antérieure revendiquerait les zodiaques d'Esné ; ceux de Denderah seraient le partage de la seconde. Les étoiles de première grandeur, formant des espèces de jalons, durent, dans l'enfance de l'astronomie, fixer presque exclusivement l'attention de l'observateur. Fomalhaut est la seule qui ait pu se trouver alors dans le voisinage du colure du solstice d'hiver, et ce premier fait daterait de 3450 ans avant notre ère. Plusieurs siècles après, réunie à quelques autres étoiles, elle forma le poisson austral, dans lequel l'auteur voit le fameux poisson Oannès. Le dessin primitif du capricorne était un phoque; depuis on en remplaça la partie antérieure par celle d'un bouc ou d'une gazelle. Ce phoque se voit sur le zodiaque d'Esné. De ces remarques et de plusieurs autres semblables, il résulterait que les observations, base du zodiaque primitif, seraient antédiluviennes. Les 1460 ans de la période sothiaque ne produisent qu'un avancement de 16° 18′ sur l'ascension droite de Sirius; il a fallu une longue série d'observations pour que l'on pût fonder la période de ce mouvement. Censorin a considéré l'an 1322 avant notre ère comme le premier d'une de ces périodes. Le premier du cycle précédent remonterait à l'an 2782. Les zodiaques d'Esné n'offrent aucune constellation australe qui fût exclusivement visible sous

des parallèles inférieurs, à 35°. de latitude nord. Rien n'y indique Canopus, quoique cette étoile soit visible dans la haute Égypte. Les brahmines confessent avoir reçu leurs connaissances astronomiques des parties de la Perse entre 30 et 35°. de latitude. Les observations les plus anciennes nous ramènent toutes à cet état du ciel où Aldébaran, Antarès, Régulus et Fomalhaut étaient voisines des équinoxes et des solstices, c'est-à-dire, au XXVIIIe siècle avant notre ère. Le déluge de Noé doit être de la même époque, et la fondation de l'empire d'Égypte s'en éloignera peu. Wéga, au zénith, en ce temps, suppose une latitude de 34° 45′ nord. C'est celle de l'ancienne ville d'Hérat. Le Ségistan aura été le berceau de cette race caucasique dont nous sommes les descendans. Ces contrées seront la Chaldée des temps antédiluviens. Les Babyloniens et les Égyptiens seront compris sous la dénomination collective de *Chaldéens*. Abandonnant la route suivie jusqu'à ce jour pour découvrir l'antiquité du zodiaque, l'auteur dirige toute son attention sur les signes symboliques, dans l'espérance que leur étude comparative, lui permettant d'en saisir l'esprit, le conduira au même but. Plusieurs de ces figures, quoique essentiellement identiques, offrent dans leurs accessoires des différences préméditées, qu'il appelle *des signes de rappel*, et dont il expose les principaux. La cosmogonie des Perses, la même que celle des Égyptiens, fait naître la plupart des animaux de deux taureaux. Il les voit, l'un dans le belier, et le second dans le taureau actuel. Les mois qui répondent à ces deux signes ont été désignés par les Chaldéens, les Juifs et les Arabes, sous les noms (adar 1, adar 2; rabi 1, rabi 2) 1.er et 2.e taureau, 1.er et 2.e printemps.

Des cercles synodiques formèrent, lorsque l'astronomie fut plus perfectionnée, un dernier signe indiquant des observations célestes : aussi n'affecte-t-il que les zodiaques de Denderah, tous postérieurs à l'ère de Nabonassar. L'un de ces

signalemens indique la période sothiaque; tous les autres sont relatifs aux points équinoxiaux. Les zodiaques d'Esné n'offrent aucune figure que l'on puisse rapporter au grand chien; l'auteur en conclut que la période sothiaque ne remonte point à 2782, ainsi que Fréret l'avait avancé par erreur. La figure d'un chien ayant les membres d'un singe, placée dans un bateau, dans le zodiaque de Denderah, indique le coucher de Sirius. L'étoile avait alors 70° 32′ d'ascension droite; elle cessait d'être visible le 10 mai, et annonçait un accroissement du Nil assez sensible. Le lieu des poissons dans le zodiaque de Denderah est dans une situation inverse de celle qu'il présente sur les zodiaques d'Esné. A l'époque de la construction des zodiaques de Denderah, la première étoile de ce signe était fort rapprochée de l'équinoxe du printemps. Son lever annonçait que le Nil avait atteint sa plus grande hauteur. Sur le zodiaque d'Esné, les deux poissons sont au-dessous de l'équateur. L'emploi de ces données a fourni les moyens de déterminer l'âge de ces monumens d'une manière approximative; car on sent bien que ces sortes d'inscriptions ne sont point susceptibles d'une précision mathématique. Ainsi le zodiaque du portique du grand temple d'Esné aurait été construit vers l'an 2550 avant l'ère chrétienne; le zodiaque du temple au nord d'Esné, vers 1760; le zodiaque du portique du grand temple de Denderah, vers 670; et le zodiaque circulaire, vers l'an 550 avant notre ère. La troisième section indique l'ordre et les significations des différentes figures qu'on voit dans ces zodiaques.

« Tracer une route nouvelle qui pût conduire à une expli-
» cation si long-temps et si vainement tentée, a été mon
» unique but (dit l'auteur en finissant). Si l'on goûte mes
» idées, il sera facile de les suivre, d'en faire cette applica-
» tion, et de donner enfin sur la mythologie un travail qui
» la réconcilie avec l'histoire et la raison. »

Précis de l'Histoire de l'Astronomie, par M. le Marquis DE LAPLACE; *Paris*, 1821.

CE précis forme le livre v de la cinquième édition de l'*Exposition du système du monde*, actuellement sous presse. Comme il peut intéresser un plus grand nombre de lecteurs que l'ouvrage lui-même, on a pensé qu'il serait utile de le publier séparément.

Histoire de l'Astronomie moderne; par M. DELAMBRE.

NOUS devons aux Grecs les vérités et les erreurs qui ont régné quatorze cents ans dans les écoles. Examen fait, il ne reste en propre aux Indiens que leur arithmétique, vers laquelle Archimède et Apollonius ont fait quelques pas sans pouvoir y atteindre. Les Chinois ne peuvent nous parler que de leurs gnomons, de quelques ombres solsticiales ou équinoxiales, sans qu'il soit bien clairement prouvé que ces gnomons soient plus anciens que celui de Pythéas. Quant aux ombres des temps intermédiaires, jamais les Chinois n'ont su les calculer. Nous ne devons aux Chaldéens que quelques éclipses, les douze signes du zodiaque et l'astrologie. Pour les Égyptiens, sauf quelques levers héliaques qui ne nous ont pas été transmis, et l'année de 365 $\frac{1}{4}$ jours, si nouvelle chez eux, on ne voit pas de quoi ils pourraient se vanter. Platon conseille aux astronomes d'appliquer la géométrie à l'explication des phénomènes, et l'on voit naître les homocentriques, remplacés bientôt après par les excentriques ou les épicycles. Aristote, au contraire, proscrit la géométrie; il prétend que le mouvement circulaire est naturel aux corps célestes, comme le mouvement rectiligne aux corps sublunaires, parmi lesquels il range les comètes. Hipparque invente la trigonométrie; il

l'applique au calcul des phénomènes, aux excentriques, aux épicycles; il voit que l'une des deux hypothèses suffit pour le soleil, mais non pour la lune ni pour les planètes, et que, pour ces dernières, il faudra combiner ces deux cercles. Mais les observations lui manquent; il en amasse pour ses successeurs. Ptolémée profite de cette idée et de ces travaux. A l'excentrique d'Hipparque pour la lune, il ajoute un épicycle qui lui sert à expliquer une inégalité considérable qui se manifeste sur-tout dans les quadratures. D'après deux observations d'Hipparque dans les octans, il imagine sa *prosneuse*, ou le point constant vers lequel se dirige la ligne de l'apogée de son épicycle, et il n'aperçoit pas une troisième inégalité, qui pourtant est la plus sensible dans ces octans. Sa théorie, heureuse à quelques égards, lui donne des parallaxes excessives et des variations dans les diamètres qui n'échapperaient pas aux yeux les plus inattentifs; il dissimule ces défauts, et personne ne les remarque. Il donne trois centres différens au mouvement des planètes, il partage en deux parts égales l'excentricité, et par ces suppositions, qu'il ne démontre pas, il parvient à représenter trois observations de chaque planète. Il donne sa théorie comme générale, et elle est adoptée sans réclamation. Il imagine pour les latitudes une hypothèse compliquée, incohérente, inintelligible; il n'en donne aucune preuve, il y déroge lui-même, et il est écouté comme un oracle.

Il était tout simple que les premiers observateurs plaçassent la terre au centre de l'univers; quelques pythagoriciens y placent le soleil, par l'unique raison que quand une doctrine est généralement répandue, celui qui veut faire secte doit professer une doctrine contraire. On dispute long-temps sans rien prouver de part ni d'autre; les astronomes n'interviennent pas dans ces disputes de l'école, et la terre, chez eux, demeure immobile au centre de tous les mouvemens. Les Arabes surviennent; ils apportent au calcul trigonométrique d'Hipparque

des simplifications heureuses; mais, quoique leurs observations leur aient prouvé le besoin de nouvelles tables, en changeant quelques nombres ils respectent les hypothèses inexactes de Ptolémée. Les comètes continuent d'être étrangères à l'astronomie.

Tel a été l'état de la science jusqu'à Copernic. Ce réformateur, doué d'un génie plus indépendant, examine en géomètre l'idée qui divisait les philosophes grecs, cette hypothèse pythagoricienne, qui n'était étayée que de quelques argumens métaphysiques les plus insignifians; qu'Aristarque avait *préférée*, nous dit Archimède, et que Séleucus, au rapport de Plutarque, avait *démontrée*, au lieu qu'Aristarque n'avait fait que la *supposer*. Mais cette démonstration ne nous est point parvenue. Copernic s'est vu obligé de tirer tout de son propre fonds. Il donne une explication complète des mouvemens diurnes et annuels; il y joint même celle de la précession des équinoxes, admise comme un fait depuis Hipparque, et dont personne n'avait songé à donner même le mécanisme. Il développe l'ordre des corps célestes et les variétés apparentes de leurs mouvemens. Il établit l'astronomie sur sa base véritable. Ptolémée n'était pas l'auteur du système qui porte aujourd'hui son nom. Le système moderne est bien la propriété de Copernic, du moins pour nous, qui n'avons aucune connaissance des raisons alléguées par Séleucus. Effrayé lui-même du pas qu'il vient de faire, Copernic ne cherche pas à tirer les conséquences qui découlent de son idée; il ne sent lui-même ni toute la beauté ni toute la simplicité de son système: content d'avoir corrigé les parallaxes et les diamètres lunaires de Ptolémée, il laisse subsister tous les embarras du système ancien, et même la théorie si bizarre des latitudes de planètes. Redoutant la persécution des théologiens, il veut du moins attirer les astronomes dans son parti, en se hâtant de leur prouver que toutes leurs méthodes subsistent,

ou n'éprouvent que de très-légers changemens. Tout occupé de spéculations, il n'a que peu de goût pour les observations et les calculs.

Tycho vient à son tour : il fait les observations qui manquaient à Copernic; il compose un nouveau catalogue d'étoiles, de meilleures tables du soleil et de la lune. Il donne à la lune cette équation des octans qui avait échappé à Ptolémée; il en indique même une quatrième dont il n'a pas une idée bien nette. Ambitionnant le titre d'auteur d'un troisième système, il ne voit pas que tout ce qu'il y met de bon appartient à Copernic. Heureusement il laisse à son successeur Kepler de quoi renverser l'édifice qu'il vient de construire.

Kepler, admirateur enthousiaste de Copernic, brûle de se signaler par quelque découverte qui mette le vrai système à l'abri de toute chicane. Il s'égare quelque temps dans des considérations pythagoriciennes de nombres, de figures et d'harmonies. Copernic avait placé le soleil dans l'intérieur de toutes les orbites : mais il n'en faisait pas le centre de ces orbites, ni le régulateur des mouvemens ; le soleil n'était qu'un fanal ou un brasier placé vers le milieu de l'édifice pour en éclairer ou échauffer toutes les parties. Kepler en fait le centre universel et la source de toute action ; c'est au soleil qu'il rapporte toutes les distances, tous les mouvemens angulaires ; c'est par ce centre qu'il fait passer les intersections des orbites, et nous donne ainsi la vraie théorie des mouvemens géocentriques de toutes les planètes, et trouve des théorèmes nouveaux pour déterminer les inclinaisons. Copernic avait débarrassé les planètes de ces épicycles que Ptolémée avait été forcé d'imaginer pour suppléer au mouvement qu'il refusait à la terre; l'excentrique devait suffire pour représenter les mouvemens inégaux ; et cependant Kepler ne peut faire accorder cet excentrique avec les observations de Mars, qu'il combine et calcule par les moyens les plus ingénieux et

les plus nouveaux ; il est conduit à croire que l'orbite de la planète est *ovale* : il explique clairement ce qu'il entend par cet *ovale*, il dit en quoi il diffère d'une ellipse ; et cependant Lalande et Bailly, qui nous ont donné d'amples extraits du livre de Kepler, ne font pas la moindre attention à cette différence ; ils se persuadent que Kepler a complété la découverte des orbites elliptiques. Kepler était d'un avis bien différent : préoccupé de sa théorie et de ses causes physiques, il s'obstine à rejeter l'ellipse, et à calculer son *ovale* et son excentrique pour les comparer. Son ovale lui donne des rayons vecteurs trop petits ; l'excentrique les donnait trop grands ; il s'aperçoit qu'en projetant orthographiquement ses rayons vecteurs excentriques sur un plan incliné, ils satisferont exactement aux observations, et dès ce moment il adopte l'ellipse en déplorant son long aveuglement. Il concevait fort clairement l'ellipse comme projection d'un cercle dont toutes les ordonnées deviennent celles de l'ellipse, quand on les a multipliées par le cosinus de l'inclinaison, qui est la même pour toutes ces ordonnées. Il trouve un peu moins simple de considérer cette ellipse comme formée par la projection de tous les rayons vecteurs de l'excentrique, parce que l'inclinaison est différente pour chacun de ces rayons. Il voit pourtant que ce doit être la même chose ; mais cette ellipse ne lui offre d'abord aucune quantité qui croisse comme le temps, ou comme les angles au centre de l'équant de Ptolémée : il ne voit aucun moyen de calculer la position apparente d'après la position moyenne ; il ne lui reste que des angles inégaux au foyer où il place le soleil. Pour lever cette nouvelle difficulté, il remarque que tous les grands rayons vecteurs de l'ellipse appartiennent à la partie où le mouvement est le plus lent ; et les plus courts, à la partie où le mouvement est le plus rapide : il essaie de prendre pour la partie proportionnelle au temps la somme des rayons vecteurs depuis l'apside ; mais ce procédé est trop

pénible. L'idée lui vient de placer la proportionnalité dans les aires formées par les rayons vecteurs; l'aire la plus grande appartiendra au temps le plus long, une aire plus petite à un temps plus court : mais ce n'est encore qu'un soupçon ou qu'une probabilité, une ressemblance avec ce qui lui était démontré pour les orbites rectilignes qu'il donnait aux comètes. Il calcule rigoureusement l'aire d'un jour dans les apsides et dans les moyennes distances: il les trouve parfaitement égales, il est pleinement rassuré. Il proclame ses deux lois, celle de l'ellipticité des orbites et celle des aires. Il les prend pour bases, et en tire la solution, indirecte à la vérité, du problème qui porte son nom. Il dit pourquoi la solution directe est impossible, et nous apprend à nous en passer. Il venait de donner la théorie de chaque planète en particulier; mais pour l'ensemble il n'avait pas renoncé à ses idées de rapports et d'harmonies. Il cherche une relation entre les révolutions et les distances; il multiplie les essais infructueux, y revient à plusieurs reprises; et, au bout de dix-sept ans, il parvient à sa troisième loi, que les carrés des temps sont comme les cubes des distances, et par-là tout est lié dans le système solaire. Dans son livre sur Mars, il avait posé le principe de l'attraction universelle, il en avait développé quelques conséquences; mais, égaré par une physique trop peu sûre, il s'était mépris sur la loi du décroissement de l'attraction. Newton, en rétablissant la loi véritable en raison du carré des distances, a prouvé depuis que ce principe sert à démontrer la troisième et la première loi de Kepler; quant à la seconde, il en donne une démonstration particulière, plus simple et plus générale que celle dont Kepler lui-même n'était pas très-satisfait. Dans son *Optique*, Kepler donne la première idée de la lunette astronomique à deux verres convexes; il enseigne à déterminer la différence des méridiens par les éclipses de soleil; il considère ces éclipses comme des

éclipses de terre. Il résout graphiquement le problème des diverses phases dans ces mêmes éclipses; et cette invention, quatre-vingts et cent ans plus tard, a été donnée comme nouvelle par Wren, Halley, Flamsteed et Cassini. Dans sa *Logarithmotechnie*, il démontre avec plus de détails l'admirable invention de Neper; il donne à sa table une forme nouvelle, dont les usages sont plus variés, plus étendus, mais aussi moins commodes à quelques égards. A cette occasion, l'historien expose les moyens simples autant qu'ingénieux que Neper a imaginés pour construire avec facilité une table qui paraissait exiger des calculs immenses. Il explique la nature de ces logarithmes primitifs, dont on ne fait plus aucun usage, et qu'on ne doit pas confondre avec les logarithmes qu'aujourd'hui l'on appelle *hyperboliques*.

Le système de Copernic avait reçu des mains de Kepler les améliorations les plus importantes. Galilée, qui avait découvert les phases de Vénus, les taches du soleil et les satellites de Jupiter, s'était imaginé que ces phénomènes étaient autant de preuves invincibles en faveur du système de Copernic, quoique les deux premiers s'accordassent également avec le système de Tycho. A la vérité, le troisième formait une présomption très-forte pour Copernic, puisque les satellites suivent entre eux la troisième loi de Kepler, et Kepler lui-même en avait fait la remarque. Galilée, qui depuis long-temps était copernicien, crut avoir de nouveaux droits pour défendre le système qu'il avait adopté bien auparavant. Il le soutint publiquement à Rome, dans des conférences où il eut de grands succès; mais ces succès mêmes avaient animé contre lui ses ennemis, qui lui firent signifier une injonction formelle de ne plus professer ni défendre *en aucune manière* la doctrine qu'on s'obstinait à dire contraire aux livres saints. Il désobéit à la défense qui lui avait été légalement signifiée. Il usa de quelques subterfuges pour obtenir d'un inquisiteur la permis-

sion d'imprimer ses fameux dialogues, dans lesquels, en faisant semblant de balancer les raisons pour et contre, il amenait son lecteur à se décider pour Copernic. Déjà, dix-sept ans auparavant, Galilée avait été dénoncé à l'inquisition : mais on manquait de preuves; on avait fait des efforts inutiles pour se procurer une lettre autographe où Galilée avait exposé sa doctrine. Le prétexte que l'on cherchait depuis tant d'années, Galilée le fournit lui-même en publiant ses dialogues. De là ce procès scandaleux dont on donne une histoire plus détaillée et plus authentique qu'aucune de celles que l'on connaissait. Les pièces originales avaient été apportées à Paris; un envoyé du pape les avait redemandées : on avait différé de les rendre, et définitivement elles paraissent perdues. Mais on en avait projeté une édition italienne et française; la traduction était fort avancée; elle est restée à Paris : l'auteur en a une copie, dont il a donné, dans son discours préliminaire, la partie la plus intéressante; on y voit l'analyse de la procédure, et le plaidoyer prononcé par Galilée lui-même en présence de ses juges. Quant à sa condamnation et sa rétractation, ces pièces étaient connues depuis long-temps, et elles se trouvent dans l'Histoire, à l'article *Galilée.*

Ces quatre grands hommes, Copernic, Tycho, Kepler et Galilée, occupent le premier volume presque en entier; on y expose dans le plus grand détail toutes leurs tentatives, leurs marches, les succès qu'ils ont obtenus, et les points sur lesquels ils ont été moins heureux. On a parlé des logarithmes avant d'avoir dit un seul mot sur les tables de Rheticus en nombres naturels : c'est un anachronisme véritable; mais il suffit d'en être averti.

Le second volume commence par ce Rheticus, disciple et admirateur de Copernic, et qui le premier a complété notre système trigonométrique par ses grandes tables, où l'on trouve pour toutes les secondes, de 10 en 10, dans tout le quart de

cercle, les sinus, les tangentes et les sécantes en nombres naturels à dix décimales. Il avait même calculé tous ses sinus à quinze décimales, et ils ont été publiés après sa mort par Pitiscus. Après cet ouvrage fondamental, on passe en revue les éditeurs de tables trigonométriques, parmi lesquels on distinguera Snellius, qui le premier a mesuré un degré, sinon avec un grand succès, du moins par les méthodes véritables, telles qu'on les suit encore aujourd'hui. Briggs méritait un article particulier. Auteur, pour sa part, du système des logarithmes actuellement en usage, il a donné, pour tous les centièmes de degré, des sinus naturels et logarithmiques à quatorze décimales; il est l'inventeur de formules et autres procédés d'interpolation, dont il n'avait jamais connu lui-même ou dont il avait dissimulé les principes. On croit avoir retrouvé la marche qu'il a suivie pour arriver à ses règles pratiques; et l'on a refait, par des moyens différens et avec plus de scrupule, toutes les interpolations qu'il a données en exemples.

A la suite des auteurs de trigonométrie, on a placé Vernier, auteur de l'invention ingénieuse qui porte son nom, et qui se voit aujourd'hui sur tous les instrumens d'astronomie. On trouve ensuite Boulliaud et Seth-Ward, qui ont assez inutilement tenté de défigurer l'ellipse de Kepler; et Bayer, dont les cartes célestes ont eu une réputation un peu exagérée.

Descartes, en astronomie, n'a produit que des chimères; mais sa grande réputation méritait un article assez étendu. Parmi tant d'idées au moins extraordinaires, on a été heureux de saisir un trait de génie, qu'aucun de ses admirateurs n'avait encore remarqué. En soutenant la transmission instantanée de la lumière, il donne pour preuve de son opinion une conséquence mathématique qui résulterait du mouvement progressif: or, cette conséquence aujourd'hui reconnue et généralement admise, il tâche de prouver qu'elle serait contraire aux observations; c'est en quoi il se trompe. Mais seul,

pendant bien long-temps, il a vu cette conséquence, qui, mieux examinée, aurait hâté de quatre-vingts ans la découverte de l'aberration.

L'astrologue Morin, qui vient ensuite, est célèbre du moins pour avoir vu le premier quelques étoiles en présence du soleil. Pendant quelque temps il eut l'espoir de rendre sa remarque utile à l'astronomie; mais il ne put y réussir, et finit par l'abandonner lui-même.

Riccioli, adversaire obstiné de Copernic, dont il est en même temps admirateur outré, se montre dans tous ses ouvrages prolixes, mais pleins d'érudition, comme un homme qui fait tous ses efforts pour perdre la cause qu'il est chargé de soutenir. Du reste, il ne fait preuve ni de goût ni de critique, et paraît n'avoir d'autre intention que celle d'accumuler les volumes.

Gassendi, copernicien sage et discret, est plus adroit; mais il ne nous apprend rien.

Mouton, observateur assez exact, a donné une occasion favorable pour développer son système d'interpolation; on en a tiré des formules et des tables qui s'appliquent à tous les cas qui peuvent se présenter dans l'astronomie pratique, et surtout dans le calcul des tables et des éphémérides.

Hevelius, théoricien médiocre, mais le plus grand observateur que l'on connût encore, a le premier donné une orbite parabolique aux comètes. Borelli, à peu près dans le même temps, leur assignait l'ellipse ou la parabole. Doerfel parla depuis de la parabole avec plus de détails; mais la vraie théorie n'a triomphé que par Newton et Halley.

Horrockes est connu par la première observation de Vénus sur le soleil, comme Gassendi par la première qu'on ait faite de Mercure. Horrockes eut de plus sur la lune quelques idées dont Newton s'est servi, et qui l'ont détourné de calculer l'évection.

Huygens et Picard, l'un par son pendule, et l'autre par l'application de la lunette aux instrumens d'astronomie, sont les véritables fondateurs de l'astronomie moderne. Picard est encore auteur de la première mesure de la terre en laquelle on put avoir quelque confiance, et Newton en a tiré le parti le plus avantageux pour calculer la force qui retient la lune dans son orbite, et la loi de la pesanteur universelle en raison inverse des carrés des distances. A la suite de Picard on a placé son disciple Roemer, et son successeur La Hire.

Cassini, qui termine le second volume, est justement célèbre par ses découvertes télescopiques, la rotation de Vénus, celle de Mars, celle de Jupiter, par quatre nouveaux satellites qu'il a vus à Saturne, et par les tables du premier satellite de Jupiter, les premières qu'on ait employées pour déterminer les différences des méridiens. On lui doit encore la meilleure table de réfraction qu'on ait eue pendant long-temps, le micromètre de 45 degrés, enfin une méthode pour trouver la parallaxe par des observations d'ascension droite.

On n'a pu rappeler ici que les traits principaux qui caractérisent les astronomes vraiment distingués qu'on vient de nommer. On a fait suivre chacun d'eux de quelques contemporains qui, sans avoir mérité une réputation aussi grande, ont été utiles en leur temps. On a tâché de leur rendre à tous une justice tout-à-fait impartiale.

La partie de l'ouvrage qui reste à imprimer, et dont le manuscrit est achevé, commence à Newton, et conduira jusqu'à l'an 1821.

En tête du premier des deux volumes qu'il vient de publier, l'auteur a placé l'histoire de la réformation grégorienne du calendrier; une théorie complète et nouvelle des deux calendriers Julien et Grégorien; enfin des formules propres à calculer en tout temps tous les articles de ces calendriers,

sans recourir aux tables volumineuses qui ne se trouvent que disséminées dans divers ouvrages.

Mémoire sur la distribution de la Chaleur dans les Corps solides, par M. POISSON.

Ce Mémoire avait été lu à l'Institut le 29 mai 1815; des extraits en avaient paru dans le *Journal de physique* et dans le *Bulletin de la Société philomathique*. Mais, depuis cette époque, l'auteur ayant eu l'occasion de reprendre son travail sur le même sujet, il y a joint plusieurs parties qui en ont presque doublé l'étendue; c'est pourquoi il ne donne à ce Mémoire d'autre date que celle de sa nouvelle publication, mai 1821.

Ce Mémoire, qui est de 162 pages, repose en entier sur l'analyse la plus transcendante; il suppose en outre une métaphysique très-fine, et même quelques hypothèses difficiles à vérifier bien exactement : ainsi, pour s'en faire une idée juste, il faut le lire en entier, et recourir au dernier volume du *Journal de l'École polytechnique*.

Signaux d'une nouvelle espèce, par M. GAUSS, *associé étranger de l'Académie.*

M. GAUSS, qui s'est réuni avec M. Schumacher pour la grande opération trigonométrique du Danemarck, ayant réfléchi aux inconvéniens des signaux ordinaires, et s'étant assuré, par des raisonnemens photométriques, que la lumière réfléchie par un petit miroir devait se voir à de grandes distances, a inventé et fait exécuter deux instrumens à l'aide desquels on peut diriger la lumière réfléchie du soleil vers un objet donné. En cas de nécessité, on peut facilement disposer un sextant à réflexion pour cette expérience, en y ajoutant un troisième miroir qui fasse avec le grand miroir un angle

égal au complément de l'angle que forme la ligne visuelle avec le petit miroir.

MM. Gauss et Enke ont fait des expériences du 19 au 29 juillet, l'un étant sur le Hohenhagen, l'autre sur l'Inselberg. La distance de ces deux stations est de 85000 mètres : le miroir employé n'avait que deux pouces sur un pouce et un quart ; la lumière réfléchie se voyait parfaitement, et formait un excellent point de mire.

MM. Gauss et Schumacher ont ensemble mesuré une base par des procédés nouveaux, dont ils ont envoyé à l'Académie la description et les dessins. M. Schumacher emploie aux observations astronomiques le grand secteur de Ramsden, concurremment avec un cercle répétiteur à deux niveaux, l'un fixé à l'axe vertical, et l'autre mobile comme dans les cercles de Borda. Enfin, pour les degrés de longitude, qui feront une partie considérable de la nouvelle mesure, M. Schumacher se propose d'employer des fusées de nouvelle invention, dont il a fait l'expérience avec un plein succès.

Observatoire di Capo di Monte, à Naples.

M. Piazzi, associé étranger de l'Académie, vient d'envoyer la description du superbe observatoire dont il a dirigé les distributions intérieures, et dans lequel il vient de placer la collection précieuse des instrumens construits tout exprès par Reichenbach. Cette description est accompagnée de deux belles planches, dont l'une montre l'extérieur et l'autre l'intérieur de l'établissement. Pour tirer de ce grand monument le parti le plus convenable à la science, M. Piazzi a fait appeler à Naples M. Carlo Brioschi, astronome déjà connu, et qui s'est formé dans le célèbre observatoire de Bréra, à Milan.

M. Struve, directeur de l'observatoire de Dorpat, a envoyé

les deux volumes des observations qu'il y a faites en 1820 et 1821, avec d'excellens instrumens et des soins infinis; et M. Littrow, le recueil des observations qu'il a faites à l'observatoire impérial de Vienne.

Cours d'analyse de l'École royale Polytechnique, par M. Augustin-Louis CAUCHY; *première Partie: Analyse algébrique.*

L'AUTEUR y traite de diverses espèces de fonctions réelles ou imaginaires, des séries convergentes ou divergentes, de la résolution des équations, et de la décomposition des fractions rationnelles. Il fait connaître les propriétés principales des quantités infiniment petites qui servent de base au calcul infinitésimal. Enfin, dans les préliminaires et dans quelques notes placées à la fin du volume, il a présenté des développemens qui peuvent être utiles, soit aux professeurs et aux élèves des colléges royaux, soit à ceux qui veulent faire une étude spéciale de l'analyse.

D'après cet exposé l'on concevra que ce cours est différent des traités ordinaires d'algèbre, que les choses y sont considérées d'un point de vue plus élevé et d'une manière plus générale. L'auteur explique d'abord les notations dont il se servira, et qui, nouvelles pour la plupart, quoiqu'analogues aux idées reçues, servent à fixer plus précisément le sens de ces expressions et à prévenir toute difficulté dans l'usage. Ce plan suppose nécessairement des études préliminaires et l'habitude des procédés communs de l'algèbre.

L'ouvrage est un recueil de remarques ou théorèmes importans, qui trouveront leur application dans les calculs les plus transcendans de l'analyse moderne. Nous invitons nos lecteurs à lire avec une attention particulière l'usage des *fonctions alternées* pour la résolution des équations du premier

degré à plusieurs variables (chap. III); les règles nouvelles sur la convergence des séries *réelles* (chap. VI); une nouvelle théorie des imaginaires (chap. VII); les règles sur la convergence des séries *imaginaires* (chap. IX); et dans la note III, la résolution numérique des équations, les remarques sur la méthode d'approximation de Newton, et l'extension donnée à la règle de Descartes; dans la note VII, ce qui concerne la convergence des séries doubles; enfin dans les notes VIII et IX, plusieurs formules nouvelles.

Théorie analytique de la Chaleur, par M. FOURIER. *1822.*

Nous citons quelques passages d'un discours préliminaire que nous avons regretté de ne pouvoir transcrire en entier; ils suffiront pour donner une idée du plan et de l'importance de l'ouvrage.

Les causes primordiales ne nous sont point connues; mais elles sont assujetties à des lois simples et constantes, que l'on peut découvrir par l'observation. La chaleur pénètre, comme la gravité, toutes les substances de l'univers; ses rayons occupent toutes les parties de l'espace. Le but de l'ouvrage est d'exposer les lois mathématiques que suit cet élément. Les phénomènes les plus divers sont soumis à un petit nombre de lois fondamentales qui se reproduisent dans tous les actes de la nature. Mais les lois mécaniques ne s'appliquent point aux effets de la chaleur : ils composent un ordre de phénomènes qui ne peuvent s'expliquer par les principes du mouvement et de l'équilibre. On a su mesurer plusieurs de ces effets; mais on ne connaît que des résultats partiels, et non la démonstration mathématique des lois qui les comprennent tous. L'auteur a déduit ces lois d'une longue étude, et de la comparaison attentive des faits connus jusqu'à ce jour; il les a tous observés de nouveau avec les instrumens les plus précis dont

on ait encore fait usage. Il a reconnu que tous les phénomènes qui dépendent de l'action de la chaleur, se résolvent en un très-petit nombre de faits généraux et simples, et par-là toute question physique de ce genre est ramenée à une recherche d'analyse mathématique. Il en a conclu que, pour déterminer en nombres les mouvemens les plus variés de la chaleur, il suffit de soumettre chaque substance à trois observations fondamentales. En effet, les différens corps ne possèdent point au même degré la faculté de *contenir* la chaleur, de la *recevoir* ou de la *transmettre* à travers leur superficie, et de la *conduire* dans l'intérieur de la masse. Ce sont trois qualités spécifiques que la théorie distingue clairement, et qu'elle apprend à mesurer. La chaleur rayonnante qui s'échappe de la superficie de tous les corps, a des lois spéciales, et elle concourt aux phénomènes les plus variés. On connaissait déjà l'explication physique de plusieurs de ces faits; la théorie mathématique en donne la mesure exacte. Cette énumération fait assez connaître la nature des questions que l'auteur s'est proposées. Quelles sont les qualités élémentaires que dans chaque substance il est nécessaire d'observer, et quelles expériences sont les plus propres à les déterminer exactement? Si des lois constantes règlent la distribution de la chaleur dans la matière solide, quelle est l'expression mathématique de ces lois? et par quelle analyse peut-on déduire de cette expression la solution complète des questions principales? Les principes de cette théorie sont déduits, comme ceux de la mécanique rationnelle, d'un très-petit nombre de faits primordiaux, dont les géomètres ne considèrent point la cause, mais qu'ils admettent comme résultant des observations communes et confirmées par toutes les expériences. L'analyse exprime clairement, 1.° les conditions générales, c'est-à-dire, celles qui résultent des propriétés naturelles de la chaleur; 2.° l'effet accidentel, mais subsistant, de la figure ou de l'état des surfaces;

3.° l'effet non durable de la distribution primitive. L'ouvrage que l'on publie aujourd'hui a été écrit depuis long-temps; diverses circonstances en ont retardé et souvent interrompu l'impression. Dans cet intervalle, ajoute l'auteur, la science s'est enrichie d'observations importantes; les principes de notre analyse, qu'on n'avait pas saisis d'abord, ont été mieux connus; on a discuté et confirmé les résultats que nous en avions déduits. Nous avons appliqué nous-mêmes ces principes à des questions nouvelles, et changé la forme de quelques démonstrations. Les retards de la publication auront contribué à rendre l'ouvrage plus clair et plus complet. Les théories nouvelles expliquées dans notre ouvrage sont réunies pour toujours aux sciences mathématiques; elles reposent, comme elles, sur des fondemens invariables; elles conserveront tous les élémens qu'elles possèdent aujourd'hui, et elles acquerront continuellement plus d'étendue. On perfectionnera les instrumens et l'on multipliera les expériences. L'analyse que nous avons formée sera déduite de méthodes plus générales; la théorie dirigera toutes les mesures, et en assignera la précision.

Le chapitre Ier est une introduction qui expose l'objet du traité.

Le chapitre II donne les équations du mouvement de la chaleur.

Le chapitre III a pour titre, *Propagation de la chaleur dans un solide rectangulaire indéfini.*

Chapitre IV. *Mouvement linéaire et varié de la chaleur dans une armille.*

Chapitre V. *Propagation de la chaleur dans une sphère solide.*

Chapitre VI. *Du mouvement de la chaleur dans un cylindre solide.*

Chapitre VII. *Propagation de la chaleur dans un prisme rectangulaire.*

Chapitre VIII. *Mouvement de la chaleur dans un cube solide.*

Chapitre IX. *De la diffusion de la chaleur. Comparaison des intégrales.*

Sur un Moyen de mesurer l'effet dynamique des Machines de rotation, par M. DE PRONY.

LE procédé qui forme l'objet de ce Mémoire a l'avantage de donner la mesure de l'*effet dynamique*, soit *total*, soit *partiel*, d'un système tournant, par le poids et la position d'une masse qu'on maintient dans l'état d'immobilité. Cette condition est remplie à l'aide du frottement, et cependant on obtient les résultats cherchés, indépendamment de toute considération, tant sur la nature de cette espèce de résistance que sur sa relation avec la pression normale; les termes qui se rapportent à ces diverses circonstances disparaissent dans l'équation finale; il en est de même du rayon du cylindre autour duquel s'exerce le frottement.

La partie descriptive et analytique n'étant pas susceptible d'extrait, nous sommes obligés de renvoyer à l'ouvrage, qui a été rédigé à l'occasion des expériences que l'auteur avait à faire sur les machines à feu à haute pression. Quand on parle de l'effet d'une machine à feu, on évalue ordinairement cet effet en *nombre de chevaux*. Pour rapporter cette unité de force à des idées précises, on est convenu de représenter par l'expression *force d'un cheval* l'élévation d'un poids de 80 kilogrammes à un mètre de hauteur pendant une seconde de temps. L'auteur prouve que cette évaluation de la force d'un cheval employé à mouvoir une machine de rotation est exagérée; mais on peut la considérer comme une *unité de force nominale*. M. Navier a prouvé, dans ses additions à l'*Architecture hydraulique* de Bélidor, qu'un cheval attelé à un manége,

et travaillant huit heures par jour, fournit par seconde *une quantité d'action* égale à 40 kilogrammes environ.

Instruction sur le Thermomètre métallique de MM. BRÉGUET *père et fils, et sur les Moyens d'établir sa correspondance sur d'autres Instrumens thermométriques, par M.* DE PRONY.

LA construction et les propriétés du thermomètre métallique de MM. Bréguet sont fondées sur les différences qui existent entre les dilatabilités des métaux. On sait que des verges métalliques de fer, de cuivre, d'argent, d'or, de platine, &c., dont les longueurs sont égales entre elles à une certaine température, deviennent inégales lorsque cette température change; et comme les mêmes variations se reproduisent dans les mêmes circonstances, la mesure des inégalités de longueurs correspondantes à diverses températures pourrait fournir un moyen d'évaluations thermométriques. Mais l'extrême petitesse des rapports entre les inégalités de longueurs dues aux changemens de température, et les longueurs elles-mêmes, rend la précision difficile à obtenir.

MM. Bréguet ont heureusement éludé cette difficulté, en substituant la mesure des angles à celle des lignes. Par cette substitution, ils sont parvenus, avec un instrument d'un petit volume et d'un usage commode, non-seulement à rendre les phénomènes aisément et parfaitement sensibles, mais encore à les indiquer avec une rapidité que les thermomètres à mercure ne peuvent pas atteindre, à beaucoup près. Celui de ces artistes, par sa sensibilité, fait connaître presque instantanément le plus léger changement de température que subit un gaz ou un liquide dans lequel il se trouve plongé.

Ils obtiennent ces avantages, bien précieux pour les physiciens calculateurs qui veulent avoir des données numériques

exactes, en soudant ensemble des fils métalliques aplatis, et en les tournant en spirales cylindriques ou hélices, c'est-à-dire, en leur donnant la forme de l'espèce de ressorts connus sous le nom de *ressorts à boudin*. C'est un procédé analogue à celui qu'ils emploient pour les spiraux de leurs garde-temps.

Ce nouveau thermomètre éprouve ainsi, sans intermédiaire, l'influence de la température du milieu dans lequel il est plongé. Deux métaux pourraient suffire pour la construction de l'instrument. Mais cette réunion de deux métaux seulement ne procure pas toute la perfection désirable; et MM. Bréguet sont dans l'usage de composer leurs hélices de trois métaux, l'argent, l'or et le platine, dans l'état de plus grande pureté. Ils placent au-dedans et au-dehors les métaux de la plus grande et de la plus petite dilatabilité, entre lesquels se trouve le métal de la dilatabilité moyenne. Le cercle horizontal, perpendiculaire à l'axe de l'hélice, qui passe par son centre, est divisé en cent parties. Les trois lames de métal n'ont ensemble qu'un vingt-cinquième de millimètre d'épaisseur au plus. On voit par-là avec quelle facilité et quelle promptitude le calorique doit pénétrer le système de ces trois métaux sur lesquels il agit sans être obligé de traverser préalablement un corps intermédiaire. L'expérience a encore prouvé qu'à cette grande sensibilité se réunissait toute la précision desirable dans les mesures. La marche angulaire de l'aiguille peut être mesurée avec beaucoup d'exactitude, et il a été reconnu que les différences entre les angles décrits étaient assujetties à la marche progressive de la température. L'auteur du Mémoire a lui-même vérifié cette identité de rapports par une suite d'observations qui a duré plus de deux ans, et dans laquelle sont comprises les basses températures de l'hiver de 1819 à 1820. Les mêmes températures ramenaient constamment l'aiguille au même point. L'instrument de com-

paraison était un excellent thermomètre centigrade à mercure, de Fortini.

Les épreuves, et en général l'usage du thermomètre métallique, exigent des précautions; c'est un instrument délicat qu'il faut manier et remuer avec ménagement, en garantissant soigneusement l'hélice des pressions et des chocs qui, sans être très-forts, pourraient en altérer la courbure et changer la marche de l'instrument. Cette hélice doit aussi être tenue dans un air bien calme, le souffle le plus léger la faisant osciller.

Le reste du Mémoire est consacré à expliquer les moyens d'établir la concordance du thermomètre métallique avec un des thermomètres dont les physiciens se servent ordinairement; tel, par exemple, que le thermomètre centigrade à mercure, le thermomètre de Réaumur, ou celui de Fahrenheit. L'auteur explique dans le plus grand détail les expériences et les calculs à faire pour obtenir les formules qui, pour un degré quelconque observé sur le thermomètre métallique, serviront à ramener ce nombre à l'une des échelles mentionnées ci-dessus.

Nouvelle Méthode de Nivellement trigonométrique, par M. DE PRONY. Paris, Firmin Didot, 1822.

« J'AI conçu l'idée de cette méthode, nous dit l'auteur, » pendant mon séjour en Italie, où elle m'a été fort utile » dans les plaines du Pô et dans les marais Pontins, en me » procurant les moyens de niveler et de relever des points » situés sur des lignes que les localités ne permettaient pas » de parcourir. L'observateur qui fait usage de cette méthode, » a le grand avantage d'observer dans un lieu abrité, où il » peut même établir son logement, et d'assurer l'exactitude » de ses opérations par la permanence et la commodité de

» sa position. Il a de plus la faculté de se servir d'instrumens
» qu'il lui serait difficile ou même impossible de transporter
» de station en station, et dont la précision est bien supérieure
» à celle des instrumens portatifs. Le travail à exécuter en
» rase campagne se réduit à des mesures de lignes droites et
» à des placemens de mire. L'ingénieur, placé à la station
» fixe, devra être pourvu d'un bon cercle répétiteur pour
» relever les angles dans le plan des objets, et mesurer les
» angles de dépression et d'élévation; il pourrait également
» se servir d'un excellent cercle azimutal, portant un cercle
» vertical pour les distances au zénit. Ceux qui opéreront
» dans la campagne auront des chaînes en fer bien étalonnées,
» des fiches de fer, des jalons et des mires. Ces mires peuvent
» couler le long des jalons ferrés et bien droits, et se fixer à
» différentes hauteurs par des vis de pression. Le plan de
» chaque mire doit être tourné de manière qu'il soit perpen-
» diculaire au plan vertical passant par le centre de l'instru-
» ment et par l'axe du jalon. »

Figurez-vous ensuite un nombre de ces mires dont les centres sont situés sur une même ligne droite, et visibles de la station principale; imaginez qu'on ait mesuré les distances réciproques de trois quelconques de ces centres : le plus commode sera de les choisir à la suite les uns des autres, pour diminuer autant que possible le travail de la mesure à la chaîne, c'est-à-dire, la partie de l'opération qu'on est obligé de confier à des collaborateurs, desquels on n'est pas en droit d'exiger beaucoup de connaissances.

Tel est le plan, tel que l'auteur l'a conçu le premier. L'ingénieur tirera le reste de ses propres observations et des ressources que fournit la géométrie, et qui sont détaillées dans la section suivante. La première chose qu'il devra faire après les observations d'angles et de distances au zénit, sera de calculer la distance du centre de son instrument aux trois

points observés et mesurés. Avec ces trois distances rectilignes et les trois distances zénitales, il aura les différences de niveau et l'inclinaison de la ligne droite qui passe par le centre de toutes les mires.

Le calcul de ces trois distances est un cas particulier, et le plus simple d'un problème plus général, résolu déjà depuis près de deux mille ans. Hipparque l'imagina pour calculer géométriquement les mouvemens inégaux et apparens du soleil et de la lune. Ptolémée nous a conservé cette solution très-adroite et très-ingénieuse. Snellius, dans sa mesure du degré de Hollande, a fait de ce problème une question géodésique, dans laquelle il s'agit de déterminer les distances d'une station à trois points connus qui forment un triangle dont on connaît les trois côtés et les trois angles; il suffit que l'observateur ait mesuré les angles sous lesquels ces trois côtés sont vus du centre de la station. La solution de Snellius est plus embarrassée et moins ingénieuse que celle d'Hipparque. Plusieurs auteurs se sont depuis exercés sur ce problème, dont on trouve la solution la plus complète et la plus générale dans la nouvelle *Histoire de l'astronomie.*

Trois lieux observés de la lune et du soleil, avec l'intervalle écoulé entre les observations, donnaient les trois arcs parcourus par la planète, qu'on supposait se mouvoir uniformément sur un cercle. Les trois arcs donnaient les cordes, c'est-à-dire, les trois côtés, et de plus les trois angles du triangle inscrit au cercle. En prenant pour unité le rayon de ce cercle, on a les trois cordes. Des formules très-simples donnent les trois distances inconnues en fonctions de ce rayon. Ces formules renferment les trois angles du triangle des trois cordes. Mais, si le triangle se réduit à une ligne droite, deux des angles deviennent nuls, le troisième devient de 180 degrés. Au lieu de trois côtés, on a trois lignes droites, dont la plus grande est la somme des deux autres. Portez ces valeurs des

angles dans les formules, avec les trois longueurs mesurées, et les formules ainsi simplifiées vous donneront les trois distances cherchées.

Quoique l'idée ne soit pas entièrement neuve, pour ce qui concerne cette partie fondamentale de la méthode, nous n'en sommes pas moins persuadés que la solution appartient tout entier à celui qui a su lui donner cette forme nouvelle, et en déduire des conséquences aussi nombreuses qu'importantes, auxquelles, avant lui, personne n'avait songé. Il n'est nullement croyable que, dans les marais Pontins, l'auteur eût avec lui, ou l'*Almageste* de Ptolémée, ou l'*Ératosthène batave* de Snellius, ou les méthodes pour la mesure d'un arc du méridien, ou l'un des ouvrages où pouvait se trouver l'une des solutions que nous venons d'indiquer : il n'avait emporté avec lui que ses instrumens, et les connaissances géométriques qui appartiennent à tous, où chacun puise, comme dans un fonds commun, suivant les circonstances et suivant la sagacité dont il est doué. Ce qui appartient incontestablement à l'auteur, c'est l'extension qu'il a su donner au problème. Quand il a calculé ses distances, il a les angles qu'elles forment entre elles ; il a pour le signal suivant un triangle dans lequel il connaît un côté et deux angles, et par conséquent le troisième angle. Il peut calculer les deux côtés inconnus. Ce second triangle lui donne les moyens pour en résoudre un troisième ; et ainsi de suite jusqu'à l'extrémité de la ligne.

On conçoit que cette ligne droite qui joint le centre des mires, ne peut se prolonger au-delà de certaines bornes : mais l'observateur peut faire placer tout autour de lui nombre de lignes semblables qu'il observera et calculera de même ; il se fera des plans partiels du terrain qui l'entoure. Il ne restera qu'à réunir ces parties séparées, et chaque jonction ne demandera qu'un triangle, dans lequel on aura deux côtés et

l'angle compris. Il peut choisir ensuite une ou plusieurs autres stations, tracer de nouvelles lignes, les observer et les calculer, et réunir le tout en un plan général.

Les distances en ligne droite et les distances zénitales donneront par les formules connues les différences de niveau; et si la mer est visible de l'une des stations, on pourra tout réduire à cet horizon, en tenant compte par-tout de la réfraction terrestre qui élève tous les objets.

Nous avons supprimé quelques détails que le lecteur peut suppléer, ou pour lesquels il pourra consulter l'ouvrage imprimé. Une seconde section renferme toutes les formules adaptées spécialement à chacun des problèmes partiels qu'il s'agit de résoudre, et toutes réduites au dernier degré de simplicité. La troisième section offre des exemples de calcul dont toutes les données sont prises dans les observations que l'auteur a faites dans les marais Pontins; en sorte que l'ingénieur le moins géomètre pourra imiter dans toutes ses parties l'opération si complétement et si clairement exposée, sans jamais éprouver le moindre embarras.

Recueil d'observations géodésiques, astronomiques et physiques, exécutées par ordre du Bureau des longitudes de France, en Espagne, en France, en Angleterre, en Écosse, pour déterminer la variation de la pesanteur et des degrés terrestres, sur le prolongement de la méridienne de Paris, faisant suite au troisième volume de la Base du système métrique, *rédigé par MM.* BIOT *et* ARAGO, *membres de l'Académie des Sciences, et astronomes adjoints du Bureau des longitudes, &c.; Paris, 1821, un volume in-4.° de 588 pages.*

« LA triangulation relative à l'arc d'Espagne, que Méchain » avait commencée, et que nous avons poussée jusqu'à l'île

» de Formentera, la plus australe des Pityuses, se lie aux » opérations précédentes par le côté des premiers triangles » qui joint les stations de Montserrat et de Matas; de sorte » que c'est là que notre travail se rattache à l'ouvrage de » M. Delambre. Du reste, on a exactement suivi dans la » rédaction l'ordre dont il avait donné le modèle. Nous avons, » comme lui, déposé tous les registres qui renferment les ob» servations originales, dans les archives de l'Observatoire, » afin que l'on puisse, au besoin, les consulter et les comparer » au texte imprimé. Pour les observations géodésiques et » astronomiques, nous nous sommes bornés à leur exposition » et à leur calcul immédiat. La discussion des conséquences » qui en résultent sera plus complète, quand on y pourra » faire concourir les opérations exécutées par M. Arago, entre » Formentera et Mayorque, pour la mesure d'un arc de pa» rallèle, ainsi que la nouvelle détermination de la latitude » de la limite boréale de l'arc, résultant des observations » que nous avons faites en 1818 à Dunkerque, concurrem» ment avec les astronomes anglais. Ces objets seront com» pris dans un autre volume, où l'on fera entrer également » les travaux de diverse nature qui pourront être exécutés » par la suite, et qui se rattacheront plus ou moins intime» ment au but général de l'opération. »

Cette introduction offre le récit, plein d'intérêt, des difficultés que les deux astronomes ont rencontrées dans leurs recherches préliminaires, et de quelques changemens qu'ils ont été forcés de faire au plan conçu par Méchain. M. Biot nous indique ensuite des moyens faciles pour donner à ce même plan une extension assez considérable, et porter l'extrémité australe de la méridienne sur le sommet du mont Atlas. Jusqu'à la station de Palmas, on avait suivi les idées de Méchain; des considérations tirées des localités engagèrent à changer le reste du projet, et l'arc du méridien put être

prolongé jusqu'à Formentera, environ 25′ plus au sud qu'on ne l'aurait pu en suivant les premières combinaisons.

Les observations à la lunette méridienne pour la marche du pendule, et l'azimut du dernier côté des triangles, ont été faites avec une lunette méridienne de Lenoir, de quatre pieds de longueur, et établie solidement sur deux gros piliers de pierre.

La lunette était à peu près dans le méridien, et « il ne » nous importait nullement de nous approcher davantage » de ce plan, puisqu'on peut calculer aisément la déviation » d'après les passages observés des étoiles, au moyen de la » méthode qui a été donnée par M. Delambre. Nous cher» châmes dans l'île d'Iviza, placée à cinq lieues de distance, » des objets fixes et reconnaissables qui se trouvaient exacte» ment sous quelques-uns de nos fils. Quand nous en vînmes » à vouloir déterminer l'azimut du dernier côté de nos » triangles, nous fîmes placer dans l'île d'Iviza un de nos » réverbères à très-peu près dans la direction de la méridienne; » il y fut attaché d'une manière invariable. »

Latitude de Formentera. Les observations ont été faites avec un cercle de Fortin, de $0^m,41$ de diamètre, et à niveau fixe. Le niveau n'éprouvait, pendant une longue série d'observations, que de très-légers dérangemens, qu'on aurait pu corriger facilement par les vis du pied; on a préféré de noter, pendant chaque observation, les points de l'échelle vers lesquels les deux extrémités de la bulle venaient s'arrêter, en se réservant d'appliquer ensuite au résultat définitif de la série une correction dépendante de l'inclinaison de l'axe. Les traits du niveau étaient éloignés d'un millimètre, et chacun de ces intervalles était de $0'',92$ ou $0'',952$. La vis n'avait pas de temps perdu, et le niveau suivait les déplacemens de l'axe. Latitude définitive, $38° 39' 56''$.

Longueur du pendule à secondes. Dans ces expériences, on

a pris pour modèle le travail fait par Borda. Au lieu d'une règle de platine de quatre mètres environ de longueur, dont Borda s'était servi, on s'est déterminé à employer une règle plus portative : elle est en fer très-solide, et n'a que 0m,70 de longueur ; elle a servi à Formentera, à Paris et à Bordeaux. Une seconde règle, scrupuleusement comparée à la première, a été observée concurremment à Bordeaux, Figeac, Clermont et Dunkerque ; elle a été de même employée dans les expériences d'Écosse avec une troisième règle appropriée pour le pendule sexagésimal. Longueur du pendule à secondes, dans le vide :

à Formentera	0,7412159,	
et au niveau de la mer	0,7412625,	latit. 38° 39' 56"
à Paris, au niveau de la mer	0,7419176,	latit. 48. 50. 14.
à Figeac	0,741612279,	latit. 44. 46. 43.
à Clermont	0,7417052,	latit. 45. 46. 48.

A Dunkerque, on lit la note suivante : « Outre la mesure » du pendule, on nous avait chargés d'observer de nouveau » la latitude sur laquelle M. Delambre n'avait pu faire qu'un » petit nombre d'observations. Par plusieurs milliers d'obser- » vations, très-bien d'accord entre elles, nous trouvâmes une » latitude d'environ 4" moindre que celle que M. Delambre » avait obtenue. Malheureusement on n'avait pas pensé jus- » qu'alors que le cercle répétiteur fût susceptible d'erreurs » constantes, ou du moins on n'avait pas fait assez d'atten- » tion à la possibilité de pareilles erreurs. Aussi, lorsque nous » eûmes reconnu cette différence, nous ne vîmes d'autre » parti à prendre que de redoubler de précautions dans nos » observations, et d'en rapporter tous les résultats, quels qu'ils » fussent, avec la fidélité la plus scrupuleuse. Mais enfin » après notre retour, en continuant à réfléchir sur ce mystère, » nous en vînmes à reconnaître, dans le détail des pièces dont

» les cercles se composent, des causes d'erreurs constantes,
» non-seulement possibles par leur nature, mais même d'une
» nécessité presque inévitable dans la construction la plus
» soignée. J'exposai la nature de ces causes dans la seconde
» édition de mon *Astronomie*; et je montrai qu'on en détrui-
» rait l'effet par compensation, si l'on observait alternative-
» ment au sud et au nord du zénit; car de pareilles causes,
» quelles qu'elles puissent être, ont nécessairement pour effet
» de donner toutes les distances zénitales ou trop grandes ou
» trop petites, mais toujours dans le même sens. Par consé-
» quent, si les observations d'étoiles au nord du zénit donnent,
» par exemple, une latitude trop forte, les observations d'étoiles
» au sud de ce même zénit donneront une latitude trop faible
» de la même quantité; d'où il suit que la moyenne sera
» exacte. Il n'était plus temps d'apporter ces corrections aux
» observations que nous avions faites en 1809; mais il n'était
» plus permis de les négliger dans d'autres occasions. Aussi
» n'ai-je pas manqué d'en faire usage aux îles Shetland; et
» depuis, ayant été chargés, M. Arago et moi, de retourner
» à Dunkerque pour y observer de nouveau la latitude, con-
» jointement avec les savans anglais, nous avons eu grand
» soin d'employer cette utile précaution : alors notre latitude,
» obtenue par la moyenne des distances zénitales, étant ré-
» duite à la tour de Dunkerque, s'est trouvée parfaitement
» d'accord avec celle que les savans anglais ont obtenue en
» même temps par le grand secteur de Ramsden; et ce qui
» était sur-tout un résultat desirable, cette latitude s'est
» trouvée exactement la même que M. Delambre avait au-
» trefois obtenue. »

A la suite d'un tableau des longueurs du pendule dans huit stations différentes, depuis Formentera jusqu'aux îles Shetland, longueurs comparées à celles que donnerait la théorie, on lit la note suivante : « La marche des écarts contenus dans

» la dernière colonne de ce tableau montre, en allant du » nord au sud, un décroissement progressif de la gravité un » peu plus fort que ne l'exige la figure elliptique; ce qui avait » été déjà remarqué pour l'Écosse et l'Angleterre par le ca- » pitaine Kater. Ici l'on peut voir le même effet se continuer » à travers la France, où il est plus sensible à la station de » Bordeaux. »

Nous n'ajouterons qu'une remarque bien simple. Dans nos degrés, le plus grand écart de l'ellipse est entre Évaux et Carcassonne, c'est-à-dire, vers le parallèle de Bordeaux, à l'endroit de la France où le pendule indique l'irrégularité la plus sensible.

Extrait d'un Rapport sur les Poids et Mesures par M. John Quincy Adams, *Secrétaire d'état des États-Unis, en exécution d'une résolution du Sénat, du 3 mars 1817.*

Cette résolution chargeait M. Adams de rédiger un projet de réglemens et de modèles pour les poids et mesures usités dans les différentes parties des États-Unis. L'auteur y a joint une notice des procédés employés dans les pays étrangers pour établir l'uniformité des mesures et des propositions propres à être adoptées dans les États-Unis.

Le rapport est divisé en trois parties distinctes : 1.° moyens employés dans les divers états pour établir l'uniformité; 2.° réglemens et modèles des poids usités dans les divers états de l'union américaine; 3.° propositions relatives à l'uniformité dans toute l'étendue des États-Unis.

Après avoir parlé des mesures dont il est fait mention dans l'Écriture, ou dans les auteurs grecs ou romains, M. Adams passe aux nations modernes, en se bornant à l'Angleterre et à la France, et principalement à la France, dont la marche a été plus universelle, plus profonde et plus systématique. Les

Français avaient fait adopter leur système aux peuples qu'ils avaient passagèrement réunis à leur empire. Depuis que ces états en ont été séparés, ce système a été abandonné par tous, excepté par les Pays-Bas, où il a été confirmé par deux ordonnances royales, avec certaines exceptions et modifications, particulièrement pour les monnaies.

En Angleterre, on voit dès les premiers âges quelques tentatives inutiles pour établir l'uniformité. On y trouve des mesures grecques, romaines et saxonnes. Le XXVe chapitre de la grande charte de l'année 1225 (9.e de Henri III) parle d'une mesure de vin qui doit être la même pour tout le royaume. On y voit une mesure pour la bière, et une pour le blé, c'est-à-dire, le *quarter* de Londres; une largeur pour les étoffes teintes, c'est-à-dire, deux yards entre les deux lisières. Il devait en être de même pour les poids et les mesures.

L'objet de cestatut était, non d'innover, mais de maintenir les anciens usages. Ce statut fut mal compris, et les lois subséquentes l'anéantirent. Nous sommes obligés d'omettre plusieurs détails sur les poids qui se sont succédé en Angleterre; les noms de *troy weights* et de *avoir du poids* attestent une origine française. Les termes *avoir du poids* et *choses poisables* étaient synonymes. En 1685, le poids du pied cubique d'eau de fontaine fut trouvé par expérience de 1000 onces avoir du poids; et en 1696, le bushel fut trouvé de 1000 onces avoir du poids (poids de blé, *wheat*).

Les philosophes et les législateurs de la Grande-Bretagne n'ont cessé de s'occuper des poids et mesures, et toujours ils ont montré leur passion pour l'uniformité. En réfléchissant sur la théorie, et en faisant des expériences sur les étalons existans, ils n'ont considéré que l'*uniformité d'identité*; ils ont négligé l'*uniformité de proportion*. Ils trouvèrent une grande variété dans les divers étalons, et, au lieu de chercher

les véritables causes de ces différences, ils les attribuèrent à ce qu'on n'avait pas pris dans la nature un modèle inaltérable. Ils sentirent la convenance et la facilité de l'arithmétique décimale pour les calculs, et crurent qu'ils pourraient l'appliquer également aux divisions et aux multiplications du temps, de l'espace et de la matière. Ils méprisèrent les modèles primitifs tirés du corps humain; ils rejetèrent les modèles secondaires, tirés des productions de la nature les plus indispensables à la subsistance de l'homme; ils employèrent toutes les ressources de leur esprit et de la science pour trouver dans la matière ou dans le mouvement le modèle invariable de la mesure linéaire qui devait servir à déterminer toutes les autres mesures et tous les poids. En examinant les procédés français, nous verrons les progrès et les résultats qui ont fourni un grand et beau système. En Angleterre, on a montré plus de circonspection et plus d'attention à conserver ce qui existait. En 1757, 1764, 1789 et 1790, et depuis 1814 jusqu'à présent, le parlement, à trois reprises, a cherché les moyens de réformer le système des poids et mesures, et d'introduire une plus grande uniformité. Ces recherches ont été suivies avec une ardeur et une persévérance secondées par l'adresse des artistes les plus éminens, par le savoir des philosophes les plus distingués, et par les efforts contemporains d'une nation voisine et rivale.

Le peuple et le congrès des États-Unis n'ont pas négligé un objet aussi important. Le vœu unanime de l'union a conféré au sénat le pouvoir de fixer l'étalon des poids et mesures. Des rapports instructifs ont jeté sur ce sujet une nouvelle lumière. Les deux chambres ont manifesté leur sollicitude avec une persévérance égale à celle de l'Angleterre, sans pourtant déployer cette magnificence hardie qu'on trouve dans les travaux des Français.

Après soixante ans de recherches et d'expériences, le

parlement britannique n'a produit encore aucune loi. Après quarante ans de recherches semblables, le congrès a montré la même circonspection. Aucune loi n'a encore été rendue, et peut-être c'est une circonstance favorable sous le point de vue de l'uniformité. Avant de changer le système existant, le congrès pourra peser les avantages qu'il peut acquérir et ceux qu'il peut perdre.

L'Angleterre et les États-Unis sont les deux peuples qui ont les rapports les plus fréquens et les plus intimes. Tout changement qui serait fait dans le système de l'un sans être adopté par l'autre, détruirait une uniformité très-précieuse.

Si l'on attache une si grande importance à l'uniformité absolue et générale, il n'y a qu'un moyen de l'obtenir; ce serait d'adopter le système français dans ses parties les plus importantes. Quand il serait possible d'en imaginer un autre aussi parfait, il établirait une diversité par rapport à la France et les partisans de son système. La France n'abandonnerait pas le sien, et il existerait deux systèmes rivaux; il faudrait renoncer à jamais à cette uniformité entière.

Le système français est né de la révolution; c'est un essai en faveur de l'humanité; et quand il serait destiné à périr finalement, il ne serait guère moins admirable dans ses revers que s'il a le plus grand succès. Ici l'auteur pose les bases de ce système; il y voit la *perfection idéale;* et quoi qu'il arrive, ce système sera la gloire éternelle de l'âge qui l'a conçu et achevé, malgré les obstacles de tout genre; et si l'homme est un être perfectible, l'usage du mètre s'étendra sur tout le globe, et, de l'équateur aux pôles, la langue des poids et mesures sera la même. L'établissement du système sera une époque dans l'histoire de la science. L'auteur donne l'histoire des opérations françaises; il loue sur-tout l'idée de cette commission qui devait être formée d'un nombre égal de savans anglais et de savans français. Il regrette que les circonstances

aient empêché de la réaliser; il loue aussi la réunion de savans de toute nation qui ont partagé et sanctionné les travaux des Français.

Après de très-grands éloges de notre nomenclature systématique, il blâme la légèreté des Français qui a ramené les anciens noms et dénaturé quelques mesures. Il nous apprend que les Américains ont montré la même répugnance à adopter les noms latins des centièmes et millièmes de dollar; cependant on a adopté le centième, parce qu'il se voit et se touche, au lieu qu'on ne voit guère le dixième et le millième. L'auteur dit quelques mots de l'arc prolongé d'une part jusqu'à Formentera, et de l'autre jusqu'aux îles Shetland. En finissant, il déclare qu'il ne cherchera pas à se justifier des détails dans lesquels il est entré; le spectacle à-la-fois si rare et si sublime dans lequel le génie, la science, l'industrie et les moyens réunis de deux grandes nations arrivent au but proposé, le bien du genre humain, est un motif suffisant pour qu'on s'arrête quelque temps à jouir d'une scène si honorable à notre espèce. Cette scène est une époque dans l'histoire de l'homme; c'est un exemple et un avis pour les législateurs de tous les temps et de tous les âges.

La division décimale de l'année et du jour, et le calendrier éphémère, lui paraissent absurdes et inutiles. On sait que le calendrier a été établi malgré nos réclamations, et que les heures décimales nous ont toujours paru peu commodes. Il trouve plus raisonnable l'application du calcul décimal à la géographie, à la navigation et à l'astronomie. Il y trouve, comme nous, un inconvénient presque insurmontable, c'est qu'il exigerait la refonte entière de toutes les cartes et de toutes les tables. Il discute avec sagesse les inconvéniens et les avantages de notre système monétaire; il fait l'histoire critique des lois et des ordonnances qui, relativement à la nomenclature, ont eu pour but de réconcilier le nouveau

système avec les habitudes populaires. En convenant de la justesse de nos principes en théorie, il soupçonne que nous avons trop donné à la facilité des calculs et trop peu à celle de la pratique. Il compare le système anglais et le système français. Il avoue que notre nomenclature possède l'uniformité en sa perfection; qu'on n'y trouve ni deux mots qui expriment la même chose, ni deux choses exprimées par le même mot; il convient qu'une aliquote de la circonférence du méridien est bien préférable au pendule. Malgré les avantages du mètre, il regrette le pied, qui lui paraît d'un usage plus universel et plus commode. Le litre est la seule mesure commune de tous les grains et de tous les liquides; mais il ne donne que le poids de l'eau distillée. Il pense qu'il eût été plus naturel d'établir deux échelles de poids et de mesures de capacité, graduées sur les pesanteurs spécifiques du blé et du vin. Il appuie ses idées sur ce qu'on a été obligé de faire en France pour l'huile douce et l'huile à brûler, pour lesquelles on a ordonné deux espèces de mesures qui ne sont nullement en harmonie avec le nouveau système. Après beaucoup de réflexions, l'auteur arrive à ce résultat:

L'uniformité naturelle, propre à assurer la quantité de toutes les substances par leur poids et l'espace qu'elles occupent, est une *uniformité de proportion*, et non d'*identité*. Au lieu d'un poids et d'une mesure unique, elle exige deux unités en proportion connue. Le système anglais avait originairement ces deux mesures; il était mieux adapté aux usages que le système français. L'uniformité anglaise était relative aux choses pesées et mesurées; l'uniformité française n'a de rapport qu'aux instrumens qui servent à mesurer. Les avantages du système anglais pourraient s'adapter au système français, si l'on consentait à renoncer à l'arithmétique décimale. Les nombres décimaux sont l'un des avantages théoriques du système français: mais l'expérience la plus décisive a prouvé, en France, que

ces nombres ne s'adaptent pas bien aux besoins de l'homme en société; et, dans le commerce en détail, on s'est écarté de l'arithmétique décimale, qui n'a d'avantage réel que pour les calculs. Excepté pour les mesures itinéraires, le mètre est trop long; le pied est plus commode et plus convenable. Le despotisme décimal a été trouvé trop arbitraire pour qu'on l'endurât. Le pied et la division duodécimale sont fondés dans la nature de l'homme et de ses relations avec les choses extérieures. On a besoin de moitiés, de quarts, de tiers; et le rapport du pied au mètre, qui est, à fort peu près, un tiers, est malheureusement incommensurable. La moitié du kilogramme diffère peu de la livre ancienne; mais le nouveau système n'admet ni la moitié ni le quart de la livre, puisque le kilogramme n'a ni quart ni huitième. Le litre diffère peu de l'ancienne pinte; c'est un grand avantage: mais, d'un autre côté, la division décimale s'y applique moins bien encore qu'au poids. Toutes les mesures de capacité sont de forme cylindrique. Le litre est une mesure dont le diamètre est la moitié de la profondeur; on peut le diviser en moitiés, quarts ou huitièmes: il suffit de diviser ainsi la profondeur en conservant le diamètre; mais on perd toute convenance de proportion, quand on prend un dixième de la profondeur et que l'on conserve le diamètre.

L'expérience a prouvé que le principe de la division décimale ne convient qu'à un système général de métrologie; qu'il ne s'applique naturellement qu'aux nombres; mais que le temps, l'espace, la pesanteur et l'étendue, le rejettent inflexiblement. Les Français, après l'essai, ont été forcés de l'abandonner dans les mesures de l'astronomie, de la géographie, de la navigation, du temps, du cercle et de la sphère; de le modifier même pour les mesures superficielles et linéaires, et d'entrer en composition avec les fractions vulgaires dans les usages les plus communs de tous les poids et de

toutes les mesures. L'arithmétique décimale est une invention de l'homme pour la numération; elle n'est point une propriété du temps, de l'espace ou de la matière. Il est donc très-douteux si l'application de l'arithmétique décimale aux poids et aux mesures pourra compenser les inconvéniens inévitables qu'elle entraîne. Un décret de 1812 annonçait une révision du nouveau système métrique après un intervalle de dix ans; ce qui semble indiquer un doute si le système lui-même serait maintenu. A l'expiration des dix ans, le Gouvernement ordonnera-t-il la révision? on n'en sait rien encore. En attendant, le système entier doit être considéré comme une expérience dont les résultats apprendront aux nations étrangères si elles doivent l'adopter. La proportion des monnaies aux poids est un avantage réel; mais cette proportion est troublée par l'alliage. Ce qu'on appelle *tolérance* et *remède* doit être entièrement banni: la tolérance est une injustice; et le remède, une maladie.

Si ce rapport devait présenter un système de poids, de mesures et de monnaies, déduit d'une unité fondamentale, combinée autant que possible avec la division arithmétique, et dont le principe dominant fût l'uniformité, sans aucun égard pour l'usage, il faudrait proposer une monnaie d'argent de neuf parties pures, avec une partie d'alliage d'une épaisseur égale à un dixième de son diamètre : le diamètre serait un dixième de pied; et le pied, un quart du mètre français. Ce dollar serait l'unité de poids aussi-bien que des monnaies; ses multiples et sous-multiples seraient décimaux pour les mesures de capacité: l'unité serait un vaisseau contenant le poids de 10 dollars d'eau distillée à la température de 10 degrés du thermomètre centigrade. L'arithmétique décimale s'appliquerait à son poids, et les fractions vulgaires à sa mesure cubique.

Le poids et la pureté de la pièce seraient un article inal-

térable de la constitution. Ce système, par sa connexion au mètre français, aurait tous les avantages de l'uniformité; mais les monnaies n'entrent pas dans les résolutions des deux chambres.

L'uniformité et la précision de la nomenclature française, théoriquement parlant, sont un avantage si grand et si peu équivoque, qu'il fournirait l'argument le plus fort pour l'adoption du système entier; mais quel pouvoir moral peut-on opposer à l'opiniâtreté du préjugé et au courant impétueux de l'usage! L'adoption franche et facile d'une douzaine de mots nouveaux aurait assuré le triomphe du système français; les poids et les mesures auraient été de la plus grande justesse; et le bonheur de l'uniformité, dont la France aurait joui, aurait recommandé son système à tout le genre humain. Il est mortifiant pour la philantropie de voir que cette partie du système est précisément celle qui n'a pu réussir.

De toutes les réflexions que suggère l'état du système métrique en France, il résulte que le temps n'est pas encore arrivé de rejeter entièrement nos poids et nos mesures pour adopter les poids et les mesures des Français. Il n'en est pas moins vrai que le nouveau système tend d'une manière si directe à l'amélioration de la condition physique, morale et intellectuelle de l'homme sur la terre, qu'il ne peut y avoir ni doute ni hésitation dans l'idée que son adoption générale et définitive est une chose extrêmement à desirer.

N'est-il pas étonnant que toutes les nations s'accordent si facilement pour adopter les mêmes instrumens de destruction, et qu'il paraisse impraticable de convenir de l'adoption d'un petit nombre d'instrumens indispensables dans les communications de paix, d'amitié et de bienfaisance; que toutes aient la même artillerie, la même mousqueterie, les baïonnettes, les épées et les lances, pour le commerce des meurtres, et qu'on refuse de peser avec la même livre, de mesurer par la

même règle, de boire dans la même coupe, et enfin d'employer les mêmes matières pour fournir à nos besoins et contribuer à nos jouissances réciproques? Toutes les nations civilisées desirent un système général et uniforme de poids et de mesures. La France s'est formé un système, fruit du génie et de l'adresse, et adapté à tous les usages. Mais ce système est nouveau et susceptible d'amélioration; son existence est encore incertaine dans le pays qui lui a donné naissance : son établissement universel serait un grand bien; mais il ne peut être que l'effet d'un consentement général. La force, l'énergie de l'opinion doit précéder celle de la législation. Il serait convenable à la dignité du congrès de consulter l'opinion des nations civilisées avec lesquelles les États-Unis ont les relations les plus fréquentes, pour constater de la manière la plus exacte l'état de leurs poids et mesures, de prendre et suivre avec persévérance, mais avec modération, les voies les plus propres à conduire à l'établissement définitif et général du système. Si, pour commencer, on s'adressait à l'Angleterre et à la France, on ne doit pas s'attendre à réussir tout d'abord. Quelque desir que l'Angleterre ait témoigné de l'uniformité, elle s'est peu occupée d'étendre cette uniformité aux pays étrangers. L'opinion ne change que très-lentement, l'aversion est profonde pour toutes les innovations. Le calendrier grégorien n'a été adopté en Angleterre qu'au bout de deux cents ans; la Russie s'y est refusée jusqu'aujourd'hui. Nous ne proposons pas d'adopter aujourd'hui la métrologie française; le temps ne paraît pas mûr : on est plus éloigné encore de la proposer aux autres nations; mais, en les consultant, on laissera voir que le but qu'on se propose est l'établissement d'un système commun à toutes les nations civilisées.

On ne fera donc pour le moment aucune innovation dans les poids et mesures des États-Unis, et le congrès serait invité à autoriser le pouvoir exécutif à faire, à cet égard, les

communications nécessaires aux gouvernemens européens auprès desquels il a des agens accrédités.

De toutes les nations dont l'origine est européenne, celle des États-Unis est celle qui a le moindre besoin d'un changement dans le système des poids et mesures. À l'exception de la Louisiane, le système est le même pour tous les états. Il n'offre pas ces différences qui ont eu leur source dans la féodalité. En se transplantant en Amérique, on y porta les poids et les mesures fixés par la loi.

L'auteur entre ensuite dans les détails sur la législation des différens états, relativement aux poids et mesures. La constitution donne au congrès le droit de *fixer le modèle des poids et mesures :* ces mots renferment-ils le pouvoir de tout changer? cela paraît fort douteux. Rien de plus aisé que de faire une loi nouvelle; la difficulté est de la faire exécuter; et quand l'autorité du congrès serait incontestable pour établir un système tout nouveau, on pense que le système français n'a pas encore acquis la perfection, qui seule pourrait justifier un effort aussi extraordinaire du pouvoir législatif.

On propose au congrès, quand il adoptera un étalon pour les mesures de longueur, de déclarer le rapport de cet étalon avec le mètre français. Il faudrait comparer cet étalon avec le mètre des archives. Jusqu'à présent, les comparaisons qui ont été exécutées offrent des différences telles, qu'on ne sait à quoi s'arrêter.

	pouces angl.
En 1797, Shuckburgh trouva que l'*yard* d'Élisabeth était de.	36,015.
L'étalon parlementaire de Bird, de........................	36,00023.
L'échelle du général Roy était de........................	36,00038.

En 1818, le capitaine Kater trouva l'échelle de Roy, de 39,40144 de l'échelle de Troughton. La différence est de $\frac{105}{10000}$, un peu plus que $\frac{1}{100}$ de pouce.

Les expériences faites par l'Académie des Sciences donnent pour le mètre....... 39,3824 pouces anglais.

Le capitaine Kater et les membres de la Société royale................ 39,3708. Différence, 0,0116.

En Amérique, M. Hassler.............. 39,38024797.

En 1814, le pendule battant les secondes fut trouvé.......................... 39,13047 à Londres.

En 1818, le capitaine Kater............. 39,13842.

On pourrait conclure que le mètre vaut 39,38 ; et le pendule, 39,14.

Quand ce rapport sera définitivement arrêté de concert avec la France, l'acte pourrait déclarer que le mètre de platine de France est de 39,3802 pouces anglais, et que 472,5623 millimètres sont égaux au pied.

Le plan proposé au congrès consiste en deux articles :

Fixer un modèle avec l'uniformité partielle dont il est susceptible pour le présent, en excluant toute innovation ;

Consulter les nations étrangères pour l'établissement futur et définitif d'une uniformité universelle et permanente.

Cette uniformité universelle, adaptée à la nature des choses, à l'organisation physique et à l'amélioration morale de l'homme, serait une chose si heureuse, que, s'il existait sur la terre une combinaison de pouvoir et de volonté capable de l'accomplir par l'énergie d'un acte unique et simple, l'être qui aurait cette faculté serait l'un des plus grands bienfaiteurs de la race humaine. Mais nous sommes encore loin de ce point de perfectibilité. La gloire de la première tentative appartient à la France ; la France a considéré ce sujet dans toute son étendue ; la France y a vu les intérêts de tous les peuples et de tous les âges. En formant son système, elle a agi comme représentant toute la race humaine présente et à venir. Elle l'a établi par une loi sur son propre territoire ; elle a proposé

ce bienfait à l'acceptation des autres états. Ce bienfait est digne d'être accepté ; ce qui ne fait pas une question : mais l'opinion est la reine du monde ; et, pour étendre ce bienfait à d'autres territoires, le pouvoir doit attendre que le temps et l'exemple des bons effets du nouveau système aient pris sur l'opinion des autres peuples cet ascendant, seul capable de donner le ressort et la direction aux vues du pouvoir.

Ce rapport, écrit en anglais, contient 135 pages format *in-8.°*, d'un caractère serré ; il est suivi de 110 pages de pièces justificatives.

On y trouve des tables des poids et mesures usités dans les différentes parties des États-Unis ;

Un Mémoire sur la valeur proportionnelle de la livre sterling et du dollar ;

Un Mémoire où M. Hassler donne toutes ses expériences et tous ses calculs ;

Une correspondance et des ordonnances relatives aux poids et mesures ;

Une lettre de M. Gallatin, où l'on voit quelques mesures du pendule, et un soupçon que le mètre en cuivre fait pour M. Hassler, et qui appartient aux États-Unis, n'est pas assez exact pour l'objet qu'on se propose ;

Enfin une notice des mesures de Suède, comparées à celles de France et d'Angleterre.

Le titre anglais est *Report upon weights and measures, by John Quincy Adams, secretary of state of the United States*, 1821. L'auteur m'a fait l'honneur de m'en adresser un exemplaire. L'Académie en a reçu un de M. l'ambassadeur des États-Unis (M. Gallatin).

Voyages dans la Grande-Bretagne, par M. Charles Dupin. *Seconde Partie,* Force navale : *4.e vol.*, Études et Travaux.

Le 4.e volume des *Voyages dans la Grande-Bretagne* est un des plus importans de cet ouvrage, et par le sujet, et par la manière dont il est traité; c'est le fruit de l'expérience et du talent d'observation d'un ingénieur consommé.

Ce volume est divisé en six livres, qui traitent successivement de la force morale et des études; des exercices, de la tactique et des combats; de l'artillerie de marine, de la force et de la durée des bâtimens de guerre, enfin des établissemens centraux des ports et des arsenaux de l'empire britannique.

Dans le premier livre, l'auteur examine l'influence exercée sur la marine, 1.° par la popularité dont ce genre de force militaire jouit en Angleterre; 2.° par les honneurs et les récompenses que décernent le prince, le parlement et les citoyens. Il montre également l'influence exercée par les châtimens et par la discipline, à laquelle la Grande-Bretagne a dû ses victoires navales.

Nous devons ici plus particulièrement appeler l'attention sur les chapitres qui montrent les services rendus à la marine par les sciences physiques et mathématiques : ce sujet, entièrement neuf, ainsi que l'examen des moyens d'instruction et des écoles de la marine anglaise, sont traités d'une manière qui ne laisse rien à desirer.

Les arsenaux de la marine britannique, long-temps un objet de mystère pour les étrangers, n'avaient jamais été décrits lorsque l'auteur visita les ports de la Grande-Bretagne. Sa description ne laisse rien à desirer de ce qui peut intéresser dans l'ensemble des grands travaux que présentent ces

établissemens. Cette seule description est un service essentiel rendu à la force navale des diverses nations maritimes.

Nous laissons aux hommes spécialement versés dans les arts de la marine le soin de prononcer sur la partie technique de l'ouvrage de M. Dupin. Ils l'ont fait en donnant leur suffrage à cette production de la manière la plus flatteuse pour l'auteur. Les Anglais mêmes, malgré quelques récriminations sur certains sujets qui flattaient peu leur amour-propre, rendant sur tout le reste une pleine justice à l'auteur, déclarent que peu d'officiers connaissent aussi bien que M. Dupin les détails essentiels de leur force militaire et de leur force navale : ajoutons qu'aucun n'en connaît aussi bien l'ensemble.

M. Dupin annonce qu'ayant achevé d'examiner les moyens militaires de la Grande-Bretagne, il va maintenant nous faire connaître les moyens de prospérité que ce royaume doit aux arts de la paix. Il traitera d'abord de la force commerciale, ensuite de la force productive. Il aura présenté de la sorte, de la manière la plus complète et la plus approfondie, tous les élémens de la puissance britannique parvenue au plus haut degré de sa richesse et de sa splendeur.

Discours sur quelques avantages de l'industrie et des machines en France et en Angleterre, prononcé, le 24 avril 1821, dans la séance générale des quatre Académies de l'Institut royal de France.

Dans ce discours, M. Dupin s'est proposé pour but de montrer spécialement les avantages que l'Angleterre a déjà retirés de l'emploi des machines, et sur-tout des machines à vapeur, et les services que la France pourrait également en retirer. Il montre combien peu sont fondés les reproches qu'on a cru devoir faire aux machines, d'ôter à l'indigent des moyens de travail et d'existence. Il fait voir au contraire

que la masse du peuple est plus heureuse et jouit d'une aisance plus réelle, par la grande abondance de produits que fabriquent les machines pour satisfaire aux besoins, aux plaisirs, au luxe des hommes.

Notice analytique sur les Travaux de M. J. Rennie, premier Ingénieur de la Marine britannique.

M. DUPIN, durant son cinquième voyage en Angleterre, eut la douleur de perdre son ami M. J. Rennie. Le desir de payer au célèbre ingénieur britannique un juste et dernier tribut de regrets et d'amitié a fait écrire cette notice, où les principaux services rendus par M. Rennie aux arts des travaux publics, et sur-tout des constructions hydrauliques de la marine, sont énumérés et appréciés avec équité. Il est honorable pour les deux nations de voir un tel tribut payé par une main généreuse, sans égard à des jalousies nationales, qui rendaient trop souvent injustes les écrivains d'un pays à l'égard des travaux et des hommes d'une nation rivale.

Commentaire de Théon sur la Composition mathématique de Ptolémée, traduit pour la première fois du grec en français, par M. HALMA, avec le texte en regard, livres I et II, contenant les développemens de la trigonométrie d'Hipparque et de Ptolémée.

Le traducteur a pris pour épigraphe la phrase de notre *Histoire de l'astronomie ancienne* par laquelle commence notre extrait de Théon : *Après les livres de Ptolémée, ce commentaire est l'ouvrage le plus important et le plus curieux qui nous reste des astronomes grecs.* En effet, il nous a conservé en entier l'arithmétique des Grecs, tant usuelle que sexagésimale; leur trigonométrie; des exemples calculés de tous les problèmes

astronomiques, et de l'usage de leurs tables de toute espèce; les élémens de ces tables, et de quoi les reconstruire, si, par malheur, elles eussent été perdues, et que *la Composition mathématique* eût éprouvé le même sort que les ouvrages d'Hipparque. Aucune traduction, ni en latin, ni en une langue quelconque, n'avait paru jusqu'ici du Commentaire de Théon. La raison en est sans doute qu'avec un peu d'attention on trouverait dans Ptolémée lui-même tout ce qu'on trouve avec plus d'étendue et plus de développemens dans son commentateur. On remarque cependant quelques théorèmes qui ne sont énoncés ni dans Théodose, ni dans Ménélaüs, ou que Ptolémée avait donnés sans aucun éclaircissement. Les démonstrations de Théon parfois surpassent en facilité celles qu'ont imaginées quelques modernes. D'autres, que nous obtenons d'une manière plus courte, ont l'avantage de nous montrer plus exactement les limites des connaissances des Grecs, et ce qui manquait aux premiers inventeurs pour démontrer avec facilité des vérités mathématiques qu'ils avaient eu le mérite d'apercevoir. Cet ouvrage, dont nous sentons toute l'importance, a ses défauts, qui ne sont que trop sensibles, et qui seront remarqués à la première vue par le lecteur. Théon commence par annoncer qu'il ne suivra pas l'exemple des commentateurs ordinaires, qui se montrent fort diserts sur les passages qui n'offrent aucune difficulté, et qui passent sous silence tout ce qui peut donner quelque peine à entendre et qui suppose des notions que le temps a fait perdre. Il n'a pas toujours été bien fidèle à cette promesse : on en verra plus d'un exemple dans ces deux premiers livres et dans tous ceux qui suivront. Dans un simple extrait, tel que nous l'avons donné dans notre *Histoire de l'astronomie*, nous avons pu supprimer en entier ces longues explications dont le lecteur n'a plus aucun besoin, et qui souvent obscurcissent ce qui serait clair sans tous ces développemens si

prolixes. Nous avons pu nous borner aux connaissances positives que l'on chercherait vainement ailleurs; on accorde moins de liberté aux traducteurs et aux éditeurs, et c'est sous ce double aspect que se présente M. Halma. Il n'existe qu'une seule édition grecque du Commentaire de Théon : le traducteur doit le reproduire en entier; il doit montrer le texte épuré, s'il est possible, des fautes de copie ou d'impression qui ne sont pas rares dans l'édition de Bâle; il a dû refaire avec plus d'exactitude et plus de netteté les figures trop souvent négligées ou altérées par les copistes ou les imprimeurs. Tous ces devoirs, M. Halma a tâché de les remplir avec fidélité toutes les fois qu'il l'a pu, sans refondre en entier le texte et les figures; mais, pour ne point hasarder des corrections qui sembleraient arbitraires, il a été forcé de laisser subsister quelques incohérences. Malgré ces fautes, son édition, beaucoup plus facile à lire et à comprendre, est un service réel rendu à ceux qui desirent conserver dans leur intégrité les ouvrages qui ont échappé aux ravages des temps.

Le discours préliminaire contient la notice des secours qu'il a trouvés dans les manuscrits de la Bibliothèque du Roi, et même dans deux versions latines restées inédites. Parmi les notes, on en remarque une curieuse, tirée de Vitruve, qui nous donne une description exacte du *chorobate*, espèce de niveau assez imparfait, simplement indiqué par Théon, suffisant peut-être pour l'architecte, mais non pas pour l'astronome.

Toute la trigonométrie d'Hipparque, de Ménélaüs et de Ptolémée, était renfermée dans deux théorèmes généraux. Théon, en les développant, en a fait quatre, pour qu'ils pussent s'adapter plus facilement aux divers cas qui peuvent se présenter; il en a donné des démonstrations exactes et très-détaillées, en suivant d'ailleurs les principes et la marche de son auteur. M. La Grange, qui ne connaissait que celles

de Ptolémée, les avait jugées dignes de son attention, et nous les avons trouvées tout entières écrites de sa main dans ses manuscrits déposés à la bibliothèque de l'Institut. Ces démonstrations importantes sont un peu altérées, soit dans le texte, soit dans les figures de Théon; en les reproduisant dans notre *Histoire de l'astronomie ancienne,* tome II, pag. 562 et suivantes, nous avons pris des libertés que M. Halma ne s'est pas crues permises. Il a voulu sans doute laisser à chaque lecteur la faculté de restituer le texte à sa guise. Il est vrai qu'il faudra que ce lecteur soit géomètre : mais, s'il ne l'est pas, il lui importe assez peu que la démonstration soit bien exacte et bien claire; et M. Halma lui dit en plus d'un endroit que, *pour éclaircir ce que Théon a embrouillé, et rétablir ce qu'il faut entendre, il faut consulter le second volume de notre Astronomie ancienne*, page 156.

Le premier livre de Théon avait d'abord paru seul. M. Halma vient de publier le second avec *les Phénomènes d'Aratus de Soles et de Germanicus César, les Scholies de Théon, les Catastérismes d'Ératosthène et la Sphère de Léontius, traduits pour la première fois sur les manuscrits de la Bibliothèque du Roi.* Paris, 1821.

Dans le discours préliminaire, où il discute le mérite d'Aratus comme poète et astronome, il paraîtrait pencher vers l'opinion de quelques savans, qui distinguent deux Hipparques, l'un de Bithynie et l'autre de Rhodes. Nous avouons que nous sommes de l'opinion contraire; que nous n'admettons qu'un Hipparque né en Bithynie, où il a fait son commentaire sur Aratus, quelques observations de levers, de couchers et de déclinaisons, et enfin ses premières recherches trigonométriques, et qui, s'étant fixé depuis à Rhodes, y composa son catalogue d'*étoiles*, et toutes ses recherches sur la théorie du soleil, de la lune et des planètes. Lui-même nous donne, dans son Commentaire, la preuve qu'il avait une

trigonométrie sphérique tout entière, et qu'il savait calculer les problèmes d'astronomie les plus compliqués. Ptolémée, en copiant ou recommençant tous ces calculs, et citant les recherches astronomiques de son modèle, ne nomme qu'un seul Hipparque, qui observait à Rhodes. Théon nous apprend qu'Hipparque avait fait à Rhodes une longue suite d'observations, et qu'il était auteur d'une table des cordes au moyen desquelles on exécutait alors tous les calculs trigonométriques qu'on a faits depuis avec les sinus naturels. Il nous paraît peu probable qu'il ait existé dans le même temps deux Hipparques, tous deux possesseurs d'une trigonométrie complète, qui jusqu'à eux avait été ignorée de tous les géomètres grecs. L'équivoque vient uniquement du surnom de Bithynien, qu'Hipparque se donne lui-même en tête de son commentaire, et du nom de Rhodien, que Pline lui donne en parlant de ses travaux astronomiques les plus importans. Ce point de critique, sur lequel sont divisés quelques auteurs, n'est, au reste, d'aucune importance pour l'objet principal de M. Halma. Il nous dit, à la page suivante, que Pingré s'excuse sur son *ignorance de la langue grecque*, de ce qu'il n'a pas fait au poème d'Aratus le même honneur qu'il a fait à Manilius. Dans la réalité, Pingré se borne à dire qu'il n'est pas assez *familiarisé avec la versification grecque* pour juger Aratus sous ce point de vue. Pingré savait assez de grec pour traduire Aratus, sur-tout à l'aide de la traduction latine, dont il avait plusieurs éditions. Il motive tout autrement le choix qu'il a fait de la version de Cicéron, pour la présenter à ses lecteurs. M. Halma préfère Germanicus, qui n'est ni plus complet, ni aussi fidèle; mais tous les littérateurs ont Cicéron, tous n'ont pas Germanicus: on voit donc que cette nouvelle critique est moins importante encore que la première.

En tête de ce discours préliminaire, il a fait graver une vignette qui représente une impératrice *Eudocie*, qui, dans

un ouvrage grec, nous a laissé une notice biographique d'Aratus. Il nous en donne un extrait. Au reste, quoiqu'il vante un peu trop Eudoxe, dont Aratus n'a fait que versifier deux ouvrages, le traducteur ne professe pas une admiration bien prononcée pour le poète, dont il borne à peu près le mérite à une description fidèle des constellations, telles qu'on les figurait de son temps. Il est encore moins admirateur du prétendu Ératosthène, duquel il nous dit, en terminant sa traduction : *Que de sottises! que d'inepties! et comment Ératosthène a-t-il pu les écrire!* Mais les Catastérismes ont été réimprimés assez nouvellement en Allemagne, en grec et en latin, avec des notes; et l'éditeur allemand nous a depuis reproché de n'avoir pas reproduit toutes ces vieilleries en entier, au lieu d'en donner des extraits d'une étendue proportionnée au mérite que nous y reconnaissions.

Nous n'avons que peu de chose à dire du mécanicien Léonce, qui fabriquait pour les navigateurs des sphères d'Aratus pour servir à leurs observations sur mer. (Voyez *Histoire de l'astronomie ancienne*, tome I, page 138.) Au frontispice, on voit un zodiaque qui fournit à l'éditeur le sujet d'une dissertation qu'il a intitulée *Astromythique.* Ce zodiaque a cela de particulier, qu'à l'intérieur, à côté des douze signes, on voit douze divinités que M. Halma s'est contenté d'indiquer par les symboles caractéristiques de nos douze planètes. Ce zodiaque a été publié par Visconti dans les *Monumenti Gabini*, où il a déclaré que ces douze divinités n'ont aucun rapport à l'astronomie; mais le nouvel éditeur ne trouve pas moins étonnant que ces douze figures soient précisément celles dont les noms ont été donnés aux planètes. Rien ne serait plus simple pour les planètes anciennement connues; mais pour les autres, il y a une petite difficulté qui mérite quelque attention. Quatre d'entre elles sont télescopiques; et à moins d'accorder aux anciens les lunettes, qu'ils n'ont cer-

tainement jamais connues, il est difficile d'admettre que les anciens aient pu les voir ou les deviner : au lieu qu'en supposant que le sculpteur ait eu seulement l'idée de représenter douze divinités principales, rien de plus simple que d'y voir figurer Vesta, Junon, Cérès et Pallas, qu'on a choisies pour donner aux nouvelles planètes des noms qui fussent en harmonie avec les anciens. Quant à Uranus, qui est visible à la vue simple, quoiqu'on ait observé le ciel pendant deux mille ans sans l'apercevoir, l'auteur de la dissertation en a fait Vulcain. Au reste, il est juste de dire qu'il ne donne ses conjectures que comme *un simple jeu d'esprit*, *une espèce de distraction qu'il s'est permise pour se reposer un peu des longueurs interminables de Théon.*

En rendant compte, l'année dernière, de plusieurs opuscules de Ptolémée et autres astronomes, récemment publiés par M. Halma, nous avions hasardé sur les Chaldéens des réflexions qui paraissent avoir fait quelque peine à M. Ideler; et cependant ce même article contenait les témoignages les plus marqués de notre estime pour les connaissances de M. Ideler comme astronome, helléniste et orientaliste. Mais, en discutant les preuves qu'il donne de la science des Chaldéens, nous avions cité la phrase où son traducteur lui fait dire : *Il est impossible qu'ils n'eussent pas des tables*, *résultats de longues recherches.* Cette assertion nous avait paru *hardie.* M. Ideler nous apprend qu'il a dit, au contraire : *Il est impossible qu'ils eussent des tables*, *&c.*; et en effet, par un carton, M. Halma vient de faire disparaître cette faute. Nous voyons avec plaisir que sur ce point nous sommes parfaitement du même avis, M. Ideler et moi; mais il ajoute : *Il est certain que les Chaldéens avaient la période de dix-huit ans*, *et elle pouvait leur servir à annoncer les éclipses.* Or nous avouons que ces dernières assertions nous paraissent au moins fort douteuses. Aucun auteur ancien ne donne cette période aux

Chaldéens. Suidas, moine du XI.e siècle, a dit, il est vrai, que le saros était une période chaldéenne dont 120 formaient un espace de 2222 ans, et qu'ainsi le saros était une période de dix-huit ans et six mois. Le calcul de Suidas est fort juste; mais la période écliptique n'est que de dix-huit ans dix jours et un tiers. On a tourmenté ce passage si simple pour lui donner le sens qu'on voulait y trouver. Mais, après tout, le témoignage d'un moine du XI.e siècle est-il en ces matières plus imposant que celui de Halley, qui ne donne son idée que comme une conjecture? Mais à quoi cette période aurait-elle pu servir aux Chaldéens? et comment l'auraient-ils trouvée? Ce ne peut être par l'observation; car, à cause du tiers de jour, l'éclipse visible aujourd'hui pouvait très-bien ne l'avoir pas été dix-huit ans plus tôt, et ne l'être pas dix-huit ans plus tard, sans parler des nuages qui auraient pu empêcher l'une des deux observations. Ces mêmes raisons prouvent qu'on se serait exposé à bien des mécomptes, si l'on eût hasardé d'employer la période à prédire les éclipses futures, et sur-tout celles du soleil. Nous disons plus: jamais la période n'a donné pour le même lieu deux éclipses totales du soleil à dix-huit ans de distance. Ce n'est donc pas au moyen de cette période que Thalès aurait pu prédire aux peuples d'Ionie l'éclipse totale dont parle Hérodote. Ces raisonnemens sont si simples, que nous avons toujours regardé comme impossibles toutes les conjectures et les explications auxquelles cette période a donné lieu. Il est, au reste, un moyen bien sûr de s'en convaincre. Dans la première édition de *l'Art de vérifier les dates*, Lacaille a donné la liste complète des éclipses *visibles en Europe* pour les dix-huit premiers siècles de l'ère chrétienne. La liste eût été bien moins nombreuse, si l'auteur se fût borné à un seul horizon, tel que celui de Paris ou de Babylone. Nous avons examiné chacune à son tour toutes les éclipses de cette liste, et nous avons tenu compte de toutes celles qui ont été

ramenées par la période. Le résultat de ces comparaisons a été que sur 1000 éclipses de lune il n'en revenait que 477, c'est-à-dire, moins que moitié. Réduisons l'Europe à l'horizon de Paris, et faisons la part des jours nébuleux : combien en restera-t-il qui seront revenues? Pour le soleil, vous n'en trouverez pas dans la table de Lacaille 288 sur 1000, et aucune qui revienne totale.

Concluons que cette période ne peut être utile qu'à ceux qui se servent des tables pour calculer des éphémérides. Elle indique les jours où *il est possible* qu'une éclipse ait lieu; alors quelques lignes de calcul suffisent pour savoir si elle aura lieu effectivement, et si la lune sera sur l'horizon. Les Chaldéens ont donc probablement toujours ignoré cette période; ils n'auraient pas su s'en servir : tout ce qu'ils auraient pu conclure d'une éclipse réellement observée, c'est que, dix-huit ans plus tard, il eût été bon de se rendre attentif pour voir si en effet l'éclipse reviendrait. Que de traditions répétées d'auteurs en auteurs, et admises légèrement par des lecteurs peu attentifs, disparaissent ainsi dès qu'on prend la peine de les soumettre au moindre examen !

Melchior de Briga, dans son gros livre sur les éclipses, après avoir inutilement cherché à établir des périodes écliptiques, d'après toutes les éclipses observées qu'il a pu rassembler de tous les pays, est obligé de recourir au calcul; il compose ainsi des périodes de toute espèce, et trouve enfin qu'après cent périodes de dix-huit ans on se retrouverait au même point qu'au commencement. D'après cette idée, la table de Lacaille pour les dix-huit premiers siècles de notre ère pourrait servir pour dix-huit autres siècles, successivement à l'infini. Mais nous n'oserions en répondre même pour la présente période. Cette même table nous fournit encore une remarque qui confirme ce que nous disions plus haut : c'est que, de l'an 710 à l'an 732, la période manque

son effet quatorze fois de suite; c'est-à-dire que quatorze éclipses de lune consécutives manquent de correspondante dans la période qui suit. Onze fois la période est en défaut, de 1143 à 1160; dix fois, de 815 à 826; dix fois, de 1740 à 1757; et huit fois, de 1406 à 1418. En voilà plus qu'il ne faut pour déconcerter toutes les recherches.

Quand la période est plus heureuse, jamais elle ne réussit que deux, trois, quatre ou cinq fois de suite, c'est-à-dire, pour cinq éclipses consécutives; et ce dernier cas est unique dans la table de Lacaille. C'est ce qui m'a fait dire que la période ne pouvait donner jamais du retour d'une éclipse qu'une faible probabilité, comme de 1 contre 3 ou 4. Nous remarquerons enfin que nous ne parlons que de *probabilité* dans une discussion où il faut absolument renoncer à la *certitude*, et que M. Ideler lui-même se borne à dire que la période *pouvait* servir aux Chaldéens pour annoncer les éclipses, et qu'il n'a pas osé dire qu'elle leur *servait* réellement.

RAPPORTS

APPROUVÉS PAR L'ACADÉMIE.

Traité de la science du dessin, par M. VALLÉE. *Commissaires, MM.* Arago, *rapporteur,* de Prony, Fourier.

« Il serait aussi long qu'inutile de présenter ici une ana-
» lyse détaillée des moyens de solution plus ou moins nou-
» veaux que l'auteur a employés : nous nous contenterons de
» dire que, dans les parties qu'il nous a été possible d'exami-
» ner, les méthodes nous ont paru fort bien choisies et con-
» formes aux vrais principes de la géométrie descriptive; que
» des exemples nombreux et variés en font ressortir tous les
» avantages, et offrent aux artistes des exercices fort instruc-
» tifs; que les démonstrations sont méthodiques et très-clai-

» rement rédigées. Le recueil de planches qui accompagne » l'ouvrage a été fait par M. Vallée lui-même, et sera un véritable modèle de travail graphique. Des données heureusement choisies, des solutions curieuses et inattendues, les » constructions quelquefois assez compliquées qui les ont fournies, se groupent toujours sans confusion dans des espaces » fort resserrés. Vos commissaires espèrent que M. Vallée sera » assez encouragé dans son utile entreprise, pour que la précieuse collection de ses épures soit confiée à un graveur » capable d'en faire ressortir tout le mérite. L'ouvrage nous » paraît d'ailleurs devoir être très-utile aux ingénieurs civils » et militaires, aux architectes, aux peintres, et en général à » toutes les personnes qui cultivent les arts. Nous proposons » en conséquence à l'Académie de lui donner son approbation. » 19 mars 1821. »

Voyage autour du monde de la corvette l'Uranie, *commandée par M.* DE FREYCINET. *Commissaires, MM.* Arago, *rapporteur,* de Humboldt, Cuvier, Desfontaines, de Rossel, Biot, Thénard, Gay-Lussac.

L'ACADÉMIE a arrêté que ce rapport serait imprimé dans la partie historique de ses Mémoires.

L'Académie nous a chargés, MM. de Humboldt, Cuvier, Desfontaines, de Rossel, Biot, Thénard, Gay-Lussac et moi (M. Arago), de lui faire un rapport sur l'ensemble des travaux exécutés pendant le voyage de *l'Uranie* autour du monde, sous le commandement de M. le capitaine Freycinet. Nous allons nous acquitter aujourd'hui de ce devoir, en entrant dans des détails qui paraissent également commandés par l'importance et par la variété des résultats que nous avons eu à examiner.

Le but principal de l'expédition commandée par M. de Freycinet était la recherche de la figure du globe et celle des élémens du magnétisme terrestre; plusieurs questions de météorologie avaient aussi été indiquées par l'Académie comme très-dignes d'attention. Quoique la géographie ne dût être, dans ce voyage, qu'un objet secondaire; on pouvait croire que des officiers expérimentés, pleins de zèle et munis de bons instrumens, ne feraient pas le tour du globe sans ajouter quelques précieux résultats aux tables de longitude et de latitude. En partant sans embarquer un naturaliste de profession, nos navigateurs avaient contracté l'obligation, sinon d'étudier, du moins de recueillir pour les musées tous les échantillons des trois règnes qui paraîtraient offrir quelque intérêt. On devait attendre, en outre, du dessinateur que le Gouvernement avait attaché à l'expédition, qu'il représenterait fidèlement avec le crayon, la plume ou le pinceau, ceux de ces échantillons que leur fragilité ou leur volume ne permettrait pas de transporter, et qu'il figurerait avec soin les vues de côtes qui, outre l'avantage de fournir aux navigateurs d'utiles indications, forment aussi parfois d'agréables paysages. Il était enfin naturel d'espérer que M. de Freycinet et ses collaborateurs ajouteraient quelques nouvelles particularités à l'histoire des peuples sauvages.

Les manuscrits de l'expédition, qui ont été déposés au secrétariat de l'Académie, forment trente-un volumes in-4.° Nous en avons examiné toutes les parties avec le plus grand soin; mais, n'ayant pu, faute de temps, calculer la totalité des observations, nous serons réduits sur beaucoup de points à présenter, pour ainsi dire, le simple catalogue des richesses que M. de Freycinet nous apporte. Pour procéder avec ordre, nous réunirons dans des paragraphes distincts tout ce qui est relatif à chaque genre particulier d'observations.

ITINÉRAIRE.

L'expédition fit voile de Toulon le 17 septembre 1817; elle arriva à Gibraltar le 11 octobre, et en partit le 15 pour Ténériffe, où elle séjourna du 22 au 28 du même mois. *L'Uranie* jeta l'ancre à Rio-Janeiro le 6 décembre. Cette ville ayant paru une station convenablement placée, tant pour les observations du pendule que pour celles des boussoles, M. de Freycinet y séjourna près de deux mois. La relâche suivante, celle du cap de Bonne-Espérance, dura du 7 mars au 9 avril 1818, et fut employée à des travaux analogues, d'autant plus importans, qu'ils pourront être directement comparés à ceux de Lacaille. Cette même considération donnera aussi de l'intérêt aux observations de l'île de France, où *l'Uranie* aborda le 5 mai 1818, et qu'elle ne quitta que le 16 juillet. Après avoir séjourné fort peu de temps à l'île de Bourbon, M. de Freycinet fit voile, le 2 août, pour la baie des Chiens marins, qu'il avait déjà visitée dans son premier voyage avec le capitaine Baudin. Il y arriva le 12 septembre, et en partit le 26 pour Coupang, chef-lieu des établissemens hollandais dans l'île de Timor. On verra plus bas l'énumération des observations de divers genres faites dans ce port depuis le 9 octobre 1818 jusqu'au 23 du même mois, jour du départ de l'expédition pour Diely, où réside, au nord de l'île, le gouverneur de la portion portugaise.

En quittant Diely le 22 novembre, *l'Uranie* se dirigea vers la petite île de Rawak, située près de Waigiou (Nouvelle-Guinée), presque exactement sous l'équateur: elle y séjourna depuis le 16 décembre 1818 jusqu'au 5 janvier 1819. La relâche suivante eut lieu aux Mariannes, et fut de près de trois mois, tant à raison de l'importance des opérations qu'on exécuta dans ces îles, que parce qu'il fallut renouveler les

provisions, et laisser aux malades, qui étaient alors en assez grand nombre, le temps de se rétablir. Le 5 avril 1819, *l'Uranie* fit voile de Guham; elle jeta l'ancre à Owhyhée, la plus considérable des îles Sandwich, le 8 août; le 16, elle visita Mowi; le 26, elle aborda à Woahou, et quitta définitivement cet archipel le 30 août pour le port Jackson, où l'on devait radouber le bâtiment et faire les observations ordinaires relatives à la pesanteur et au magnétisme. L'expédition partit, le 25 décembre 1819, de la Nouvelle-Galles du sud pour la Terre de Feu; mais à peine avait-on jeté l'ancre dans la baie du Bon-Succès le 7 février 1820, qu'un ouragan furieux força de couper subitement le câble et de se laisser aller à sec de voiles pendant deux jours consécutifs. Lorsque la tempête fut apaisée, il restait à choisir, vu l'importance des observations du pendule dans les hautes latitudes australes, entre le retour à la Terre de Feu, dont on était déjà assez éloigné, et une relâche aux îles Malouines: c'est ce dernier parti qu'adopta M. de Freycinet. L'Académie a entendu de la bouche de cet habile officier tous les détails relatifs au naufrage de *l'Uranie* qui eut lieu dans la baie Française, le 13 février 1820, et au séjour de l'équipage sur cette terre déserte. Il nous suffira conséquemment de dire que l'expédition quitta les Malouines le 27 avril 1820, sur un bâtiment américain que le hasard avait amené dans ces parages et dont M. de Freycinet fit l'acquisition; qu'elle relâcha d'abord à Monte-Video; que le 7 avril, après un séjour d'un mois dans la rivière de la Plata, *la Physicienne*, c'était le nom qu'on avait donné au nouveau bâtiment, fit voile pour Rio-Janeiro, et qu'elle y aborda le 19. Pendant un séjour de trois mois, nos navigateurs répétèrent à Rio les observations de divers genres qu'ils y avaient faites dans leur premier passage. Enfin, le 13 septembre 1820, la Physicienne quitta le Brésil; le mauvais temps la força, le 10 novembre, de relâcher à

Cherbourg; le 12 elle quitta ce port, et arriva le 13 au Havre, où elle a été désarmée. La durée du voyage a donc été de *trois ans* et près de *deux mois;* la longueur totale de la route que l'expédition a parcourue se monte à environ 23600 lieues, de 25 au degré.

OBSERVATIONS DU PENDULE.

La figure de la terre peut également se déduire de la comparaison du nombre d'oscillations que fait en vingt-quatre heures un même pendule de longueur invariable dans des lieux situés sous diverses latitudes, et de la comparaison des longueurs différentes que doit avoir un pendule simple pour exécuter dans tous ces lieux le même nombre d'oscillations en un temps donné. Ces méthodes exigent, l'une et l'autre, qu'on détermine dans chaque station quel nombre d'oscillations y fait, en un jour moyen ou sidéral, le pendule dont on se sert : elles diffèrent seulement en ce point, que, dans la première, il est indispensable que l'appareil oscillant n'éprouve jamais d'altération, ni dans sa forme, ni dans ses dimensions, tandis que, lorsqu'on suit la seconde, cette invariabilité n'est pas nécessaire, puisqu'on mesure la longueur après chaque observation. Cette dernière partie de l'expérience est fort délicate, et exige un établissement particulier, qu'on se serait difficilement procuré sur les côtes désertes où M. de Freycinet devait aborder. Tel est le motif qui détermina ce navigateur à se borner à l'emploi du pendule invariable; on décida toutefois que l'expédition emporterait deux de ces instrumens, et que leur construction serait confiée à M. Fortin.

Chacun des deux pendules que fournit d'abord cet habile artiste, est formé d'un cylindre de cuivre au bout duquel est une lentille lourde du même métal, qui fait corps

avec lui, puisque le cylindre et la lentille ont été fondus d'un seul coup; à l'autre extrémité du cylindre est invariablement attaché le couteau affilé d'acier destiné à supporter le pendule : pendant les expériences, le couteau repose sur un plan d'agate parfaitement dressé.

La forme et le diamètre qu'on avait donnés aux tiges de ces deux pendules, les soins apportés dans la construction des caisses et dans l'emballage, permettaient d'espérer qu'ils n'éprouveraient, durant le voyage, aucune flexion appréciable. Peut-être pouvait-on craindre que la grosseur du cylindre ne rendît un peu délicate l'évaluation de sa température, quoiqu'une telle cause d'erreur soit dans la classe de celles dont un observateur attentif peut aisément apprécier l'influence, puisqu'il est le maître de la renfermer entre des limites très-resserrées; ce soupçon, néanmoins, s'était à peine présenté, qu'on ordonna la construction d'un nouveau pendule invariable à tige plate. Notre confrère M. Bréguet, qui déjà avait gratuitement confié un de ses chronomètres à M. de Freycinet, voulut y joindre encore un pendule particulier, exécuté sous sa direction et à ses frais, d'où il est résulté que nos voyageurs ont eu à leur disposition quatre pendules invariables, savoir : deux pendules de cuivre à tige cylindrique, qui ont toujours été désignés dans les registres par les n.os 1 et 3; un pendule du même métal, mais à tige plate, construit aussi par Fortin : il porte le n.° 2; enfin le pendule n.° 4 de M. Bréguet, qui a une tige en bois verni, une lentille plate et très-lourde en cuivre, et un couteau d'un alliage particulier fort dur et peu susceptible d'oxidation.

Avant le départ de l'expédition, ces quatre instrumens avaient été observés à Paris, en 1817, par MM. de Freycinet, Lamarche, Mathieu, et l'un de nous (M. Arago). On s'était ainsi procuré un terme de comparaison pour toutes les

observations analogues qui devaient être faites dans les deux hémisphères; et, ce qui n'était pas moins indispensable, le moyen de reconnaître, au retour, si, durant le voyage, les tiges ou les couteaux avaient éprouvé des altérations appréciables. Tel est effectivement l'objet des observations que fait maintenant à Paris M. de Freycinet, et dont il ne tardera pas, sans doute, à rendre compte à l'Académie.

Il serait aussi long qu'inutile de décrire ici la marche qu'on a suivie dans ces premières expériences, et à laquelle M. de Freycinet s'est conformé dans tous les lieux de relâche: il nous suffira de dire qu'on ne pouvait pas adopter la méthode des coïncidences dont Borda et tant d'autres observateurs après lui ont tiré un si heureux parti, puisque nos navigateurs n'emportaient pas d'horloge; et d'ajouter qu'en admettant la bonté du chronomètre, le nouveau procédé, comme l'expérience l'a prouvé, le cède à peine à l'ancien en exactitude. Il eût été facile, à Paris, de découvrir les plus petites irrégularités dans la marche de la montre, par les comparaisons répétées qu'on en faisait avec la pendule sidérale de l'Observatoire: un tel moyen de vérification devant manquer partout ailleurs, M. de Freycinet s'est astreint à comparer sept à huit fois par jour le chronomètre n.° 72, qui, dès l'origine, avait été destiné aux observations du pendule, à trois autres chronomètres de Louis Berthoud et à celui de M. Bréguet: on serait dès-lors en mesure de tirer parti des observations, quand même la marche du garde-temps n.° 72 aurait été quelquefois un peu irrégulière.

Pour s'assurer que le trépied en fer qu'emportait M. de Freycinet, et sur lequel devait reposer l'appareil durant l'expérience, avait toute la solidité convenable, on suspendit successivement un des pendules à ce trépied et à un support épais en fer forgé, fixé sur deux fortes traverses du même métal scellées avec soin dans un des murs de l'Observatoire,

et fortifiées encore par deux arcs-boutans. Le nombre d'oscillations du pendule en vingt-quatre heures était exactement le même dans les deux cas. Ceux qui ont été témoins des curieuses expériences faites récemment par notre confrère M. Bréguet, sur les influences que deux horloges appuyées au même mur exercent l'une sur l'autre, ne considéreront pas la vérification dont nous venons de parler comme superflue.

Les angles horaires destinés à régler la marche du chronomètre n.º 72 ont été pris quelquefois avec des instrumens à réflexion, le plus souvent à l'aide d'un cercle répétiteur astronomique ; nous ajouterons enfin que par-tout on a déterminé la température avec les mêmes thermomètres, et qu'il ne pourra y avoir conséquemment aucune incertitude sur les corrections qui en dépendent, puisqu'avant le départ on avait soigneusement comparé ces instrumens avec ceux de l'Observatoire de Paris.

Rio-Janeiro est le premier lieu de relâche où le capitaine Freycinet ait séjourné assez long-temps pour établir les appareils du pendule. En janvier 1818, il observa dans cette ville le pendule n.º 1 à tige cylindrique de cuivre, et le pendule n.º 2 à tige plate ; à son second passage à Rio, en août 1820, il y a fait successivement osciller les quatre pendules.

Au cap de Bonne-Espérance, où Lacaille avait déjà mesuré le pendule absolu en 1752, M. de Freycinet a déterminé le nombre d'oscillations de ses quatre pendules invariables. Le calcul que l'un de nous a fait de ces observations nous permet d'annoncer qu'elles ne confirment pas la conséquence qu'on avait déduite des opérations de Lacaille sur la dissemblance des deux hémisphères.

Les observations des trois pendules en cuivre qui ont été faites à l'île de France, et sur-tout celles du port Jackson,

fourniront aussi sur cette question des données précieuses. Ces dernières, comparées aux observations faites au Cap, presque sous la même latitude, mais à 134 degrés de différence en longitude, nous apprendront, autant du moins que ce genre d'observations le comporte, si, dans l'hémisphère austral, les parallèles ont un aplatissement sensible.

Les opérations de M. de Freycinet auraient été imparfaites s'il n'avait pas déterminé sous l'équateur même, ou du moins très-près de cette ligne, le nombre d'oscillations de ses pendules. C'est à Rawak, petite île dépendante de la Nouvelle-Guinée, et située par 1′ ½ seulement de latitude sud, qu'ont été faites les observations des quatre pendules invariables, auxquelles toutes les observations analogues devront être comparées lorsqu'on voudra calculer la valeur de l'aplatissement des deux hémisphères.

Cet aplatissement, soit qu'on le tire des longueurs différentes du pendule absolu, soit qu'on le déduise du nombre d'oscillations qu'exécute en vingt-quatre heures un même pendule de longueur invariable dans divers lieux, est déterminé avec d'autant plus de précision que ces lieux sont plus éloignés en latitude. On devine, d'après cela, tout le prix qu'auraient eu, dans cette recherche, des observations faites au cap Horn, dont la latitude australe est de 55° 59′. Malheureusement, comme on a vu, une violente tempête ne permit pas à l'expédition d'y séjourner. Les observations des Malouines auraient pu remplacer celles du cap Horn; mais devait-on espérer qu'à la suite d'un naufrage, jetés sur une île entièrement déserte, forcés de pourvoir par la chasse à la nourriture de cent vingt personnes, occupés de préparer en toute hâte la chaloupe sur laquelle devaient s'embarquer ceux qui, malgré tous les hasards de l'entreprise, s'étaient présentés en foule pour aller en Amérique réclamer de prompts secours, nos navigateurs auraient assez de temps et de tran-

quillité d'esprit, pour compter minutieusement, durant des journées entières, les oscillations de leurs pendules? Nous ajouterons d'ailleurs que, pendant le séjour de l'expédition dans la baie Française, on n'obtint que de loin en loin les angles horaires destinés à régler la marche des montres, le soleil ayant été presque continuellement caché par d'épais brouillards le matin et le soir. Dans une telle réunion de circonstances, faudra-t-il beaucoup compter sur les résultats de l'unique série d'observations du pendule que M. de Freycinet nous rapporte des Malouines?

Durant sa longue navigation, *l'Uranie* s'est presque constamment maintenue au sud de l'équateur; ses seules relâches dans notre hémisphère ont été celles des Mariannes et des îles Sandwich. A Guham, la principale des Mariannes, M. de Freycinet a observé les quatre pendules; à Mowi, le pendule n.° 1 seulement.

Il nous reste, pour terminer cet article du rapport, à faire connaître les officiers qui ont participé aux observations du pendule. M. de Freycinet a constamment dirigé en personne le travail, et s'est aussi toujours chargé lui-même de placer et de rectifier les appareils. Nous avons, en outre, remarqué avec plaisir, puisque c'est une garantie de leur exactitude, qu'il n'y a pas eu, dans tout le voyage, une seule série d'observations de ce genre à laquelle il n'ait pris la plus grande part. Nous citerons ensuite M. Lamarche, commandant en second et officier d'un rare mérite; M. Duperrey, dont le nom figurera honorablement dans plusieurs autres paragraphes de ce rapport; M. Fabré, élève de la marine de première classe; M. Labiche, que nous devrions peut-être nous abstenir de nommer pour ne pas réveiller les regrets que sa mort prématurée a inspirés à tous ses compagnons; M. Bérard, frère de l'habile chimiste que l'Académie a couronné pour la seconde fois dans sa dernière séance publique; M. Guérin, élève de

la marine; M. Laborde, le premier officier qui ait succombé aux fatigues de la campagne; M. Pellion, qui a enrichi le portefeuille de l'expédition d'un grand nombre de jolis dessins; et MM. les élèves de première classe, Raillard, Ferrand et Dubaut.

MAGNÉTISME.

Après les observations relatives à la détermination de la figure du globe, rien ne pouvait être plus intéressant pour les physiciens que la recherche des lois des phénomènes magnétiques: malheureusement cette question paraît être extrêmement compliquée.

On sait, sans qu'on en connaisse la cause, que la déclinaison et l'inclinaison de l'aiguille aimantée éprouvent, dans chaque lieu de la terre, des altérations annuelles très-sensibles, et dont l'étude est d'autant plus importante, qu'il serait impossible sans cela de réduire à une époque commune et de rendre comparables les mesures faites dans différentes années: les nombreuses observations recueillies par l'expédition fourniront aux géomètres qui s'occuperont de ces recherches, des données très-précieuses.

Il sera bon, toutefois, d'établir ici deux classes distinctes dans le travail de M. de Freycinet: la première renfermera les observations des lieux de relâche; dans la seconde seront comprises les observations faites à la voile.

Les premières, et sur-tout les mesures très-délicates d'inclinaison, nous paraissent pouvoir être placées sur la ligne de tout ce qui a été publié de plus parfait, non-seulement par les navigateurs, mais encore par les physiciens sédentaires qui ont pu choisir le temps et les circonstances les plus favorables à leurs observations. Nous transcrirons ici, comme preuve de cette assertion, les inclinaisons mesurées à la petite

île de Rawak, avec cinq aiguilles différentes : on verra que les discordances extrêmes s'élèvent à peine à 7'.

Aiguille n.° 1, de Lenoir, inclinaison = 14° 23';
Aiguille n.° 0, de Lenoir, inclinaison = 14° 30';
Aiguille n.° 3, de Bréguet, inclinaison = 14° 29';
Aiguille n.° 2, de Bréguet, inclinaison = 14° 26';
Aiguille de Richer, inclinaison = 14° 29'.

Nos navigateurs ont mesuré à terre les déclinaisons de l'aiguille aimantée, avec de bons instrumens et d'après les meilleures méthodes. Les observations azimutales, destinées à faire connaître le gisement de la mire, ont été faites sur plusieurs points avec le théodolite; dans d'autres, avec les cercles répétiteurs astronomiques ou à réflexion; quelquefois, par le concours de ces trois méthodes à-la-fois. A Rawak, par exemple, on ne trouve pas moins de quarante-quatre séries distinctes d'observations azimutales.

Malgré tous ces soins, les déclinaisons pourraient être affectées d'une erreur constante dépendante du défaut de parallélisme entre l'axe optique de la lunette et la ligne marquée *nord-sud* sur le cercle gradué. M. de Freycinet, qui, pendant le voyage, et par un oubli de l'artiste, n'avait pour cet objet aucun moyen de rectification, a fait, depuis son retour, conjointement avec l'un de nous, les vérifications nécessaires : il en est résulté que toutes les déclinaisons déterminées à terre ont besoin d'une petite correction de 7'.

Les observations relatives à l'intensité des forces magnétiques ont été faites pendant chaque relâche avec plusieurs aiguilles. Avant d'annoncer à l'Académie ce qu'on devait attendre de cette partie du travail de M. de Freycinet, il nous a paru indispensable de comparer la charge de magnétisme que conservent les aiguilles horizontales qui ont été le plus souvent et le plus longuement observées, à celle qu'on leur

avait communiquée il y a quatre ans, au départ de l'expédition. Voici quels ont été les résultats ;

Une aiguille qui avait appartenu à M. Coulomb, faisait, dans le jardin de l'Observatoire, en 1817, avant le départ de M. de Freycinet, 100 oscillations en 16′ 53″; elle en fait maintenant 3 de moins dans le même temps.

Une seconde aiguille d'acier, construite par M. Fortin, employait, il y a quatre ans, 17′ 3″ à faire 100 oscillations; elle n'en fait maintenant, dans le même temps, que 98 : la perte de magnétisme a donc été assez légère sur ces deux aiguilles, pour qu'on puisse espérer de calculer avec une exactitude suffisante les corrections qu'il faudra appliquer aux diverses observations d'intensité.

Ces observations d'inclinaison et d'intensité à terre appartiennent presque toutes à M. de Freycinet lui-même. Les officiers qui ont été le plus fréquemment associés à son travail sont, MM. Lamarche, Duperrey, Labiche, Bérard, Pellion et Fabré.

M. John Macdonald avait fait insérer, il y a quelques années, dans les *Transactions philosophiques*, deux séries d'observations de variations diurnes de l'aiguille aimantée, faites, en 1794, 1795 et 1796, au fort Marlborough de Sumatra et à Sainte-Hélène. Il ne paraît pas que, depuis cette époque, les navigateurs qui ont parcouru les régions équinoxiales aient donné aucune attention à ce phénomène si singulier. Les observations de ce genre que M. de Freycinet nous rapporte, seront conséquemment pour la science une très-précieuse acquisition.

Le travail de M. Macdonald conduisait à deux conséquences importantes : l'une, que tous les physiciens paraissent avoir adoptée, est que les variations diurnes entre les tropiques ont sensiblement moins d'étendue qu'en Europe ; l'autre, à laquelle on a fait moins d'attention, est qu'aux mêmes heures

où, dans nos climats, l'extrémité nord de l'aiguille marche à l'ouest, le mouvement, au fort Marlborough et à Sainte-Hélène, qui sont situés au sud de l'équateur, s'exécute en sens contraire, ou vers l'est.

M. Macdonald n'a tiré de sa remarque aucune conclusion générale : il suppose même que le sens des variations diurnes est lié à celui des déclinaisons, puisqu'il se hasarde à prédire que dans l'Inde, par exemple, si la déclinaison absolue est orientale, l'aiguille, du matin au soir, marchera dans un certain sens; et qu'aux mêmes heures on apercevra un mouvement directement contraire, si la déclinaison absolue est occidentale. Les observations de M. de Freycinet ne paraissent pas devoir confirmer ces conjectures.

Nous avons trouvé, en effet, dans les registres de l'expédition, six séries d'observations de variations diurnes; elles ont été faites à l'île de France, à Timor, à Rawak, à Guham, à Mowi et au port Jackson. Aux îles Mariannes et aux îles Sandwich, situées dans l'hémisphère boréal, la pointe nord de l'aiguille marche vers l'ouest, comme en Europe, depuis huit heures du matin jusqu'à une heure après midi, quoique la déclinaison absolue de la boussole y soit orientale; aux stations de Timor, de Rawak et du port Jackson, situées au sud de l'équateur, la pointe nord de l'aiguille marchait, pendant toute la matinée, en sens opposé, ou vers l'est. Remarquons qu'à Timor l'aiguille décline vers l'ouest, tandis qu'à Rawak et au port Jackson, au contraire, sa déviation, relativement au méridien, est orientale.

On voit donc que les observations faites au nord de la ligne concordent avec celles d'Europe, et que celles de l'hémisphère austral présentent, comme les observations déjà citées de Macdonald, un mouvement diamétralement opposé. L'île de France ferait seule exception à cette règle; mais, pour que l'anomalie disparaisse, il suffit d'admettre que la note qui

accompagne les observations se rapporte, non à la position directe de la mire, mais à la position renversée, telle que l'apercevait l'observateur en voyant au travers de la lunette magnétique : cette explication est d'autant plus naturelle, que la forme de la mire à l'île de France rendait la méprise très-facile. Quoi qu'il en soit, tout doute disparaîtra à ce sujet par la comparaison qu'on pourra faire des observations qu'envoie M. Lislet-Geoffroi, ancien correspondant de l'Académie des Sciences, avec celles de l'expédition.

Un fait que le voyage de M. de Freycinet aura mis hors de toute contestation, est le peu d'étendue des oscillations diurnes entre les tropiques. Ceci découlait déjà du travail de M. Macdonald : mais, comme l'aiguille dont cet officier se servait était supportée par une pointe, on pouvait craindre qu'un défaut de mobilité n'eût été, en partie, la cause de la petitesse de ses résultats ; à quoi l'on doit ajouter que le magnétisme, comme on en a des exemples, est quelquefois distribué le long d'une aiguille d'acier, de manière à la rendre presque tout-à-fait insensible aux oscillations diurnes. Ces doutes ne s'appliquent point aux observations de nos navigateurs : leur aiguille était supportée par une soie détordue à la manière de Coulomb; et quoique durant le voyage elle soit restée constamment dans le même état, elle a néanmoins donné, dans diverses stations, des variations journalières fort inégales. A Timor, en effet, ces variations étaient de 6',5 ; à Rawak, elles avaient déjà éprouvé un grand affaiblissement et atteignaient à peine 3'; aux Mariannes, on trouve seulement $\frac{2}{3}$ de minute de plus qu'à Rawak : mais, aux îles Sandwich et au port Jackson, la même aiguille parcourait, du matin au soir, un arc de 9'.

Si la variation diurne du matin est occidentale au nord de l'équateur et orientale au midi de ce plan, sur l'équateur même, elle devrait être nulle. Nous venons de voir cependant

qu'à Rawak, dont la latitude sud est à peine de $\frac{1}{40}$ de degré, l'aiguille oscille tous les jours dans un arc de 3′ : ce résultat semblerait indiquer, sur-tout quand on le compare à la valeur de l'oscillation diurne aux Mariannes, que ce n'est point l'équateur terrestre, mais bien l'équateur magnétique, qui sépare la zone des variations occidentales de la zone des variations contraires; il résulterait de là, comme on voit, un moyen nouveau et très-facile de déterminer quelques points de l'équateur magnétique. Des observations faites entre cet équateur et la ligne équinoxiale, à Fernambouc, par exemple, au cap Comorin, au sud de Ceylan, dans la partie nord de Sumatra et de Bornéo, aux îles Pelew, &c., offriraient donc maintenant un grand intérêt.

Nous espérons que l'Académie voudra bien nous pardonner les détails dans lesquels nous sommes entrés sur cette partie des travaux de M. de Freycinet; les bonnes observations contribuent aux progrès de la science, non-seulement par les questions qu'elles résolvent, mais aussi par celles dont elles font naître l'idée.

L'EXPÉDITION aurait répondu fort imparfaitement à l'attente du Gouvernement et de l'Académie, si elle n'avait rapporté en observations magnétiques que celles qui ont été faites pendant les relâches. Les courbes le long desquelles les déclinaisons ont les mêmes valeurs, les courbes d'égale inclinaison et d'égale intensité, ont, sur le globe, des formes tellement singulières, qu'il est à peine permis d'en déterminer quelques points par interpolation : multiplier beaucoup les observations est donc le seul moyen d'arriver sur cet objet à des résultats certains.

Les journaux de l'expédition renferment, pour chaque jour où le soleil s'est montré, et cela depuis le départ de Toulon

jusqu'à l'arrivée au Havre, un grand nombre de déterminations de la déclinaison. Les observations d'inclinaison à la mer ont commencé plus tard, et datent seulement de la relâche à Timor; mais aussi, à partir de cette époque et jusqu'à la seconde relâche à Rio-Janeiro, c'est-à-dire, pendant près de deux ans, elles ont été journellement suivies avec un zèle et une persévérance qui ne se sont jamais démentis. Un exemple pris au hasard sur les registres nous a offert cinquante mesures d'inclinaison, faites en un seul jour, avant et après le renversement des pôles de l'aiguille.

Les mesures d'inclinaison que nous rapporte M. de Freycinet constatent parfaitement la singulière inflexion de l'équateur magnétique dans la mer du Sud, qui se déduisait des observations de Cook; la discussion détaillée de tous les résultats fera voir si cette inflexion a toujours la même étendue, et si elle a changé de longitude.

L'inexactitude des mesures d'inclinaison et de déclinaison faites à la mer ne dépend pas seulement du défaut de stabilité du navire; les masses de fer employées dans sa construction, les canons, les ancres, le lest, &c. ont sur ces résultats une influence particulière, dont les lois ne sont pas encore parfaitement connues, malgré les essais nombreux et variés qui ont été faits récemment par plusieurs physiciens et navigateurs.

On a toutefois assujetti à des formules empiriques assez approchées les variations de déclinaison et d'inclinaison qui résultent de ces attractions locales dans divers azimuts de la quille, relativement au méridien magnétique, et même les changemens qui dépendent de la position du navire sur le globe. Quant aux variations absolues, elles exigent pour chaque bâtiment, et même après chaque changement dans l'arrimage, une série d'expériences destinées à faire connaître les constantes des formules. Nous avons remarqué

avec plaisir qu'on trouvera, dans les essais faits sur divers points par M. de Freycinet, tous les moyens possibles de rectification.

C'est à M. Lamarche que le capitaine Freycinet avait confié la direction des observations magnétiques à faire en pleine mer : aussi est-il de tous les officiers de l'expédition celui à qui nous en devons le plus grand nombre. M. de Freycinet, quand ses autres occupations le lui ont permis, a pris lui-même, très-fréquemment, une part directe aux mesures d'inclinaison et d'intensité. Les observateurs dont nous avons ensuite rencontré le plus fréquemment les noms dans les registres, sont MM. Bérard, Railliard, Guérin, Fabré et Dubaut.

GÉOGRAPHIE.

Les déterminations des longitudes par un seul chronomètre ne peuvent guère, en général, contribuer maintenant aux progrès de la géographie. Les changemens brusques qu'éprouve quelquefois durant plusieurs jours le meilleur de ces instrumens, sont d'autant plus à craindre, que, s'ils arrivent en pleine mer, et si la marche reprend ensuite à terre son ancienne valeur, l'observateur peut complétement ignorer que des irrégularités aient eu lieu. Un moyen se présente de sortir de ce doute : c'est de ne compter sur les longitudes fournies par le transport de l'heure qu'autant que plusieurs montres marines différentes donnent le même résultat.

Il n'est pas tout-à-fait sans exemple que trois ou quatre de ces montres placées sur le même bâtiment se soient simultanément dérangées dans le même sens, et à peu près de la même quantité; mais ce cas est assez rare pour qu'en général on doive accorder quelque confiance aux déterminations qui se confirment ainsi mutuellement.

Nous avons déjà dit que M. de Freycinet avait emporté cinq chronomètres. Ces instrumens ont été journellement comparés entre eux, durant tout le voyage, après les séries d'angles horaires : les longitudes des côtes où l'expédition a abordé, ou en vue desquelles elle a passé, pourront donc se déduire de chaque chronomètre séparément. Nous avons pensé devoir examiner les résultats de cette méthode relativement à Rio-Janeiro, dont la position a été récemment le sujet de quelques contestations entre les géographes, et nous sommes partis, pour cela, de la supposition que Santa-Cruz de Ténériffe est sous les 18° 36′ 0″ de longitude occidentale. La comparaison que nous avons faite de la marche diurne des montres à Sainte-Croix et à Rio nous a d'abord appris que les n.os 144 et 150 de Berthoud avaient trop varié pendant la traversée pour être employés dans cette recherche ; les autres montres, au contraire, marchaient au Brésil à fort peu près comme à Ténériffe.

Voici les trois longitudes qu'elles donnent pour le château de Rio :

Le n.° 72 de Berthoud.	45° 36′ 38″ ;
Le n.° 158 du même artiste.	45° 35′ 49″ ;
Et le n.° 2868 de M. Bréguet.	45° 44′ 10″.

La moyenne, ou 45° 38′ 52″, ne diffère pas d'une minute de degré du résultat inséré dans les anciennes *Connaissances des temps*. Ces mêmes montres indiquent l'erreur considérable de 36′ ½ en moins sur la longitude qu'un voyageur moderne a fait adopter pour le cap Frio. La détermination obtenue par M. le baron Roussin, dans sa dernière campagne hydrographique, est de 2′ seulement plus petite que celle du capitaine Freycinet.

Les bornes dans lesquelles il est nécessaire de circonscrire

ce rapport, ne nous permettront pas de donner de plus grands détails sur les déterminations chronométriques des longitudes. Il nous a semblé toutefois que nous devions mettre sous les yeux de l'Académie un aperçu des observations faites à terre avec les cercles répétiteurs astronomiques et à réflexion, parce que de telles observations promettent une grande exactitude; on y verra d'ailleurs une nouvelle preuve du zèle dont tous les officiers de l'expédition étaient animés, même pour les objets qui occupaient dans le voyage une place secondaire.

En suivant l'ordre des relâches, nous trouvons d'abord dix-sept séries de distances du soleil à la lune, qui fourniront une nouvelle détermination de la longitude de Rio-Janeiro, et six séries de hauteurs circumméridiennes du soleil pour la latitude. Nous ne parlerons ici, ni des observations du Cap, ni de celles de l'île de France, la position de ces deux points étant bien connue depuis long-temps. La longitude de la baie des Chiens marins pourra se calculer, indépendamment du transport du temps, par vingt-quatre séries de distances du soleil à la lune : on n'a pu obtenir à terre, dans cette baie, que deux séries de hauteurs du soleil; mais les journaux renferment un grand nombre d'observations faites sur le bâtiment à l'ancre, et qui compléteraient, s'il était nécessaire, la détermination de la latitude.

La position de la ville d'Agagna, aux Mariannes, a été déterminée par vingt-trois séries de hauteurs circumméridiennes d'étoiles et par vingt-deux séries de distances : la latitude du fort Santa-Cruz dans le port Saint-Louis se déduira de neuf séries de hauteurs circumméridiennes d'étoiles; celle de l'île aux Chèvres, de deux séries du soleil.

A Owhyhée, la seule des îles Sandwich où M. de Freycinet ait séjourné assez long-temps pour s'y livrer à des observations astronomiques, nous trouvons trois séries de hauteurs

du soleil pour la latitude, et cinquante-six séries de distances de cet astre à la lune.

Au port Jackson, dans la Nouvelle-Hollande, nos navigateurs ont déterminé la hauteur du pôle austral par dix étoiles différentes, et la longitude par dix séries de distances de la lune au soleil.

La position de la baie Française, aux Malouines, résultera de douze séries de hauteurs circumméridiennes du soleil et de cinq séries de distances.

Enfin Monte-Video, à l'embouchure du Rio de la Plata, a été déterminé par dix-neuf séries de distances lunaires et par onze séries de hauteurs méridiennes du soleil.

Les observateurs qui ont pris part au travail dont nous venons, pour ainsi dire, de présenter le catalogue, sous l'inspection immédiate du capitaine Freycinet, sont MM. Duperrey, Railliard, Bérard, Fabré, Pellion, Dubaut, Guérin, Lamarche, Labiche et Ferrand. On remarquera ici, comme on a déjà pu le faire précédemment, que l'ordre dans lequel les noms sont placés n'indique pas celui des grades, et qu'il a été uniquement déterminé par une participation plus ou moins fréquente au genre particulier d'observations dont il est question dans chacun des paragraphes du rapport.

HYDROGRAPHIE.

M. de Freycinet et les officiers qui ont servi sous ses ordres, se sont livrés avec le plus grand zèle, durant la campagne de *l'Uranie*, aux observations hydrographiques; leurs opérations compléteront nos connaissances sur plusieurs groupes d'îles du grand Océan, dont, malgré leur importance, il paraît que jusqu'à présent on ne s'était pas suffisamment occupé.

Les travaux de ce genre ont commencé sur la côte occidentale de la Nouvelle-Hollande, par la baie des Chiens marins, dont on a complété la reconnaissance que M. de Freycinet avait faite lui-même pendant le voyage de Baudin. Ce travail a donné lieu à la découverte d'un banc de sable : son gisement a été déterminé avec précision. La connaissance de ce danger sera fort importante pour la sûreté des bâtimens qui fréquentent la baie.

Dans la traversée de *l'Uranie* de la Nouvelle-Hollande à Waigiou, plusieurs parties de la côte de Timor et de quelques petites îles environnantes ont été relevées avec le plus grand soin.

En passant entre l'île Bourou et les îles d'Amboine et de Céram, M. de Freycinet a eu l'occasion de reconnaître l'exactitude de la carte de ce détroit, levée pendant le voyage du contre-amiral Dentrecasteaux; quelques détails, dont cet officier n'avait pas eu connaissance, ont été explorés par les géographes de *l'Uranie*. En suivant toujours la même route, M. de Freycinet a eu l'occasion de déterminer les îles situées au sud de Gilolo, et d'examiner, au nord de l'île Rouib, un archipel très-dangereux qu'aucun navigateur n'avait encore visité.

Parvenu à Waigiou, M. de Freycinet a fait lever les portions de la côte nord de cette île que le contre-amiral Dentrecasteaux n'avait pu voir qu'en passant; ses travaux fourniront aussi des cartes détaillées de Manouaran, de Rawak, et de quelques portions des îles Ayou.

C'est, toutefois, aux îles Mariannes, l'un des principaux points de relâche, qu'a été exécuté le travail hydrographique le plus complet de la campagne. L'île de Guham, par exemple, qui est le chef-lieu de ces îles, a été visitée avec le plus grand détail dans tout son contour par des canots : il en est de même de l'île Rota et d'une partie considérable

de Tinian. Lorsqu'on réunit les travaux de la Pérouse à ceux des officiers de *l'Uranie*, il ne reste que l'îlot le plus septentrional dont la position n'ait pas été déterminée par des navigateurs français : or, comme cet îlot a été visité par Malespina, il en résulte que nous possédons maintenant tous les élémens d'une excellente carte de l'important archipel des Mariannes.

Les opérations hydrographiques de l'expédition dans l'archipel des îles Sandwich nous auront procuré les cartes de plusieurs parties de côtes assez étendues, ainsi que les plans de différens ports et mouillages.

Dans la traversée des îles Sandwich au port Jackson, M. de Freycinet a découvert, à l'est de l'archipel des Navigateurs, une petite île qui a reçu le nom d'*île Rose* : la position de plusieurs îles peu étendues et très-éloignées des grandes masses de terre a été déterminée pendant le même voyage. Ces îles seront désormais des points de reconnaissance où des vaisseaux, ayant à traverser le grand Océan, pourront aller, comme par échelons, vérifier leurs longitudes.

En revenant de la Nouvelle-Hollande dans l'océan Atlantique méridional par le sud de la Nouvelle-Zélande, M. de Freycinet a vérifié d'abord la position de l'île Campbell, et ensuite celle de plusieurs petites îles situées à l'extrémité australe du nouveau continent, telles que Saint-Ildefonse, Diego-Ramirez, Barnavelt, Evouts, &c. L'atlas renferme aussi les cartes de plusieurs portions de côtes de la Terre de Feu.

Le fâcheux événement qui, aux Malouines, mit fin à la navigation de la corvette *l'Uranie*, n'interrompit point les travaux hydrographiques de l'expédition ; ces travaux nous auront procuré des cartes de la côte nord et de la côte nord-est de la plus orientale des Malouines, ainsi que les plans de trois ports qui y sont situés.

Tel est l'exposé sommaire des immenses opérations hydrographiques qui ont été faites pendant la campagne de *l'Uranie*. La plupart des dessins sont déjà terminés; nous les avons eus sous les yeux, ainsi que les cahiers des données qui leur ont servi de base : tout nous autorise à penser que ce travail, dont la publication exigera trente ou trente-quatre planches, pourra être mis en parallèle avec les meilleurs ouvrages de ce genre.

Nous ne devons pas oublier de faire remarquer, en terminant cet article, que la presque totalité du beau travail hydrographique dont nous venons d'entretenir l'Académie, a été faite par M. Duperrey. Sur quelques points, cet habile officier a été secondé par MM. Labiche et Bérard. Enfin ce dernier a aussi levé, de son côté, aux Mariannes, par exemple, plusieurs plans particuliers.

MÉTÉOROLOGIE.

On ne peut guère espérer, dans nos climats, d'arriver à quelque résultat général sur l'ensemble des phénomènes météorologiques qu'à l'aide des moyennes convenablement combinées d'une longue suite d'observations. A l'équateur, au contraire, les perturbations sont si rares et si faibles, qu'il suffit presque d'une semaine, non-seulement pour apercevoir, mais encore pour mesurer les effets des causes constantes; en deux fois vingt-quatre heures, par exemple, on reconnaît la période diurne barométrique, et cinq ou six jours, pris au hasard, en font apprécier l'étendue. A Paris, les moyennes d'un mois ne rendent pas toujours cette période manifeste, et il est très-douteux que les effets fortuits des causes accidentelles se soient complétement balancés dans les moyennes de deux ou trois années d'observations. On pouvait donc espérer que les séjours que M. le capitaine Freycinet se pro-

posait de faire dans chacun de ses points de relâche, quoique de peu de durée, seraient cependant suffisans pour résoudre plusieurs importantes questions relatives à la météorologie des régions équinoxiales.

Nos connaissances sur cet objet se sont considérablement accrues depuis quelques années; et on le doit, en grande partie, aux travaux de deux membres de cette Académie. Il restait toutefois à déterminer par des mesures précises si, dans la période diurne barométrique dont nous parlions tout-à-l'heure, les heures des *maxima* et des *minima*, entre les tropiques, sont les mêmes en toute saison et dans tous les lieux; on pouvait encore se demander si l'oscillation du mercure dans le tube du baromètre a par-tout la même étendue, et, dans ce cas, quelle en est exactement la valeur. Plusieurs physiciens ont supposé que la pression moyenne de l'atmosphère est sensiblement moindre à l'équateur que dans nos climats.

On peut d'abord s'étonner que cette opinion puisse faire encore l'objet d'un doute : mais, si l'on remarque combien les baromètres se dérangent facilement, combien il est rare d'en trouver deux qui présentent un accord parfait, soit à raison de la position défectueuse des zéros des échelles, soit à cause que les artistes ne tiennent pas ordinairement compte des effets de la capillarité, soit enfin, le plus souvent, parce que ces instrumens ne sont pas également bien purgés d'air, on concevra aisément que les occasions se soient rarement présentées de comparer les hauteurs moyennes du baromètre sous les tropiques et en Europe, de manière à ne pas craindre, par exemple, dans le résultat, une erreur d'un demi-millimètre.

Pour assurer que ces questions, et d'autres dont nous nous abstenons de faire ici l'énumération, trouveront des solutions complètes dans les observations que M. de Freycinet nous

rapporte, il faudrait les avoir entièrement discutées : toutefois, l'examen qu'en a fait la commission lui permet d'annoncer dès à présent qu'elles seront très-utiles à la science.
Ce qui précède se rapporte aux observations faites à terre. Les journaux nautiques de l'expédition nous ont offert, pour toute la durée du voyage, des observations du thermomètre et de l'hygromètre faites d'heure en heure, tant de jour que de nuit; des observations du baromètre à tous les intervalles de deux heures, comme aussi douze observations journalières de la température de la mer correspondantes aux mêmes époques. Une telle masse d'observations serait, en toute circonstance, une importante acquisition; mais nous pouvons ajouter que le travail de M. de Freycinet et de ses collaborateurs est au moins tout aussi remarquable par son exactitude que par son étendue.

Le Mémoire fort intéressant du docteur Marcet qui a été inséré dans l'un des derniers volumes des *Transactions philosophiques*, tendrait à faire croire que la salure des eaux de l'Océan est plus considérable au sud de l'équateur que dans l'hémisphère boréal; cette conséquence résulterait aussi des nombreuses observations faites par Bayly pendant le troisième voyage de Cook, tandis qu'on déduit tout le contraire des pesanteurs spécifiques déterminées par M. John Davy, dans sa traversée de Londres à Ceylan. La question avait donc besoin d'un nouvel examen : M. de Freycinet a remis, ces jours derniers, à l'un de vos commissaires, cinquante-cinq flacons d'eau de mer recueillie dans différens parages au nord et au midi de l'équateur; ces flacons sont encore parfaitement bien bouchés, et tout fait espérer qu'ils procureront à la science quelques déterminations nouvelles et intéressantes.

C'est peut-être ici le lieu de parler des effets de l'alambic que l'expédition avait emporté pour se procurer de l'eau douce par la distillation de l'eau de mer. M. de Freycinet n'a eu

besoin de cet appareil que sur la côte occidentale de la Nouvelle-Hollande, dans la baie des Chiens marins, où l'on ne trouve pas d'aiguade. La distillation a été faite en partie à bord, et en partie sur le rivage; elle a duré neuf jours : chaque opération était de douze heures. L'équipage, composé de cent vingt hommes, n'a bu pendant un mois que de l'eau fournie par l'alambic : personne ne s'est plaint et n'a été incommodé. A la table du commandant, on en a bu pendant trois mois consécutifs, sans le moindre inconvénient. M. de Freycinet ajoute même qu'à Timor il a préféré l'eau de mer distillée à celle qu'il avait prise à terre. On voit, d'après cette intéressante expérience, combien il serait à desirer que les physiciens et les constructeurs s'occupassent des meilleurs moyens d'installer des alambics à bord des bâtimens.

HISTOIRE NATURELLE.

ZOOLOGIE.

Les détails dans lesquels nous allons maintenant entrer, prouveront que le voyage du capitaine Freycinet, dont on a déjà pu apprécier l'importance sous les rapports de l'astronomie, de la haute physique et de la géographie, aura rendu aussi des services très-essentiels à l'histoire des animaux.

Le muséum du Jardin du Roi n'a pas été enrichi seulement, par les soins de MM. Quoy et Gaimard, chirurgiens de l'expédition, d'un grand nombre d'objets très-rares qui manquaient jusqu'ici à ses collections; ils nous ont procuré aussi des espèces entièrement nouvelles pour la science, et en nombre considérable. Le zèle de ces deux voyageurs mérite d'autant plus d'éloges, que, n'étant point naturalistes de

profession, ils n'ont pu porter dans leurs recherches que cette instruction générale qui embrasse à-la-fois les différentes parties de la zoologie. Ils ont préparé eux-mêmes avec un zèle infatigable les animaux qu'ils ont recueillis, et, conjointement avec M. Gaudichaud, pharmacien de *l'Uranie*, ils ont offert au muséum, avec un noble désintéressement, une multitude d'objets curieux dont ils avaient fait l'acquisition pendant le voyage.

Malgré la perte de dix-huit caisses dans le naufrage de la corvette *l'Uranie*, les collections rapportées par l'expédition offrent encore, d'après le catalogue scientifique dressé par M. Valenciennes, aide-naturaliste au muséum du Jardin du Roi, vingt-cinq espèces de mammifères, trois cent treize d'oiseaux, quarante-cinq de reptiles, cent soixante-quatre de poissons, et un grand nombre de mollusques, d'annélides, de polypes, &c.

Le nombre des squelettes s'élève à trente environ, parmi lesquels un homme de la race des Papous, un tamandua [*myrmecophaga tamandua*], une tête de tapir adulte, &c.

Ce serait dépasser les limites de ce rapport que d'énumérer toutes les espèces nouvelles et rares que nous devons à l'expédition de M. de Freycinet. Il suffit de dire, en général, que les collections renferment quatre espèces nouvelles de grands mammifères, quarante-cinq d'oiseaux, parmi lesquels trois genres nouveaux, plus de trente reptiles, et peut-être cent vingt poissons ; ceux-ci, conservés dans l'alcool, sont d'autant plus précieux, que presque tous ceux d'entre eux qui pouvaient être connus ne l'étaient que d'après des peaux mal conservées, ou d'après les dessins assez peu corrects de Commerson.

Parmi les mollusques et les polypes se trouve un grand nombre d'animaux qui habitent des coquilles, et que l'on n'avait pas encore eu l'occasion d'examiner. Ils sont très-

bien conservés dans l'alcool (tels sont ceux de *grands cônes, porcelaines, volutes, astrées, tubipores, &c.*). On peut regarder cette partie des collections de M. de Freycinet comme l'une des plus précieuses acquisitions que l'histoire des animaux ait faites dans ces derniers temps.

Outre les objets rapportés par M. de Freycinet, on nous a soumis encore un nombre considérable de dessins d'oiseaux, de poissons, de coquilles, d'insectes, dessins faits avec beaucoup d'exactitude par M. Arago, dessinateur de l'expédition. MM. Gaudichaud, et sur-tout M. Taunay jeune, fils du peintre célèbre que l'Institut a l'avantage de compter parmi ses membres, ont aussi représenté en couleur des objets intéressans pour l'histoire des mollusques et autres animaux marins sans vertèbres.

Il résulte de cet exposé que, par l'intelligence et le dévouement des médecins-naturalistes embarqués sur la corvette *l'Uranie*, le cabinet du Roi, qui déjà venait de s'enrichir d'une zoologie à peu près complète du cap de Bonne-Espérance, due aux soins, à la persévérance sans bornes et à l'intrépidité de M. Delalande, aura acquis des objets aussi intéressans que nombreux; et que, si l'on excepte l'expédition de Baudin, pendant laquelle le zèle infatigable de Péron et de Lesueur nous avait procuré des collections prodigieuses, aucune expédition *nautique* n'a été aussi profitable à la zoologie.

ENTOMOLOGIE.

Pendant la relâche de *l'Uranie* à l'île de France, M. de Freycinet adressa au Muséum d'histoire naturelle quatre grandes caisses de fer-blanc, renfermant environ deux cents lépidoptères, et quatre ou cinq cents autres insectes qui provenaient du Brésil. Une quarantaine d'espèces de crustacés du cap de Bonne-Espérance, &c., faisait également partie de

cet envoi. Le nombre des insectes que cet habile navigateur a donnés au Muséum depuis son retour, s'élève à environ *treize cents*. Notre confrère, M. Latreille, de qui nous tenons ces détails, estime que le nombre des espèces peut aller à trois cents; ceux des insectes qui avaient été pris près de la terre des Papous, lui ont offert une quarantaine d'espèces nouvelles, parmi lesquelles il en est de fort remarquables.

La collection des crustacés et des arachnides, formée dans les mêmes parages, mérite aussi, suivant M. Latreille, d'être signalée. Ce célèbre entomologiste n'a pu en faire jusqu'ici qu'un examen rapide, et néanmoins il y a déjà aperçu plusieurs espèces inconnues.

Nous aurons ici une nouvelle occasion de faire remarquer, à l'honneur de MM. Quoy et Gaimard, qu'ils se sont empressés, dès l'origine, d'offrir au Muséum les individus dont ils avaient fait l'acquisition de leurs propres deniers, et qui n'existaient pas dans la collection de ce grand établissement.

BOTANIQUE.

La collection de plantes sèches recueillies pendant le voyage de M. de Freycinet est composée d'environ trois mille espèces, dont *quatre à cinq cents* ne se trouvent pas dans les herbiers du Muséum d'histoire naturelle, et dont deux cents au moins sont inconnues. Malheureusement un grand nombre de celles des Moluques, des Mariannes et de Timor, ont été submergées et détériorées par les eaux de la mer à l'époque du naufrage de *l'Uranie;* mais les plantes qui ont été récoltées aux environs du port Jackson, sur les montagnes Bleues et aux îles Sandwich, sont dans un très-bon état de conservation, et nous ont offert beaucoup de nouveautés. Dans le nombre de celles qui avaient été submergées, il se trouve encore des plantes marines, de très-belles

fougères et autres espèces dont la conservation est due à M. Gaudichaud, pharmacien de l'expédition, qui s'est donné pour cela beaucoup de peine. C'est au zèle, au travail et à la grande activité de ce jeune pharmacien, que nous sommes particulièrement redevables de la riche et intéressante collection de végétaux que nous a rapportée M. le capitaine Freycinet. M. Gaudichaud a remis, en outre, aux professeurs du Jardin du Roi, une grande quantité de fruits, de graines, de gommes et autres produits du règne végétal; ce qui lui donne de nouveaux droits à la reconnaissance des naturalistes. La commission a calculé que cent cinquante ou cent soixante dessins au simple trait suffiraient pour faire connaître les plantes les plus importantes que renferme l'herbier de l'expédition.

COLLECTIONS GÉOLOGIQUES.

M. de Freycinet a rapporté, pour le Muséum d'histoire naturelle, environ neuf cents échantillons de roches, qui ont été recueillis dans les différens lieux de ses relâches. Une circumnavigation du globe, pendant laquelle on ne voit que des îles et des côtes de peu d'étendue, ne peut offrir des *suites géologiques* propres à faire connaître la nature du terrain, les rapports d'ancienneté et de superposition des couches. Les navigateurs doivent se borner à des observations isolées, à des échantillons de roches détachés des couches qui paraissent dominer par leur masse et caractériser les diverses contrées.

Ce but, très-important pour les progrès de la géographie minéralogique, a été atteint par les personnes zélées que M. de Freycinet a chargées de ce genre de recherches. D'après une note que M. Cordier, professeur au Jardin du Roi, a bien voulu communiquer à la commission, les échantillons rapportés sont nombreux, bien conservés et choisis avec

intelligence. Les roches des montagnes Bleues de la Nouvelle-Hollande, celles des îles Sandwich et de l'archipel des Mariannes, augmentent les richesses géologiques de nos collections. Elles prouvent de nouveau, et d'une manière frappante, ces analogies de gisement et de composition que l'on observe, dans les deux hémisphères, sur les points les plus éloignés du globe.

RELATION HISTORIQUE DU VOYAGE.

M. DE FREYCINET a invité un de nous à examiner les matériaux qui formeront la base de la description historique de son voyage. Sous les différentes zones où il a relâché, au Brésil, au cap de Bonne-Espérance, à l'île de France, aux Moluques orientales, à la Nouvelle-Hollande, aux îles Sandwich et aux Mariannes, il a fixé son attention sur l'aspect général du pays, sur les races d'hommes qui l'habitent, sur l'état de leur civilisation, sur le développement des diverses branches de l'agriculture et de l'industrie commerciale, enfin sur les causes qui arrêtent ou accélèrent les progrès de la société. Pour suivre une marche plus uniforme dans ce genre de recherches, M. de Freycinet a communiqué aux personnes qui devaient partager ses travaux, une série de questions qui embrassent méthodiquement l'état physique, moral et politique de l'homme. Il nous a mis en état d'apprécier les avantages de cette classification, en nous présentant la grande masse de données qu'il a recueillies sur le groupe des îles Mariannes. On ne saurait donner assez d'éloges à ce tableau d'un pays qui est enrichi par les plus belles productions de la nature, qui offre parmi ses habitans les restes malheureux d'une nombreuse population, et qui est lié, par sa position, par les mœurs des indigènes, par leur langue, et peut-être même par les débris de ses monumens, à l'archipel des Grandes-Indes.

La variété des matières qui font l'objet de ce rapport nous empêche de nous arrêter à ces travaux intéressans ; mais, à une époque où les langues des peuples sont considérées comme les documens historiques les plus précieux, nous devons rappeler le zèle louable avec lequel M. de Freycinet et ses collaborateurs ont recueilli tout ce qui a rapport aux racines, aux formes grammaticales, et à cette ingénieuse variété de signes dans lesquels se reflète la pensée chez les sauvages, comme chez les peuples civilisés.

Ce qui donnera un charme particulier à la relation du voyage de M. de Freycinet est l'atlas pittoresque, dans lequel on réunira les paysages, les vues nautiques, les représentations de costumes, dus au talent et à la grande activité de M. Arago, dessinateur de l'expédition. L'archipel peu connu des Mariannes; Tinian, couvert de monumens d'une origine problématique; les vallées ombragées des montagnes Bleues de la Nouvelle-Hollande; l'île d'Ombay, habitée par des peuples anthropophages, offriront des objets d'un intérêt nouveau et varié. Les dessins étonnent d'autant plus par leur nombre, qu'ils ont été faits en plein air, et souvent dans les circonstances les plus difficiles. Vifs et spirituels d'exécution, ils portent ce caractère de vérité que l'on desire sur-tout dans l'atlas pittoresque d'un voyage lointain.

DESSINS.

La commission, ayant cru devoir s'abstenir de juger elle-même l'ensemble des dessins que M. de Freycinet lui a présentés, a prié M. Gérard, premier peintre du Roi, et membre de l'Académie des beaux-arts, de vouloir bien se charger de ce soin. Ce qui suit est extrait textuellement de la note que ce grand peintre nous a remise :

« La collection de dessins que M. le commandant Frey-

» cinet a rapportée de son voyage autour du monde, fait par
» ordre du Roi, est une des plus remarquables qu'on ait vues
» et par le nombre et par la variété des sujets. Elle prouve
» que le zèle de M. Arago, dessinateur de l'expédition, ne
» s'est jamais ralenti, et que son intelligence l'a toujours
» secondé.

» Elle se compose d'environ cinq cents dessins représentant
» des sites, des vues de côtes, des objets de zoologie et de
» botanique. Elle offre, en outre, une suite considérable de
» dessins faits d'après les naturels des différentes îles dans les-
» quelles l'expédition a stationné, de leurs costumes, de leurs
» usages, de leurs armes.

» La publication d'une partie des dessins que renferme ce
» riche portefeuille, donnera l'ouvrage le plus intéressant et
» le plus complet que la navigation ait encore produit. »

CONCLUSIONS.

D'APRÈS l'exposé que nous venons de faire, on voit qu'aucune partie des sciences physiques, nautiques ou naturelles, sur lesquelles l'Académie avait dirigé l'attention de M. de Freycinet, n'a été négligée; la multitude des observations de tout genre qui ont été faites par cet officier et ses collaborateurs, le grand nombre d'objets divers qu'ils ont rapportés, montrent quels ont dû être leur zèle et leur constance. Il ne reste maintenant à l'Académie que deux choses à desirer : la première, c'est qu'une publication prompte, quoique suffisamment détaillée, fasse bientôt jouir les sciences des résultats qu'elles doivent retirer de ce voyage; la seconde, c'est que des travaux aussi pénibles et d'un aussi grand intérêt appellent sur ceux qui les ont exécutés les justes récompenses du Gouvernement. Ces récompenses deviendront, pour les officiers et pour toutes les personnes attachées au service de notre marine,

un nouveau motif d'encouragement à cultiver tous les genres de connaissances qui peuvent les mettre en état d'être si utiles aux sciences, par les résultats précieux que leurs voyages leur donnent l'occasion de recueillir.

L'Académie adopte les conclusions, et arrête que le rapport sera adressé à son excellence le ministre de la marine.

Mémoire de M. FRESNEL, *relatif aux couleurs des lames cristallisées, douées de la double réfraction. Commissaires, MM.* Arago, *rapporteur, et* Ampère.

On peut voir ce rapport en entier dans les *Annales de chimie et de physique*, tome XVIII, mai 1821, pages 80 et suiv. Nous nous bornerons à transcrire ici la conclusion adoptée par l'Académie :

« Les résultats curieux, renfermés dans le Mémoire que » l'Académie avait renvoyé à notre examen, sont de nouvelles » preuves de la persévérance infatigable, de l'exactitude et » de la rare sagacité de M. Fresnel : ses expériences occupe- » ront par la suite, quand la théorie des interférences aura » reçu de nouveaux développemens et sera plus répandue, » une place distinguée parmi les plus ingénieux travaux des » physiciens modernes; dès à présent elles établissent qu'il » y a, non pas seulement de simples analogies, mais la liaison » la plus intime entre les phénomènes de coloration des lames » cristallisées, le phénomène des anneaux colorés ordinaires, » et celui de la diffraction.

» A notre avis, M. Fresnel prouve jusqu'à l'évidence que » toutes ces couleurs sont de simples effets d'interférence. » Nous ne proposerons pas néanmoins à l'Académie de se

» prononcer sur une matière aussi difficile, et qui peut-être » sera encore entre les physiciens l'objet de beaucoup de con- » testations : nos conclusions se borneront à demander que » l'important Mémoire de M. Fresnel soit inséré dans le re- » cueil des *Savans étrangers.* »

Nouvelle Machine à vapeur, de M. MANOURY D'ECTOT. *Commissaires, MM.* Girard, *rapporteur, et* de Prony.

VOICI la conclusion :

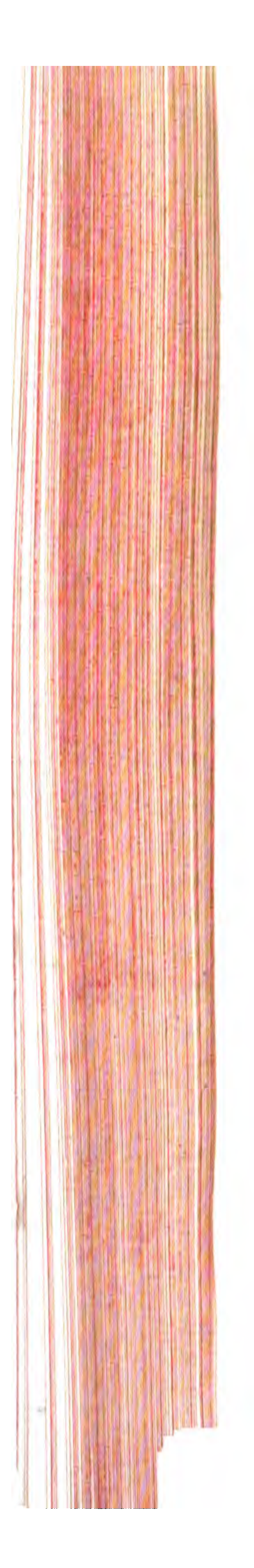
« Nous pensons que l'appareil à vapeur qui fait l'objet de » ce rapport, est très-propre à confirmer l'opinion avanta- » geuse que les diverses machines imaginées par M. Manoury » d'Ectot ont déjà donnée de ses connaissances, de son génie » inventif et de sa sagacité, et qu'en conséquence cet appareil, » dont une expérience de plus de deux ans atteste le bon em- » ploi, est tout-à-fait digne de l'approbation de l'Académie. »

Cette machine a été exécutée aux abattoirs de Grenelle.

Inventions de M. LAUR *qui ont pour objet de faciliter la levée des plans, ou de mesurer la superficie d'un terrain dont le plan est déjà levé. Commissaires, MM.* Cauchy, *rapporteur,* Lacroix *et* Mathieu.

LES conclusions sont :

« En résumé, nous pensons que les innovations de M. Laur » sont d'ingénieuses applications de moyens déjà connus. Elles » facilitent les opérations trigonométriques qui embrassent un » terrain peu considérable; et, dans le même cas, elles dimi- » nuent notablement la dépense, et permettent à un seul » ingénieur de lever un plan sans autre secours que celui » de deux mires verticales et d'un compas perfectionné, et » sans endommager en aucune manière les propriétés qu'il



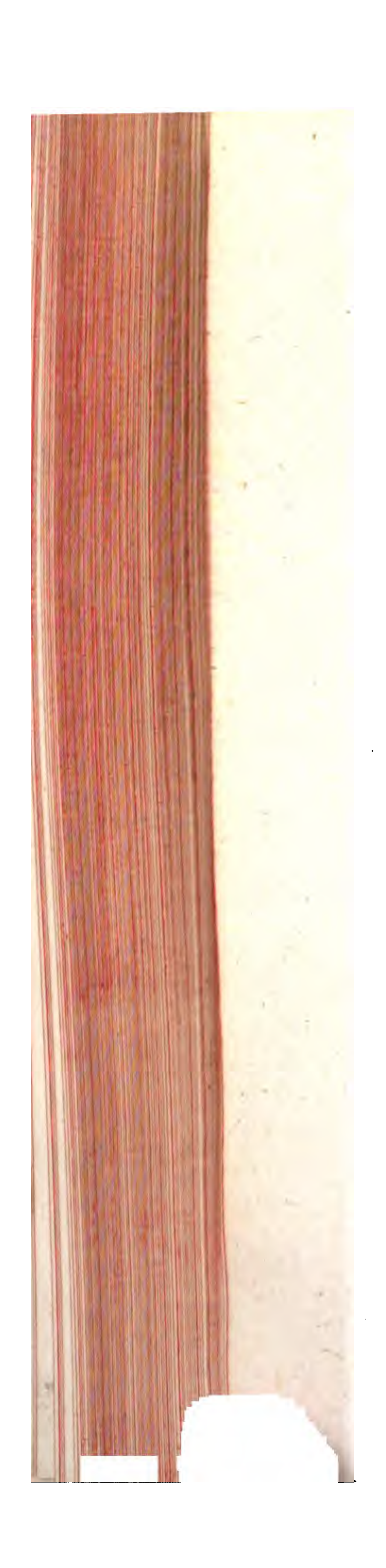
» est obligé de parcourir. Nous proposons, en conséquence, » à l'Académie d'approuver ces inventions, et de donner à » l'auteur les encouragemens qu'il mérite. »

Compteur à secondes, présenté par M. RIEUSSEC. *Commissaires, MM.* de Prony, *rapporteur, et* Bréguet.

LE chronographe de M. Rieussec indique la durée de plusieurs phénomènes, sans mettre l'observateur dans la nécessité, pendant le cours des observations, soit de jeter les yeux sur un cadran, soit d'écouter et de compter les battemens d'un timbre ou d'un échappement. Le volume et la forme de cet instrument sont à peu près ceux d'un gros chronomètre de poche. Le cadran est mobile; il fait un tour dans une minute; chacune de ses divisions indique une seconde : une petite fenêtre, placée sur le côté, laisse voir un nombre qui est celui des tours entiers, ou des minutes écoulées pendant l'observation. Ce chronographe peut marcher environ trois quarts d'heure sans s'arrêter.

Supposons l'instrument monté, en état de repos, et les divisions indicatrices du temps, chacune au point de départ; l'instant duquel on veut compter étant arrivé, on presse un petit bouton; et la machine se met en mouvement. Veut-on marquer un instant quelconque de la durée, il suffit de presser un second bouton; à l'instant même une petite plume va marquer sur la circonférence un point qui sert à indiquer à quelle seconde ou quelle fraction de seconde correspond l'origine ou la fin du temps qu'on a voulu déterminer. On peut ainsi marquer successivement autant de points qu'on a observé de phénomènes différens. Enfin le mécanisme est disposé de manière qu'une action sur le premier bouton arrête tout-à-coup le mouvement qu'il a fait commencer.

La marche de l'instrument aura infailliblement la précision



desirable, s'il est construit par un bon horloger. La pression sur le bouton et la formation d'un point noir sur le cadran n'offrent aucune succession sensiblement appréciable.

Les commissaires disent, en finissant, que le compteur de M. Rieussec mérite l'approbation de l'Académie.

Ce compteur est celui qui, dans la dernière course de chevaux, a servi à marquer l'arrivée de chacun des concurrens.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1821.

PARTIE PHYSIQUE,

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

MÉTÉOROLOGIE.

M. MOREAU DE JONNÈS, toujours occupé de l'*Histoire physique des Antilles*, a présenté de grandes suites d'observations sur leur climat, et particulièrement sur leur température. Les variations journalières en sont renfermées d'ordinaire dans une échelle de dix degrés, et leur terme moyen est de cinq. Les variations annuelles ne donnent pas plus de vingt degrés de différence, et à la Martinique elles n'en donnent pas quinze. La plus grande chaleur n'y surpasse point celle du milieu de la Russie. Du reste, les causes des variations, soit régulières,

soit irrégulières, les époques de leur *maximum* et de leur *minimum*, sont à peu près les mêmes qu'ailleurs : mais, comme les causes irrégulières, telles que les vents, les mouvemens des flots, les nuages, les pluies subites, ont une grande activité, les mutations, quoique peu étendues, y sont fréquentes et rapides, en sorte que leur action sur le corps vivant ne laisse pas d'être violente. L'auteur décrit une partie de ces effets, et entre aussi dans de grands détails sur les variations relatives aux différentes hauteurs, ainsi que sur la température des caves, des puits et des sources.

Une bouteille vide, jetée à la mer par les 5° 12' de latitude sud, et par les 26° 60' de longitude, à l'ouest de Paris, a été portée en dix mois par les courans entre la Martinique et Sainte-Lucie; ce qui fait conclure à M. Moreau de Jonnès qu'il existe un grand courant qui vient du sud de la ligne et qui pénètre jusque dans la mer des Antilles, au travers de ces nombreux détroits qui séparent les îles du vent; et c'est ainsi qu'il conçoit que des plantes propres à l'Afrique se trouvent aussi dans les îles, où leurs graines auront été portées par la mer.

Les tremblemens de terre ont aussi été étudiés dans ces îles par M. de Jonnès. Ils tiennent, en général, à des causes d'une nature volcanique. Bien que souvent la terre tremble sans qu'il y ait d'éruption, chaque éruption est accompagnée d'un tremblement. Leur propagation a lieu quelquefois à des distances immenses, et de la manière la plus rapide. Celui qui renversa Lisbonne en 1755, se fit sentir moins de huit heures après à la Martinique et à la Barbade, qui en sont à plus de onze cents lieues, par des mouvemens subits des eaux de la mer; c'est une vîtesse six fois plus grande que celle du vent le plus violent. Mais d'autres fois cette propagation se trouve restreinte par des circonstances inconnues, et le mouvement n'affecte qu'une île ou un petit nombre d'entre elles.

Le désastre de Venezuela en 1812, dans lequel cinq villes considérables furent détruites, ne fut pas ressenti dans les îles. Ces tremblemens de terre des Antilles sont aussi désastreux que ceux d'aucune autre contrée, et plusieurs de ceux qu'elles ont éprouvés ne l'ont cédé qu'aux horribles catastrophes de Lisbonne et de Messine. Ils sont de moitié moins communs à la Martinique, dont les volcans sont depuis long-temps éteints, qu'à la Guadeloupe, où les foyers souterrains conservent encore quelque activité. Ni les saisons, ni l'heure du jour, ni les phases de la lune, n'ont de rapports appréciables avec ces terribles phénomènes; et le baromètre n'en est pas non plus affecté. Le plus souvent le tremblement de terre est accompagné d'un ouragan, avec lequel il s'unit pour le malheur des habitans; mais une augmentation d'électricité s'y manifeste aussi presque toujours, et ils sont généralement annoncés par le mugissement des bestiaux, par l'inquiétude des animaux domestiques, et, dans les hommes, par cette sorte de malaise qui, en Europe, précède les orages dans les personnes nerveuses.

Parmi les pierres tombées de l'atmosphère depuis le petit nombre d'années que les physiciens s'occupent sérieusement de ce phénomène, il n'en est point qui approche de celle qui est tombée dans le département de l'Ardèche, le 15 juin 1821. Le temps était serein. Cette chute fut annoncée par une détonation qui dura vingt minutes, et qui fut entendue à huit et dix lieues de distance, au point d'y faire croire qu'elle provenait de quelque tremblement de terre. La pierre s'était enfoncée à cinq pieds dans le sol, et pesait 92 kilogrammes [184 livres]; à côté d'elle en était une de même nature, mais beaucoup plus petite, d'un kilogramme et demi. Malheureusement les paysans qui recueillirent les morceaux, brisèrent le premier en plusieurs pièces; ils sont, du reste, semblables, pour l'essentiel, à tous les autres aérolithes. M. le



préfet de l'Ardèche et quelques amis des sciences ont envoyé à l'Académie des échantillons de ces pierres, qui ont été analysés et déposés au Cabinet du Roi.

CHIMIE.

Nous avons parlé plusieurs fois, depuis sept ou huit ans, des études de M. Chevreul sur les corps gras, et particulièrement du beau résultat de ses recherches sur la saponification ou sur la formation du savon; opération qui ne consiste pas seulement dans l'union de l'alcali avec la graisse ou avec deux de ses principes immédiats, la stéarine ou l'élaïne, mais où les élémens primitifs de ces principes, pour pouvoir contracter cette union, se combinent entre eux d'une manière nouvelle, et forment des composés qui n'existaient pas auparavant, savoir, un principe doux, et les acides que M. Chevreul a nommés *margarique* et *oléique*.

L'auteur a fait, cette année, un grand travail pour déterminer avec précision les détails de cette métamorphose, et savoir dans quelle proportion les élémens primitifs, l'oxigène, le carbone, l'hydrogène, se trouvent avant et après l'opération, soit dans la graisse entière, soit dans ses principes immédiats. Il a employé pour cet effet les beaux procédés imaginés par M. Gay-Lussac pour analyser radicalement des substances organiques, en les brûlant par le péroxide de cuivre.

Le soin avec lequel il indique toutes les précautions que ces procédés exigent, donne l'idée la plus avantageuse de l'emploi qu'il en a fait.

La graisse d'homme et celle de porc, prises en masse, donnent à peu près les mêmes proportions d'oxigène, de carbone et d'hydrogène; mais celle de mouton a moins d'oxigène : dans toutes les trois, le carbone est à l'hydrogène à

peu près comme 10 à 18 en volume; ce qui approche de leur rapport dans l'hydrogène percarburé.

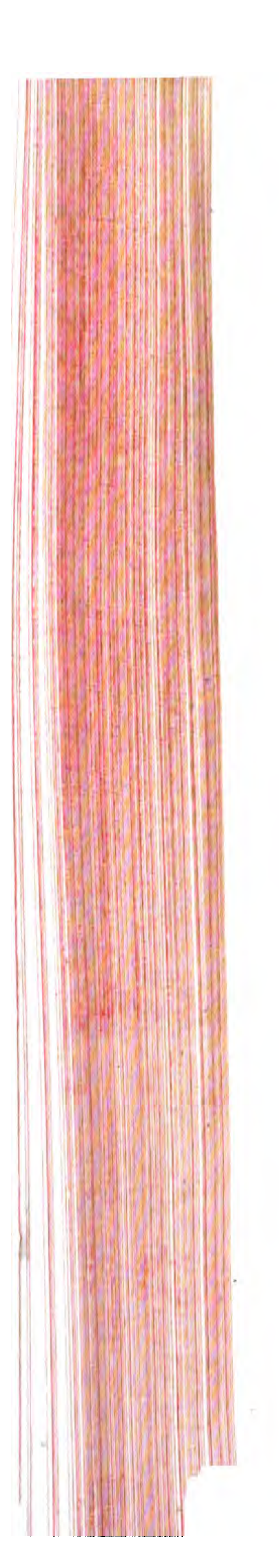
L'analyse particulière des deux principes immédiats, la stéatine et l'élaïne, donne encore à peu près le même rapport pour la première, mais il est plus faible dans la seconde.

La somme des poids de la graisse saponifiée et du principe doux, qui sont le résultat de la saponification, est plus forte que le poids de la graisse employée; ce qui prouve que dans l'opération il s'est fixé de l'eau.

Il y a moitié plus d'oxigène dans l'acide margarique de l'homme et du porc que dans celui du mouton; en sorte que M. Chevreul propose d'appeler ce dernier acide *margareux*. Les acides oléiques de ces espèces ont plus d'oxigène que leurs acides margariques respectifs; et leur composition pourrait être représentée par l'hydrogène percarburé, plus l'oxide de carbone.

De ces analyses comparatives il résulte que, dans l'action des alcalis sur les graisses, la plus grande partie du carbone et de l'hydrogène, en proportion très-rapprochée de celle où ils sont dans l'hydrogène percarburé, retient une portion d'oxigène pour constituer les acides margarique et oléique, tandis que le reste de l'hydrogène et du carbone, avec une portion d'oxigène égale à la moitié de ce qu'il faudrait pour brûler l'hydrogène, forme le principe doux, en fixant une certaine quantité d'eau.

Ici, comme dans plusieurs autres phénomènes chimiques, c'est la forte affinité de l'alcali pour les acides qui provoque cette rupture d'équilibre dans les élémens de la graisse, et les oblige de se réunir de manière à former des acides : aussi toutes les bases salifiables, douées d'une certaine énergie, la baryte, la chaux, et même des oxides métalliques, sont-elles capables de produire la saponification; et, moyennant certaines précautions, M. Chevreul est parvenu à la produire



aussi par la magnésie et par l'ammoniaque, qui s'y étaient long-temps refusées. C'est une opération inverse de la dissolution du fer et du zinc dans l'acide sulfurique étendu d'eau; dissolution où la forte affinité de l'acide pour des bases salifiables détermine la formation de ces bases par l'union de l'oxigène de l'eau avec le métal.

Lorsque les alcalis sont à l'état de sous-carbonate, c'est-à-dire, lorsqu'ils ne sont point saturés par l'acide carbonique, ils n'agissent que par une de leurs portions, laquelle, pour s'unir aux acides qui se forment, commence par céder son propre acide carbonique à l'autre portion; et ce surplus d'acide saturé se change en carbonate. L'adipocire, ou cette célèbre matière blanche et savonneuse découverte par Fourcroy, et dans laquelle se convertissent les cadavres ensevelis dans des lieux humides, est due, selon l'auteur, à l'action du sous-carbonate d'ammoniaque, produit de la putréfaction, sur la partie grasse du cadavre.

De savans chimistes avaient cru reconnaître que l'alcool et l'éther pouvaient convertir en partie toute substance animale azotée en adipocire; mais M. Chevreul prouve que, relativement à la fibrine, cette opinion n'est pas exacte, et que l'adipocire qui s'y trouvait toute formée, en est simplement extraite. On peut l'en retirer au moyen de l'eau; et, après qu'elle a été enlevée, la fibrine n'en donne plus à l'acide nitrique.

Nous avons dit précédemment par quelle analyse soignée M. Chevreul a enseigné à distinguer cette adipocire du blanc de baleine et des calculs biliaires, que Fourcroy avait long-temps cru être des substances identiques avec elle. Le principe du blanc de baleine, ou la matière nommée *cétine*, donne par la saponification beaucoup d'acide margarique, un peu d'un acide assez semblable à l'acide oléique, et un corps gras particulier. La cholestérine, ou le principe des calculs biliaires,

à cause d'un excès de carbone, ne produit point d'acide margarique, quand on l'expose à l'action des alcalis.

L'auteur vient encore de découvrir une substance de ce genre dans la fibrine desséchée. Elle se dissout par l'alcool et par l'éther, dont elle se sépare sous forme de lames et d'aiguilles; elle se fond à la chaleur de l'eau bouillante, n'est ni acide ni alcaline, et, ce qui est sur-tout remarquable, ne subit aucune altération par une longue ébullition dans une solution alcoolique de potasse. Cette substance existe aussi dans le sang d'homme et de bœuf, et M. Chevreul lui trouve de l'analogie avec la matière grasse du cerveau.

M. Chevreul, s'élevant à des considérations générales sur la nature des substances organiques, pense qu'au lieu de les regarder comme composées de trois ou quatre principes élémentaires ou primitifs, il faudra se les représenter comme résultant de la combinaison de deux principes plus ou moins composés, et unis entre eux comme un acide à un alcali, ou comme un comburant à un combustible, à peu près à la manière dont M. Gay-Lussac a représenté l'éther sulfurique comme de l'hydrogène percarburé uni à de l'eau.

Ces observations ont beaucoup d'importance, et en acquerront davantage à mesure qu'elles dirigeront les regards vers les effets de cette loi chimique par laquelle une substance énergique est en état d'amener, en quelque sorte, de force, la formation de substances opposées avec lesquelles elle puisse s'unir. Il n'est guère douteux que non-seulement la chimie générale, mais encore la physiologie des corps vivans, n'en puissent tirer beaucoup de lumières.

Le même savant et laborieux chimiste, M. Chevreul, a fait sur l'influence mutuelle de l'eau et de plusieurs substances azotées, des expériences qui ne deviendront pas moins fécondes. C'est l'eau qui donne aux tendons frais leur souplesse

et leur éclat nacré. Les tendons desséchés reprennent ces propriétés après quelques heures de séjour dans l'eau. Le tissu jaune élastique qui forme plusieurs ligamens du corps animal, reprend aussi par ce moyen son élasticité, après plusieurs années de dessèchement. L'expression mécanique de l'eau produit sur ces substances des effets fort analogues à ceux du dessèchement.

M. Chevreul pense que cette eau est retenue dans l'intérieur des organes par des forces analogues à celles qui font monter les liquides dans les tubes capillaires; il présume qu'elle joue un grand rôle dans l'état de vie, et appuie sa conjecture sur les expériences où M. Edwards a fait voir que les poissons mis à sec périssent par la seule transsudation de l'eau nécessaire au jeu de leurs organes.

MINÉRALOGIE.

M. Rivéro, jeune Péruvien, qui a suivi avec un grand succès nos diverses écoles de sciences, a présenté à l'Académie la description et l'analyse d'une substance qui s'est trouvée souvent à une grande profondeur, parmi d'anciennes couches de bois bitumineux, et dont un des élémens paraît entièrement étranger au règne minéral : elle a été découverte en Bohème par M. Breithaupt, et nommée par lui *résine ferrugineuse*. C'est un sous-oxalate de protoxide de fer, qui contient cinquante-quatre parties de fer peu oxidé et quarante-six parties d'acide oxalique. Cette analyse est intéressante en ce qu'elle prouve que l'acide oxalique existait dans les végétaux des antiques forêts qui ont fourni les lignites, comme dans les nôtres; elle prouve aussi que ces couches de lignites, placées presque toujours entre des bancs de pierre calcaire, n'ont cependant été déposées ni en même temps, ni par le même liquide : car l'affinité extrême de l'acide oxalique pour la chaux ne lui aurait

pas permis de se combiner avec le fer, s'il y avait eu dans ce liquide la moindre parcelle de chaux.

M. Rivero a donné à ce minéral le nom d'un homme qui se rattache à celui de sa patrie, par les vives lumières qu'il a jetées sur elle; il l'a appelé *humboldtine*.

GÉOLOGIE.

M. Cuvier donne une édition nouvelle et entièrement refondue de son *Histoire des ossemens fossiles*. Le premier volume a paru il y a six mois; le second et le troisième paraîtront sous peu de jours. Quelques-unes des découvertes nouvelles qui entrent dans ces trois volumes, ont été communiquées par l'auteur à l'Académie. Telles sont sur-tout une nouvelle et très-petite espèce d'hippopotame fossile, et trois espèces nouvelles de rhinocéros fossiles. Une de ces espèces a des dents incisives, comme tous les rhinocéros d'Asie; une autre réunit à ce caractère celui d'être tout au plus égale au sanglier pour la taille.

M. Cuvier a recueilli aussi plusieurs espèces fossiles de tapirs d'une très-grande taille, et jusqu'à six ou huit espèces d'un genre inconnu, voisin des tapirs, et qu'il nomme *lophiodon*.

Dans son troisième volume, qui traite des animaux enfouis dans les gypses des environs de Paris, M. Cuvier, ajoutant tous les morceaux qui lui ont été apportés depuis sa première édition, et les présentant dans un ordre plus méthodique qu'il n'avait pu le faire d'abord, restitue quinze espèces des genres perdus qu'il a désignés depuis long-temps sous les noms d'*anoplotherium* et de *palæotherium;* il fait connaître deux autres genres de pachydermes différens des premiers, et qu'il nomme *chæropotame* et *adapis*. Ces mêmes carrières de gypse lui ont fourni plusieurs espèces de carnassiers, deux rongeurs, et jusqu'à huit ou dix espèces d'oiseaux. On sait combien les oiseaux

sont rares parmi les fossiles, et même que ce n'est qu'à Montmartre qu'il en avait été trouvé d'incontestables. M. Cuvier en a recueilli en effet qui ne laissent aucun doute, et un, entre autres, qui présente toutes ses parties, le bec, les ailes, le sternum, le bassin et les pieds parfaitement reconnaissables.

On vient aussi d'en découvrir en Auvergne; et M. le comte de Chabrol, préfet de la Seine, en a donné au Muséum d'histoire naturelle des échantillons dont les caractères sont parfaitement assurés.

Le même troisième volume contiendra la description d'un genre de pachydermes entièrement inconnu et fort remarquable, qui vient d'être trouvé dans les lignites de la Ligurie.

Ainsi le catalogue de ces animaux qui habitaient autrefois la surface de la terre, et que les révolutions du globe ont détruits, s'étend et s'enrichit chaque jour, et il devient de plus en plus vraisemblable que cette ancienne population du monde n'était ni moins belle ni moins variée que celle qui l'occupe aujourd'hui.

On ne peut espérer de retrouver les traces des catastrophes qui ont frappé tant d'êtres considérables, que par une étude approfondie des couches et des bancs qui recèlent les débris de ces êtres. C'est à quoi MM. Brongniart et Cuvier ont donné, comme on sait, une grande attention dans le rayon qui se trouvait à portée de leurs observations.

Leur description géologique des environs de Paris reparaît augmentée de beaucoup de faits nouveaux, et M. Brongniart y a sur-tout ajouté un travail d'un grand intérêt.

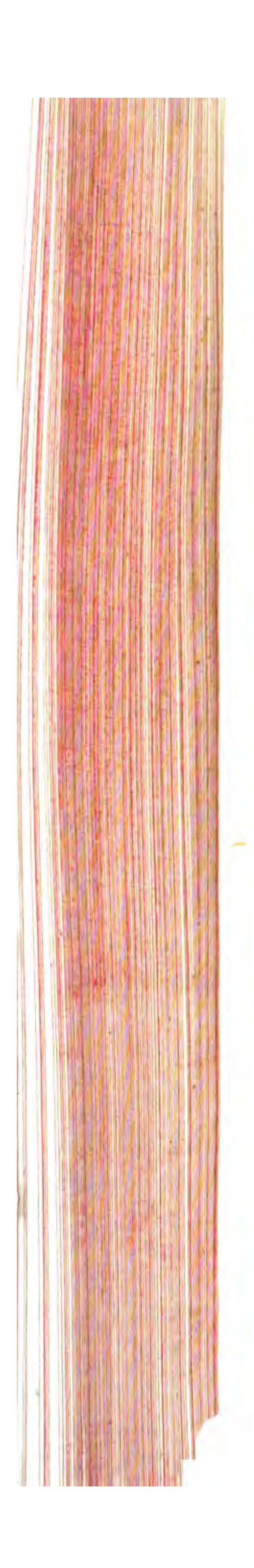
C'est une comparaison des couches de nos environs avec les couches analogues des autres pays; comparaison d'où il résulte que la plupart de nos couches s'étendent infiniment plus loin qu'on ne l'avait cru, en conservant toujours leurs caractères, et, qui plus est, les débris des mêmes espèces, soit d'animaux vertébrés, soit de coquilles.

C'est ainsi que dans la partie de ce travail qui concerne la craie, et que M. Brongniart a lue à l'Académie, il retrouve les mêmes coquilles, et dans le même ordre de superposition, en France, en Suisse, en Angleterre, en Allemagne, en Pologne, et jusqu'en Amérique.

Dans une autre partie de son travail, il fait connaître les rapports des terrains calcaires et trapéens qui occupent le pied méridional des Alpes de Lombardie, avec notre calcaire grossier inférieur. La position relative de ces terrains, que M. Brongniart a étudiés en cinq endroits différens, est la même ; on y trouve les mêmes débris organiques ; et il n'est pas jusqu'aux couches de nature trapéenne auxquelles M. Brongniart ne trouve de l'analogie avec les grains de terre verte si abondamment répandus dans cette partie de nos bancs calcaires.

Les recherches de ce savant minéralogiste sur l'argile plastique qui recouvre la craie, et sur les lignites ou bois fossiles qu'elle contient, ne sont pas moins dignes de remarque. Ces lignites, qui contiennent l'ambre jaune, ont été déposés dans l'eau douce, et par-tout où ils se montrent, c'est avec des coquilles d'eau douce ; en sorte que ce grand phénomène de l'envahissement de la mer sur des pays auparavant peuplés d'animaux et de végétaux terrestres n'est plus sujet à contestation pour aucune contrée. Dans la nôtre, il est certain qu'il a eu lieu au moins à trois époques distinctes. C'est à la seconde de ces époques que furent submergés les *palæotherium* et les autres quadrupèdes enfouis aujourd'hui dans nos gypses, ainsi que les palmiers et les autres végétaux qui les ombrageaient ou les nourrissaient.

L'histoire de ces végétaux elle-même était intéressante à faire. M. Adolphe Brongniart, digne fils d'un homme dont les travaux ont si fort avancé la géologie, s'en est occupé. Il a été obligé de chercher aux végétaux des caractères distinctifs,



tirés des parties qu'ils conservent dans l'état fossile, et qui sont souvent fort différentes de celles que les botanistes étudient le plus; et il est ainsi parvenu, non-seulement à étendre ce que MM. de Schlotheim et de Sternberg avaient déjà donné sur les végétaux fossiles en général, mais à déterminer particulièrement plusieurs des espèces de nos couches. Ces espèces ne diffèrent pas moins que les animaux, des végétaux qui couvrent aujourd'hui la surface du pays.

M. de Férussac, qui s'est tant occupé de l'histoire des coquilles de terre et d'eau douce, a cherché de nouveau à l'appliquer à l'histoire des révolutions du globe. Il a lu à l'Académie une suite de mémoires géologiques sur les terrains qu'il appelle tertiaires, particulièrement sur les dépôts de cette espèce de charbon de terre qu'on a nommée *lignite*, et sur les coquilles fluviatiles qui les accompagnent. Il décrit ces terrains tels qu'on les observe dans les divers bassins des rivières de France, en Angleterre, en Italie, dans les Alpes, et croit pouvoir tirer les résultats suivans des faits observés par lui ou par les autres géologues.

Selon lui, toutes ces sortes de formations sont locales. La succession des divers dépôts marins ou d'eau douce est le plus souvent différente dans des bassins contigus. Les débris de l'ancienne végétation du globe couvrent des parties considérables de sa surface; on en trouve à toutes les hauteurs et à toutes les latitudes. Cette dernière observation prouve qu'à des élévations ou à un degré de température qui ne permettent plus aujourd'hui à la végétation de se développer, elle était autrefois très-forte. Ses débris montrent qu'elle était analogue à celle qui couvre aujourd'hui la zone où nous vivons; tandis que les débris des végétaux renfermés dans les parties basses de notre sol sont, au contraire, analogues à la végétation actuelle de la zone torride. M. de Férussac en conclut que la température de la surface de la terre a notablement changé;

qu'il y a eu un refoulement de la végétation, des parties élevées vers les parties moyennes, et de celles-ci vers les parties basses. Comme la plupart des zoologistes du dernier siècle, il rapporte l'anéantissement des races d'animaux perdues aux mêmes causes qui ont fait changer la végétation, c'est-à-dire, à l'abaissement de la température et à celui des eaux, bien que l'on sache aujourd'hui que les animaux, tels que les mammouths, que l'on croyait naturels de la zone torride, ont au contraire très-bien pu supporter le froid, à cause de la laine et des longs poils dont ils étaient revêtus.

On avait trouvé, il y a quelques années, à la Guadeloupe, dans un endroit que recouvre la haute marée, des squelettes humains incrustés dans une roche calcaire; et l'on avait prétendu en faire un argument contre la proposition assez généralement reçue en géologie, qu'il n'existe point, sur nos continens actuels, d'os humains à l'état de fossile. M. Moreau de Jonnès, qui a examiné les lieux, a fait voir que la roche qui contient ces squelettes est d'origine très-moderne, et formée à cet endroit, comme en beaucoup d'autres points du rivage, par l'agglutination des fragmens de madrépores, et d'autres parcelles calcaires que la mer y rejette.

Ces squelettes n'appartiennent donc point à cet ordre d'ossemens fossiles qui remplit en si grande abondance les couches régulières et étendues du globe, et ils rentrent dans les phénomènes locaux et accidentels que les causes actuellement agissantes continuent de produire.

BOTANIQUE.

Dans un ouvrage intitulé *Flore médicale des Antilles*, M. Descourtils, qui a long-temps exercé la médecine dans les îles, a cherché à faire connaître les plantes usuelles qui s'y trouvent, ainsi que les propriétés que l'expérience a constatées pour

chacune d'elles dans le traitement des maladies, et à rattacher ces propriétés aux principes immédiats que l'analyse chimique y découvre. L'auteur décrit six cents plantes distribuées en vingt-cinq classes, d'après l'action thérapeutique qui leur est attribuée, et les représente par autant de figures coloriées. Il traite aussi de leur culture et des services qu'elles rendent aux arts et à l'économie rurale.

M. Delessert, associé libre, qui se plaît à faire servir une grande fortune aux progrès des sciences utiles, en même temps qu'il l'emploie avec tant de zèle au soulagement de l'humanité souffrante, vient de publier un premier recueil de plantes rares choisies dans les herbiers les plus considérables de Paris, et sur-tout dans le sien.

Ce volume contient cent planches exactement gravées au trait, d'après les dessins de l'habile artiste M. Turpin, avec des caractères extraits du *Système des végétaux* par M. Decandolle; les espèces qui y sont représentées sont presque toutes du nombre de celles que ce savant botaniste a décrites pour la première fois : elles appartiennent aux familles naturelles des ranunculacées, des dilléniacées, des magnoliacées, des annonacées et des ménispermées, et plusieurs sont fort remarquables par leur beauté ou la singularité de leurs caractères. Les botanistes ne peuvent que desirer vivement la continuation d'un ouvrage aussi intéressant.

M. de Humboldt travaille sans relâche à compléter la publication de ses immenses recherches sur l'Amérique équinoxiale. Les *Nova Genera et Species* que M. Kunth rédige pour cette grande collection, sont arrivés au dix-neuvième et au vingtième cahiers, qui sont les premiers du cinquième volume; la série des plantes polypétales commence dans cette partie de l'ouvrage. M. Kunth, en suivant généralement l'ordre établi par M. de Jussieu dans son *Genera*, y traite successivement les *araliacées*, les *ombellifères*, les *ranunculacées*, les *anones*, les

crucifères et les *capparidées*. Toutes ces familles ont éprouvé une augmentation très-considérable par les espèces découvertes par MM. de Humboldt et Bonpland. Les botanistes qui s'occupent plus particulièrement de la distribution des formes végétales, y remarqueront avec intérêt que la chaîne des Andes offre un grand nombre d'ombellifères et de crucifères, quoique ces deux familles appartiennent presque exclusiment à la zone tempérée.

Les mimoses et autres légumineuses, qui forment, dans le recueil général de M. de Humboldt, une collection particulière, exécutée avec plus de magnificence, en sont à leur huitième livraison.

M. de Humboldt lui-même a fait imprimer, dans le *Dictionnaire des sciences naturelles*, ses nouvelles recherches sur la distribution des formes végétales à la surface du globe, d'après les climats et les autres influences physiques dont nous avons déjà donné une analyse l'année dernière, et qui rectifient beaucoup d'idées peu exactes que l'on s'était faites sur ce sujet compliqué.

M. Decandolle s'est aussi occupé de ce sujet dans un Mémoire imprimé depuis dans le *Dictionnaire des sciences naturelles*. Il y analyse particulièrement l'influence des élémens extérieurs sur les végétaux; les modifications qui résultent pour chaque espèce du besoin qu'elle a des diverses substances, et des moyens par lesquels elle peut échapper à leur action; et l'effet de ces diverses combinaisons sur ce que les botanistes nomment les habitations des plantes et sur leurs stations, c'est-à-dire, sur les pays où elles se propagent et sur les lieux déterminés qu'elles occupent dans chaque pays. Ainsi parmi les plantes de France, parmi les plantes d'une province de France, les unes cependant ne viennent que sur les hauteurs, les autres que dans les marais ou sur les bords de la mer, &c. L'étude des stations est en quelque sorte la

topographie, et celle des habitations, la géographie botanique; et une partie de la confusion qui a régné dans cette branche de la science, vient de ce qu'on n'a pas assez distingué ces deux sortes de rapports. L'espèce de guerre que se font les végétaux en se disputant l'espace, les circonstances qui, en favorisant la multiplication d'une espèce, ou en arrêtant celle des autres, donnent à la première l'empire exclusif d'une certaine localité, sont encore, en cette matière, d'importans objets d'étude auxquels M. Decandolle a donné toute son attention. En quelques endroits, ces circonstances sont tellement impérieuses, qu'elles rendent sociales en apparence des plantes qui partout ailleurs vivent éparses.

M. Decandolle, dans ce Mémoire, estime à cinquante-six mille le nombre des espèces végétales déjà observées ou rassemblées dans les collections des botanistes, et peut-être à cent vingt mille celles qui existent sur le globe; ce qui laisse encore un vaste champ aux recherches, et indique en même temps l'absolue nécessité de perfectionner les méthodes.

M. Coquebert de Montbret, associé libre, a contribué à donner de la précision à un point important de cette géographie végétale par une carte de la France où il a porté avec exactitude, et d'après des renseignemens officiels, les limites de quatre de nos principales cultures; savoir, de la vigne, du maïs, de l'olivier et de l'oranger. Les lignes fort irrégulières que ces cultures ne dépassent point, sont déterminées par des causes qui rentrent toutes dans l'ordre de celles que nous venons d'indiquer.

PHYSIQUE VÉGÉTALE.

Plusieurs fois nous avons cherché à donner quelque idée de la manière dont M. du Petit-Thouars envisage la végétation. Ce savant botaniste a lui-même présenté à l'Académie une

sorte de résumé de sa doctrine, dont nous allons essayer de reproduire le tableau.

Le bourgeon, selon M. du Petit-Thouars, est le premier mobile de la végétation; il en existe un à l'aisselle de toutes les feuilles: il se nourrit aux dépens des sucs contenus dans le parenchyme intérieur du végétal, et c'est là ce qui fait passer ce parenchyme à l'état de moelle. On le prouve en faisant voir que les changemens dans la consistance de ce parenchyme correspondent à ceux qui arrivent au bourgeon. Dès que le bourgeon se manifeste, il obéit à deux mouvemens généraux, l'un ascendant ou aérien, l'autre descendant ou terrestre: du premier résultent les embryons des feuilles; du second, la formation de nouvelles fibres ligneuses et corticales; et ce second théorème se démontre de même par la coïncidence dans l'accroissement des parties intérieures et extérieures du végétal. C'est ainsi que M. du Petit-Thouars établit l'indépendance de la formation du liber et de celle du bois.

Il ajoute que les nouvelles fibres se forment aux dépens du cambium, c'est-à-dire, de la séve produite par les fibres plus anciennes, et déposée entre le bois et l'écorce. Ces fibres nouvelles apportent elles-mêmes la matière nécessaire à leur prolongement vers le bas, et c'est ce que l'on nomme la séve descendante. Ainsi se fait l'accroissement des arbres en épaisseur; et M. du Petit-Thouars assure qu'il est une époque de l'année où la plupart des arbres peuvent être dépouillés de toute leur écorce, et la reproduire en moins de quinze jours, sans qu'il soit nécessaire de leur appliquer aucun enduit. Ce sont aussi les fibres nouvelles qui sollicitent et qui apportent la matière de leur prolongement en hauteur, ou la séve montante. Deux substances résultent de cette séve: le ligneux, formé de fibres qui, une fois complètes, ne varient plus; et le parenchymateux, composé d'abord d'un amas de petits grains qui se gonflent en utricules. Le parenchymateux peut s'étendre au

tout sens, et est seul susceptible de prendre la couleur verte. Les parties ligneuses se forment ensemble depuis le sommet de l'arbre jusqu'à sa base. L'auteur a vu dans l'*helianthus annuus* ou soleil, des fibres d'une sorte de liber se montrant à l'extérieur sous l'épiderme, se forment en correspondance parfaite avec l'étui médullaire, et se laissant suivre de même depuis la racine jusqu'aux feuilles ou réciproquement.

La séve est l'aliment des plantes ; les racines la pompent sous forme humide : elle va dans les feuilles recevoir l'action de l'air ; elle ne se rend qu'aux points où elle est attirée par l'organisation ; et comme elle contient à-la-fois les élémens du ligneux et du parenchymateux par-tout où elle produit des fibres, il faut qu'elle dépose du parenchyme dans le voisinage. M. du Petit-Thouars a développé ce dernier théorème dans un Mémoire sur la séve, publié il y a déjà quelques années.

Comme c'est particulièrement sa manière d'envisager la moelle qui a éprouvé des contradictions de la part des autres botanistes, l'auteur a cru devoir s'attacher de préférence à exposer et à démontrer sa doctrine sur ce sujet.

La moelle est une des trois parties du système parenchymateux du végétal, qui n'est séparée d'abord d'une autre partie, celle qui forme le parenchyme cortical, que par ce que l'on nomme l'étui médullaire et la première couche du liber : mais, à mesure qu'il se forme de nouvelles couches de fibres ligneuses et corticales, il se montre une troisième partie de parenchyme qui entretient la communication entre les deux premières en traversant entre les fibres ; c'est ce qu'on appelle les rayons médullaires. La moelle se distingue par sa position dans l'axe de la partie aérienne du végétal, par son homogénéité, qui n'admet aucune fibre. Il n'y a point de moelle dans les monocotylédones, parce que tout le parenchymateux est répandu entre les fibres sans distinction. La moelle, d'abord

à l'état granuleux, puis gonflée en utricules polyèdres, prend sa consistance définitive lorsque le bourgeon, qui est toujours placé sur elle, et dans lequel il s'en montre déjà un prolongement, en absorbe les sucs : dès-lors elle n'a plus qu'une existence passive, et peut même être enlevée par la pourriture et par d'autres causes, sans que la vitalité du végétal en souffre; mais naturellement elle ne disparaît ni ne diminue. Chacun sait qu'elle est légère, compressible et élastique, et qu'après avoir été desséchée, elle reprend du volume en absorbant de l'eau.

Tout dans la nature organisée, jusqu'aux phénomènes les plus communs, les plus journaliers, est rempli de mystères. Depuis des siècles, les botanistes recherchent pourquoi, quand une graine germe, dans quelque position qu'on l'ait placée, la racine descend et la tige monte toujours. On a attribué ces effets à l'humidité, à la lumière, à l'air; mais aucune de ces causes ne les explique. M. Dutrochet a placé des graines dans des trous percés au fond d'un vase rempli de terre humide et suspendu au plafond d'une chambre. Il semblait qu'elles dussent pousser la tige en bas : il n'en fut rien. Les racines descendaient dans l'air, et les tiges se prolongeaient dans la terre humide jusqu'à ce qu'elles pussent percer sa surface supérieure.

C'est, selon M. Dutrochet, par un principe intérieur que les végétaux se dirigent, et nullement par l'attraction des corps vers lesquels ils se portent. Une graine de gui qu'on faisait germer, attachée à la pointe d'une aiguille parfaitement mobile sur un pivot, et à proximité de laquelle on avait mis une petite planche, dirigea bientôt ses racines vers la planche, et la leur fit atteindre en cinq jours, mais sans que l'aiguille sur laquelle elle était éprouvât le moindre mouvement.

Les torsions des feuilles et des autres parties des plantes vers la lumière se font aussi par un principe interne. Si l'on remplace leur pétiole par un cheveu, elles ne se tordent point sur le cheveu, mais leur partie supérieure se tord sur l'inférieure.

Des tiges d'oignon et de poireau, couchées dans l'obscurité avec leur bulbe, se redressent, bien que moins vite qu'à la lumière : elles se redressent, même lorsqu'on les couche dans l'eau; ce qui prouve bien que ce n'est ni l'air ni l'humidité qui leur impriment cette direction.

Ce Mémoire, rempli d'un grand nombre d'autres expériences intéressantes sur ce sujet, avait été présenté pour le prix de physiologie, et l'Académie a dû regretter que ce prix fût restreint, dès cette année, à la physiologie animale : toutefois elle a arrêté qu'il serait fait du travail de M. Dutrochet une mention honorable à la séance publique.

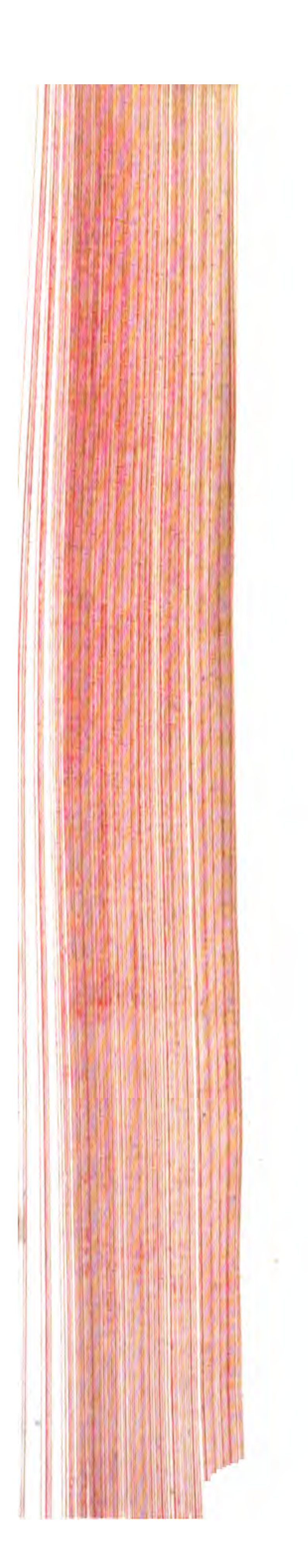
ZOOLOGIE.

L'histoire des mammifères de la ménagerie, par MM. Geoffroy-Saint-Hilaire et Frédéric Cuvier, avec des figures lithographiées d'après nature, prend chaque jour un nouvel intérêt, à cause des animaux rares et singuliers que la ménagerie reçoit des naturalistes envoyés par le Roi en différentes contrées, et nommément de MM. Diard, Duvaucel, Milbert, &c. Cet ouvrage s'enrichit même de peintures faites sur nature vivante aux Indes par ces courageux voyageurs, d'animaux qu'il aurait été difficile d'envoyer ici en vie. Ainsi l'on y verra les rhinocéros de Java et de Sumatra, différens l'un et l'autre de ceux d'Asie et d'Afrique; le tapir d'Asie, espèce entièrement nouvelle pour les naturalistes; une grande espèce de cerf, qui paraît le véritable hippélaphe d'Aristote; et une multitude de singes et de petits carnassiers entièrement inconnus.

MM. Diard et Duvaucel ont découvert jusqu'à cinq espèces de gibbons : il y en a une très-singulière par la réunion du second et du troisième doigt de ses pieds de derrière. Ces naturalistes ont aussi prodigieusement enrichi la liste des oiseaux par leurs envois. M. Milbert a beaucoup contribué à mieux faire connaître les cerfs de l'Amérique septentrionale, particulièrement cette grande espèce vaguement désignée sous le nom de *cerf du Canada*, et que l'on avait long-temps confondue avec le cerf d'Europe, bien qu'elle le surpasse beaucoup en grandeur, et qu'elle en diffère par le bois et par les couleurs.

M. Auguste de Saint-Hilaire a fait aussi des envois considérables de l'Amérique méridionale. Mais une des récoltes les plus avantageuses pour nos collections, en même temps que pour la science, est celle qu'a faite M. Delalande au cap de Bonne-Espérance ; elle est également importante pour toutes les classes du règne animal et pour l'anatomie comparée : on estime à plus de quinze cents le nombre des espèces de tout genre que cet ardent voyageur a rapportées, et à plus de dix mille celui des individus.

Les amis des sciences doivent aussi la plus grande reconnaissance aux officiers de terre et de mer qui, sans être naturalistes de profession, ne négligent aucune occasion d'enrichir nos collections publiques des productions des pays éloignés où leurs fonctions les appellent. Les gouverneurs de la plupart de nos colonies, M. le baron Milius à Bourbon, M. le général Donzelot à la Martinique, s'en sont occupés avec soin. M. Durville, qui a travaillé avec M. Gauthier à relever les côtes de la mer Noire, en a rapporté beaucoup d'insectes et de reptiles qui peuvent nous servir à expliquer divers passages des anciens. L'expédition de M. le capitaine de Freycinet autour du monde a été d'autant plus fructueuse, que les marins et les officiers de santé ont en quelque sorte



rivalisé entre eux pour recueillir tout ce qui se présentait d'intéressant, et qu'ils ont fait preuve dans leurs choix d'autant de lumières que de zèle.

On sent qu'il nous est impossible de donner ici même une idée sommaire d'acquisitions si nombreuses : mais les savans et les amateurs en jouiront bientôt dans les relations de ces voyages, dont la publication est favorisée par le Gouvernement ; et il n'est pas douteux que dans bien peu de temps il ne devienne nécessaire de refondre tous les ouvrages généraux de zoologie qui existent.

Continuant son histoire des reptiles des Antilles, M. Moreau de Jonnès nous a communiqué cette année ce qui concerne les *anolis*. On nomme ainsi un sous-genre de lézards à langue courte, à jambes élancées, à doigts élargis dans leur milieu et striés en dessous, qui courent avec rapidité à la poursuite des insectes. Leur gorge s'enfle dans la colère, et leur peau change comme celle du caméléon, suivant les passions qu'ils éprouvent et le plus ou moins de lumière qui les frappe, du brun et du gris au verdâtre ou au bleuâtre: aussi leur structure intérieure a-t-elle de grands rapports avec celle du caméléon. M. de Jonnès en a observé deux espèces: celle que les naturalistes ont nommée *le goîtreux*, et dont la gorge, qui s'enfle beaucoup dans la colère, prend alors une teinte orangée; et celle qu'on pourrait nommer *rayée*, parce qu'elle a le long de son dos une bande de couleur pâle bordée de deux lignes plus obscures. Elles vivent toutes deux et en grande abondance près des habitations. M. de Jonnès décrit leurs mœurs et explique comment les variations de leurs couleurs ont induit les voyageurs et les naturalistes à en multiplier mal-à-propos les espèces.

M. de Férussac a présenté la suite de son *Histoire des*

mollusques de terre et d'eau douce, ouvrage qui n'est pas moins remarquable par le nombre des espèces et des faits intéressans que par la beauté des planches.

Pour mieux faire sentir d'avance tout ce que cet ouvrage doit contenir, M. de Férussac a commencé à en publier le tableau général. Les gastéropodes à poumons, ou qui respirent l'air en nature, soit qu'ils vivent à terre ou dans les eaux, offriront à eux seuls plus de trois cents espèces.

Le même auteur s'est occupé de faire concorder ensemble les différens systèmes d'après lesquels les naturalistes ont classé les mollusques, en présentant en regard de chacune de ses subdivisions les subdivisions qui lui correspondent dans les méthodes des autres auteurs. Le fond de la sienne est pris en grande partie de celle de M. Cuvier, à laquelle il fait subir cependant des modifications assez importantes, dues aux naturalistes les plus récens, et en partie aussi aux observations propres à l'auteur ou à ses méditations. C'est principalement dans la famille des gastéropodes à poumons et sans opercules, et dans celle des gastéropodes à branchies en forme de peigne, que ces changemens ont eu lieu; et parmi les faits de détail sur lesquels ils reposent, on a sur-tout remarqué une description nouvelle et exacte de l'animal des ampullaires, dont l'auteur a montré l'analogie avec celui des trochus.

M. Lamouroux, à qui nous devions déjà un ouvrage important sur l'histoire des polypiers flexibles ou cornés, vient de publier une exposition méthodique des genres de l'ordre entier des polypiers, où il a fait entrer les découvertes les plus récentes des naturalistes. Cet ouvrage, très-utile, est accompagné de quatre-vingt-quatre planches, dont les soixante-trois premières sont les mêmes qui avaient servi à l'ouvrage d'Ellis et de Solander sur cette famille d'animaux, mais dont les autres ont été gravées sous les yeux de l'auteur, et pré-

sentent une foule d'objets dont Ellis et Solander n'avaient pas eu connaissance.

Le rosier à fleurs blanches, et celui qu'on nomme vulgairement *des quatre saisons*, paraissent quelquefois couverts de petites pustules dont l'abondance excessive les fait périr. M. Virey a reconnu sous ces enveloppes particulières de petites loges contenant chacune un ou plusieurs très-petits insectes, qu'il rapporte au genre des cochenilles, et qu'il a décrits autant que leur petitesse l'a permis. Comme dans d'autres espèces de ce genre, le tubercule qui leur sert d'enveloppe n'est que le corps desséché de leur mère, qui leur donne encore un abri pour quelque temps.

M. Audouin a découvert un petit animal parasite qui s'attache à ce genre d'insecte aquatique et carnassier connu sous le nom de *dytisque*. Son corps a la forme d'une cornue, et adhère au dos de l'abdomen du dytisque par la partie mince et en forme de bec. Entre cette partie mince et la partie renflée sont un suçoir délié et trois paires de pattes de cinq articles chacune. M. Audouin fait de cet animal un genre qu'il nomme *achlysie*, et qu'il place dans la tribu des acarides.

Mais l'une des découvertes les plus surprenantes qui aient été faites en zoologie, c'est celle de la multiplicité des espèces de ver de terre, observée par M. Savigny. Qui aurait pu croire que des animaux si connus, que l'on foule aux pieds tous les jours, et dont on n'avait jamais soupçonné les différences, en offraient cependant de telles, qu'en se bornant à ceux des environs de Paris, on pouvait en compter jusqu'à vingt-deux espèces? Cependant cette multiplicité est aujourd'hui certaine, selon l'auteur; et comme ces espèces se trouvent toutes dans nos jardins, et que la plupart y sont communes,

chacun peut s'assurer par ses yeux de la réalité et de la constance de leurs caractères. Il n'est même besoin, pour les distinguer avec certitude et les ordonner entre elles, que de faire attention à trois sortes d'organes parmi ceux qu'elles présentent à l'extérieur, toutes trois, il est vrai, très-importantes, puisque l'une sert au mouvement progressif, et que les deux autres concourent à la génération.

Ces organes sont, 1.° les *soies;* 2.° les deux *grands pores* découverts sous le ventre par Muller, et que l'auteur nommerait volontiers *pores copulatoires*, parce qu'il les croit le siége d'une sensation particulière que certains appendices qui s'y introduisent dans l'accouplement sont propres à exciter; 3.° la *ceinture*, ou ce renflement situé en arrière des grands pores avec chacun desquels il communique par un double sillon, et sur-tout les petites fossettes ou petits pores rangés à chacun de ses côtés.

Ainsi l'on observera d'abord si les huit séries de soies qui parcourent le corps dans toute sa longueur sont également espacées, ou si elles sont disposées par paires, et, dans ce dernier cas, si les soies de chaque paire sont écartées ou rapprochées.

On regardera ensuite sous quel segment sont situés les deux grands pores du ventre, car ils s'ouvrent tantôt sous le quinzième, tantôt sous le treizième; et l'on remarquera si leurs bords s'étendent ou ne s'étendent point sous les segmens voisins.

Enfin on examinera de combien d'anneaux se compose la ceinture, avec quelle articulation du corps elle finit; et l'on s'attachera sur-tout à reconnaître le nombre et l'exacte situation des pores saillans dont les deux côtés sont chargés. Le nombre de ces pores, pour chacun des côtés, ne varie que de deux à quatre; et leur disposition est telle, que la bandelette charnue qu'ils forment par leur alignement, ou dans la

quelle ils semblent ouverts, occupe toujours la partie moyenne ou la partie postérieure de la ceinture. D'ailleurs leurs autres relations sont assez variables; tantôt ils correspondent chacun à deux anneaux, tantôt à un seul : dans le premier cas, ces anneaux sont toujours contigus; mais ils ne le sont pas toujours dans le second, et communément entre deux anneaux pourvus d'un pore il s'en trouve un qui en est dépourvu.

Ces considérations suffisent à toutes les distinctions. Néanmoins, si l'on voulait appuyer les principales de quelques caractères pris à l'intérieur, il ne faudrait pour cela qu'examiner deux autres sortes d'organes; savoir, les *glandes séminales* ou testicules, et les *ovaires*.

M. Savigny donne le nom de *glandes séminales* à des corps ronds ou ovoïdes, mous, lisses, vésiculeux, blanchâtres, disposés par paires en avant des grands pores, dans cet espace qu'occupent les cinq anneaux un peu renflés compris entre le septième et le treizième. Elles s'insèrent sur le bord antérieur des quatre premiers au moyen d'un petit pédicule qui communique manifestement avec l'extérieur. Le nombre de ces glandes correspond parfaitement à celui des pores de la ceinture, contre lesquels leur orifice s'applique dans l'accouplement pour les recouvrir de la liqueur blanche que ces pores sont chargés d'absorber et de transmettre aux ovaires. Il y a donc au plus quatre paires de glandes séminales. Quand elles sont réduites à trois paires, c'est par l'absence de la première; quand elles le sont à deux, c'est par l'absence de la première et de la seconde; de sorte que les deux paires postérieures existent toujours : on n'a donc à tenir compte que de leur nombre et de leur insertion, tantôt plus rapprochée de la face ventrale que de la dorsale, et tantôt plus éloignée.

Les *ovaires* situés entre les glandes séminales, quoiqu'un peu plus en arrière, sont au nombre de trois à quatre de

chaque côté. Lorsqu'il n'y a que trois paires d'ovaires, leur structure est à peu près semblable; mais il a paru à l'auteur que lorsqu'il y en avait quatre, celle des deux premières était moins compliquée.

Une sixième considération de moindre valeur que les cinq précédentes, mais qu'on peut y ajouter parce qu'elle repose sur un fait qui frappe d'abord les yeux et qui se manifeste dans toutes les saisons, est celle de la présence d'une liqueur opaque colorée, qui s'échappe par les pores dorsaux de l'animal, ou de l'absence de cette liqueur.

Avant d'exposer le détail des espèces, l'auteur rappelle que, dans un travail qu'il présenta en 1817 à l'Académie, le genre des lombrics est converti en famille, et que le lombric ordinaire y constitue un genre particulier sous le nom d'*enterion*.

Les caractères du genre ENTERION peuvent se réduire aux suivans :

Soies très-courtes, au nombre de huit à tous les segmens, quatre de chaque côté, formant, par leur distribution sur le corps, huit rangées longitudinales; savoir, quatre supérieures ou simplement latérales, et quatre inférieures. Une ceinture précédée de deux grands pores dont elle est séparée par plusieurs segmens.

Il est nécessaire d'établir dans ce genre deux divisions principales.

Dans la première, les grands pores sont placés sous le quinzième segment.

Cette division peut elle-même se subdiviser en plusieurs petites tribus comme il suit.

1.re TRIBU.

Les soies sont rapprochées par paires. La ceinture a de chaque côté deux pores qui correspondent chacun à un seul segment, et qui, si l'on compte celui qui les sépare, comprennent les trois pénultièmes. Les glandes séminales,

rapprochées du ventre, sont au nombre de deux paires. Point de liqueur colorée.

Il y a des espèces qui ont quatre ovaires de chaque côté.

1.re Espèce. *Enterion terrestre.* La ceinture, de neuf segmens, finit avec le trente-cinquième du corps.

2.e Espèce. *Enterion caliginosum.* La ceinture, de huit segmens, finit avec le trente-quatrième du corps.

D'autres espèces n'ont que trois paires d'ovaires.

3.e Espèce. *Enterion carneum.* La ceinture, de sept à huit segmens, finit aussi avec le trente-quatrième du corps.

2.e TRIBU.

Les soies sont rapprochées par paires. La ceinture a de chaque côté des soies qui correspondent chacune à deux segmens; ces pores occupent les quatre segmens intermédiaires, que la bandelette dans laquelle ils sont compris ne dépasse point. Les glandes séminales, rapprochées du ventre, sont au nombre de deux paires. Il y a trois paires d'ovaires. Point de liqueur colorée.

La plupart des espèces ont des ovaires dont le volume augmente de la première paire à la dernière.

4.e Espèce. *Enterion festivum.* La ceinture, de six segmens, finit avec le trente-neuvième du corps.

5.e Espèce. *Enterion herculeum.* La ceinture, de six segmens, finit avec le trente-septième du corps.

6.e Espèce. *Enterion tyrtæum.* La ceinture, de six segmens, finit avec le trente-cinquième du corps.

Quelques-unes cependant ont des ovaires dont la seconde paire est plus petite que la première; la dernière très-étendue.

7.e Espèce. *Enterion castaneum.* La ceinture, de six segmens, finit avec le trente-troisième du corps. Les pores du quinzième segment sont à peine visibles.

8.e Espèce. *Enterion pumilum.* La ceinture, de six segmens, finit de même avec le trente-troisième du corps. Les pores du quinzième segment sont saillans et très-visibles.

3.e TRIBU.

Les soies sont disposées par paires, mais peu rapprochées. La ceinture a de chaque côté deux pores contigus qui correspondent chacun à un seul segment; ils occupent les deux segmens intermédiaires, que la bandelette dans laquelle ils sont compris dépasse à ses deux bouts. Les glandes séminales, rapprochées du ventre, sont au nombre de deux paires. Il y a trois paires d'ovaires. Point de liqueur colorée.

9.e Espèce. *Enterion mammale.* La ceinture, de six segmens, finit avec le trente-sixième du corps.

4.e TRIBU.

Les soies sont disposées par paires, mais peu rapprochées. La ceinture a de chaque côté deux pores qui correspondent chacun à deux segmens et qui occupent les quatre segmens intermédiaires; la bandelette charnue dans laquelle ils sont compris, s'étend d'un bout à l'autre de cette ceinture. Les glandes séminales, rapprochées du ventre, sont au nombre de deux paires. Il y a quatre paires d'ovaires. Les pores du dos répandent une liqueur d'un jaune clair, dont le réservoir antérieur forme un demi-collier au quatorzième segment.

10.e Espèce. *Enterion cyaneum.* La ceinture, de six segmens, finit avec le trente-quatrième du corps.

5.e TRIBU.

Les soies sont disposées par paires. La ceinture a de chaque

côté deux pores contigus qui correspondent chacun à un seul segment; ils occupent les deux antépénultièmes, que la bandelette dans laquelle ils sont compris dépasse à ses deux bouts. Les glandes séminales, rapprochées du dos, sont au nombre de deux paires. Les pores dorsaux laissent échapper une liqueur colorée plus ou moins fétide.

Certaines espèces ont les soies de chaque paire très-rapprochées et quatre paires d'ovaires. Les unes répandent une liqueur d'un gris jaunâtre, peu odorante, qui dans l'alcool devient concrète et d'un blanc de craie.

11.e Espèce. *Enterion roseum*. La ceinture, de huit segmens, finit avec le trente-deuxième du corps.

Les autres possèdent une liqueur très-fétide, d'un jaune de safran.

12.e Espèce. *Enterion fetidum*. La ceinture, de sept segmens, finit avec le trente-deuxième du corps.

D'autres espèces ont les soies de chaque paire très-écartées et n'ont que trois paires d'ovaires. La liqueur qu'elles répandent est d'un jaune de safran.

13.e Espèce. *Enterion rubidum*. La ceinture, également formée de sept segmens, finit de même avec le trente-deuxième du corps : elle est souvent incomplète.

6.e TRIBU.

Les soies sont rapprochées par paires. La ceinture a de chaque côté trois pores qui correspondent chacun à un seul segment, et qui, si l'on compte ceux qui les séparent, comprennent les cinq segmens intermédiaires. Les glandes séminales, rapprochées du ventre, sont au nombre de trois paires. Il y a quatre paires d'ovaires. Les pores du dos laissent écouler une liqueur verte, ou d'un jaune de soufre, dont le réservoir antérieur forme un demi-collier au quatorzième segment.

14.e Espèce. *Enterion chloroticum.* La ceinture, de neuf segmens, finit avec le trente-septième du corps.

15.e Espèce. *Enterion virescens.* La ceinture est comme dans la précédente, dont celle-ci diffère principalement par la couleur, et n'est peut-être qu'une variété.

7.e TRIBU.

Les soies sont disposées par paires. La ceinture a de chaque côté quatre pores qui correspondent chacun à deux segmens et occupent les huit intermédiaires. Les glandes séminales, rapprochées du ventre, sont au nombre de quatre paires. Il y a quatre paires d'ovaires. Les pores du dos répandent une liqueur d'un jaune clair, dont le réservoir antérieur forme un demi-collier au quatorzième segment.

Tantôt les soies de chaque paire sont rapprochées.

16.e Espèce. *Enterion ictericum.* La ceinture, de dix segmens, finit avec le quarante-quatrième du corps.

Tantôt les soies de chaque paire sont écartées.

17.e Espèce. *Enterion opimum.* La ceinture, de dix segmens, finit avec le trente-huitième du corps.

8.e TRIBU.

Les soies sont également espacées, très-écartées. La ceinture a de chaque côté trois pores contigus qui correspondent chacun à un seul segment et occupent ses trois derniers. Les glandes séminales, rapprochées du dos, sont au nombre de trois paires. Il y a trois paires d'ovaires. Point de liqueur colorée.

18.e Espèce. *Enterion octaedrum.* La ce
cinq segmens, finit avec le trente-troisimd

19.e Espèce. *Enterion pygmæum.* La ceinture, formée de cinq segmens, finit avec le trente-septième du corps.

En terminant cette esquisse de la présente division, l'auteur fait remarquer que le numéro du segment avec lequel se termine la ceinture, est un nombre impair dans la 2.e tribu, la 6.e et la 8.e, un nombre pair dans la 3.e, la 4.e, la 5.e et la 7.e; différence dont on peut au besoin tirer parti.

Dans la seconde division, les grands pores sont situés sur le treizième segment.

Cette division ne comprend encore qu'une seule espèce qui a les soies rapprochées par paires; la ceinture pourvue, des deux côtés, de deux pores qui correspondent chacun à deux segmens et occupent les quatre intermédiaires; les glandes séminales au nombre de deux paires, et trois paires d'ovaires. Elle ne répand aucune liqueur colorée.

20.e Espèce. *Enterion tetraedrum.* La ceinture, formée de six segmens, finit avec le vingt-septième du corps.

L'auteur ne comprend pas dans cette liste quelques espèces qu'il possède en nature, mais dont il n'a rencontré que des individus imparfaits ou incomplets.

Telle est l'analyse du travail de M. Savigny, que nous avons cru devoir donner avec quelque étendue à cause de l'intérêt qu'une suite de faits aussi peu attendus ne peut manquer d'inspirer à tous les naturalistes. Il est important de rappeler chaque jour combien nous sommes peu avancés dans l'étude des trésors de la nature, et il n'y en eut assurément jamais de preuve plus frappante que celle-ci.

M. Latreille, dans un Mémoire où il cherche à montrer l'analogie des appendices du corps entre eux dans les animaux articulés, à les prendre depuis les mâchoires jusqu'aux crochets des insectes mâles, et aux nageoires qui terminent la queue des écrevisses, a considéré ceux de ces animaux qui ont des membres articulés, comme formant deux séries parallèles : l'une, qui comprend les insectes et les crustacés

moins le limule ; l'autre, qui embrasse le limule et les arachnides.

Ici le nombre des ganglions nerveux est beaucoup moindre, et la bouche n'offre ni mandibules ni mâchoires proprement dites. Cette série se termine par des acarides à six pattes, et l'autre par des hippobosques aptères. Les appendices propres aux thorax, mais distincts des pieds, et ceux du premier segment de l'abdomen, lorsqu'il en est pourvu, sont, selon M. Latreille, des moyens auxiliaires pour les organes ordinaires de la locomotion, et empruntés des tégumens ou des organes respiratoires. Il applique ce principe à la considération des ailes des insectes, de leurs élytres, des balanciers des diptères, des peignes des scorpions, et de certains corps qui accompagnent soit les branchies, soit les pieds de divers crustacés. L'auteur passe ensuite à l'examen des appendices situés aux deux extrémités du corps. Si l'on en excepte les organes copulateurs, la composition de ces parties est, dans son opinion, la même que celle des pieds, mais sous des formes et avec des propriétés généralement différentes et très-variées. M. Savigny avait déjà fait connaître les rapports qui existent entre les pieds-mâchoires des crustacés et leurs pieds proprement dits. M. Latreille étend ces analogies aux antennes et aux palpes; il tâche de ramener à un type unique de composition, mais modifié, les organes de la manducation des crustacés, des arachnides et des insectes, animaux que M. Savigny avait aussi considérés sous le même point de vue, mais d'une manière isolée et sans connexion. Ces observations paraissent à M. Latreille nécessiter quelques changemens dans les dénominations de quelques parties principales; et c'est par cette exposition qu'il termine son Mémoire.

PHYSIOLOGIE ANIMALE ET ANATOMIE.

Nous avons parlé, dans notre Analyse de l'année dernière, des vues de M. Geoffroy-Saint-Hilaire sur les monstres, et de l'espèce de classification qu'il en a donnée, sur-tout d'après les diverses altérations de leur cerveau et de leur crâne. Il a continué, cette année, ses recherches sur ce sujet important; et, des monstruosités plus ou moins extraordinaires qu'il a observées, il a déduit des conclusions générales et intéressantes sur le principe du développement des êtres et sur les causes des exceptions auxquelles ce principe est soumis.

Dans les fœtus nommés long-temps *acéphales*, il s'en faut de beaucoup que la tête manque entièrement; on en retrouve presque toujours les os, mais affaissés et rapetissés. Le plus souvent on voit que le cerveau était déplacé et sortait du crâne par une ouverture laissée entre les os; quelquefois l'épine elle-même est ouverte et laisse sortir au-dehors une partie de la moelle épinière. Les cerveaux ainsi déplacés ne consistent souvent que dans les méninges, qui, au lieu d'une vraie substance cérébrale, ne contiennent qu'un fluide plus ou moins sanguinolent; et, dans ce cas-là, on voit les racines des nerfs comme isolées sur la base du crâne, au travers des trous de laquelle passent leurs troncs.

D'autres monstruosités ont donné à M. Geoffroy les mêmes preuves que l'organisation fondamentale se conserve toujours au milieu des anomalies : ainsi dans les *becs-de-lièvre* il ne s'agit que d'une solution des articulations, soit des os intermaxillaires entre eux quand le bec-de-lièvre est simple, soit de ces os avec les maxillaires quand il est double. Dans ce que l'on nomme des *fœtus à trompe*, c'est le défaut d'ossification ou de développement des os de la cavité nasale qui permet aux yeux de se rapprocher et de se confondre, et qui laisse les parties

molles du nez en quelque sorte suspendues et représentant souvent avec beaucoup d'exactitude une trompe de tapir ou d'éléphant.

Dans un monstre né à Lille, et qui avait non-seulement le cerveau hors du crâne et comme porté par une espèce de pédicule, mais les viscères de la poitrine et de l'abdomen en grande partie hors de leurs cavités, on retrouvait cependant les os du crâne sous le cerveau qu'ils auraient dû couvrir, et les os de la poitrine seulement écartés les uns des autres; mais ces déplacemens du cerveau, du cœur, des poumons, &c., avaient produit sur ces viscères et sur ceux qui étaient restés dans l'intérieur, de grands changemens de configuration.

M. Geoffroy attribue ces déviations de la proportion naturelle à des causes extérieures qui gênent le développement de certaines parties, ou à des causes intérieures qui en troublent l'équilibre. Les dernières consistent principalement dans un défaut de proportion du calibre des artères : la partie qu'une artère est destinée à nourrir, se rapetisse et s'atrophie si cette artère s'obstrue; elle reçoit au contraire une nourriture surabondante si l'artère est plus grosse qu'il ne conviendrait : de là un défaut d'équilibre dans la réaction des parties, qui fait que le contenant chasse le contenu, ou que le contenu transgresse les limites que lui opposait le contenant. M. Geoffroy a vérifié cette disproportion des artères dans quelques-uns de ces monstres.

Quant aux causes extérieures, il admet que, dans quelques cas, le placenta contracte des adhérences avec certains viscères, avant que l'enveloppe osseuse qui doit les renfermer ait pris sa consistance, qu'il les attire au-dehors, et qu'il empêche ainsi que les boîtes osseuses ne puissent se clore, d'où résultent ensuite une foule d'anomalies. Il a vu de semblables brides du placenta, qui s'attachaient à certaines parties, et il conçoit qu'il ait pu y en avoir d'autres qui ont produit des

monstruosités difficiles aujourd'hui à expliquer, parce que l'on a négligé de constater ces circonstances.

Après s'être occupé de la composition du crâne et de ses élémens osseux, M. Geoffroy passe à l'histoire des vertèbres et de leur formation. Non-seulement il considère le canal médullaire comme un double tuyau formé du périoste intérieur et de l'extérieur, entre lesquels se manifestent les points osseux dont l'assemblage forme ensuite chaque vertèbre, mais il voit encore dans la colonne vertébrale un troisième tuyau de même nature que les deux autres, et qui enfile les corps de toutes les vertèbres. Ses recherches ont commencé par celui de tous les animaux dont les vertèbres semblent avoir pris le moins de développement, et où le troisième tuyau forme la partie principale et la plus sensible de la colonne. On avait même dit anciennement que toute l'épine de la lamproie se réduisait à une sorte de corde fibreuse et cartilagineuse : mais depuis quelque temps M. Cuvier avait reconnu que cette corde ne constitue pas l'épine ; qu'elle représente seulement les cartilages intervertébraux, qui déjà dans les poissons ordinaires cartilagineux, tels que les squales, se rapprochent tellement par leurs pointes, qu'ils semblent traverser les axes des corps des vertèbres, et qui même dans l'esturgeon forment déjà en partie une corde très-semblable à celle de la lamproie. M. Geoffroy a donné plus de généralité à cette proposition en faisant voir qu'en effet dans tous les poissons ces cônes de gélatine ou de cartilage, situés entre les vertèbres, s'attachent les uns aux autres par des filets qui traversent le trou dont l'axe de la vertèbre est toujours percé, et qu'ils forment en conséquence une sorte de chapelet continu. Ce que la lamproie a de particulier, c'est que les corps de ses vertèbres restent toujours annulaires et gélatineux, qu'au lieu d'un chapelet c'est un tube uniforme qui les enfile, et que leur partie annulaire prend à peine une consistance

gélatineuse, ou un très-léger commencement d'ossification sur quelques points.

M. Geoffroy a imaginé des moyens de rendre ces véritables parties de vertèbres plus sensibles, et achève ainsi de ramener la lamproie aux caractères des autres animaux vertébrés.

M. Geoffroy prouve, au surplus, que cet état permanent dans la lamproie n'est que la représentation durable d'un état qui se montre plus ou moins dans tous les animaux vers l'origine de leur vie de fœtus, et lorsque leurs vertèbres n'ont encore aucune partie ossifiée.

Il existe quelques perroquets auxquels les naturalistes ont donné le nom d'*aras* ou de *perroquets à trompe*, parce que leur langue, de forme cylindrique, et terminée par un léger renflement, pouvant saillir beaucoup hors du bec, présente une sorte de ressemblance avec une trompe.

M. Geoffroy, ayant eu occasion d'observer en vie un de ces oiseaux, a fait voir que cette partie de leur organisation rentre pour le fond dans la structure générale de la langue des perroquets; le tubercule de l'extrémité est la langue toute entière, qui peut se ployer longitudinalement pour mieux saisir et goûter plus exactement les parcelles de nourriture. La tige cylindrique qui porte cette langue ou ce tubercule, ou, si l'on aime mieux, cette petite pince, est formée de la partie antérieure de l'hyoïde, enveloppée par les tégumens communs. Chacun sait que c'est ainsi que la langue des pics est portée en avant sur une tige formée par les branches de l'hyoïde. L'auteur, supposant que le nom de *trompe* doit être réservé aux organes résultant, comme la trompe de l'éléphant, d'un prolongement de la cavité nasale, demande, pour éviter toute équivoque, que ces perroquets soient désignés par l'épithète de *microglosses*.

Un heureux hasard ayant mis à la disposition de M. Geof-

froy un fœtus de perroquet près d'éclore, il s'aperçut que les bords du bec de cet individu étaient garnis de tubercules placés avec régularité et présentant toutes les apparences extérieures des dents. A la vérité, les tubercules n'étaient pas implantés dans l'os maxillaire; ils faisaient corps avec le reste de l'enveloppe extérieure du bec; et lorsqu'on l'enlevait, ils tombaient avec elle : mais ils n'en avaient pas moins avec les véritables dents cet autre rapport de nature, que sous chacun d'eux était, au bord de l'os maxillaire, une sorte de grain ou de noyau gélatineux, analogue aux noyaux sur lesquels se forment les dents, et des tubes, traversant régulièrement l'épaisseur de l'os et correspondant à chacun de ces noyaux, y conduisaient des vaisseaux et des nerfs. A cette époque la ressemblance est d'autant plus grande, que l'enveloppe du bec, dont ces espèces de dents font les crénelures, n'est point encore de nature vraiment cornée, mais consiste en un tissu d'une blancheur, d'une transparence et d'une ténacité comparables, selon M. Geoffroy, à la substance de cette coque qui constitue la dent lors de sa première concrétion dans la gencive. Le premier bord saillant du bec consisterait donc en une suite de tubercules nés chacun sur un germe pulpeux; et cette origine se marque toujours dans la suite : car, si l'on amincit adroitement la partie cornée d'un bec inférieur de perroquet, on finit par mettre à nu une rangée de tubes qui occupent son épaisseur depuis les bords de l'os maxillaire jusqu'à ceux du bec corné lui-même, et qui sont remplis d'une matière moins dure, plus brune que le reste. Chacun d'eux prend naissance d'un petit trou du bord de l'os, et M. Geoffroy les considère comme les restes d'autant de germes ou de noyaux pulpeux sur lesquels se serait formée la matière cornée du bec, comme la matière vulgairement dite osseuse des dents se forme aussi sur son propre noyau. Ainsi, selon M. Geoffroy, un bec d'oiseau représenterait ces

dents que l'on appelle *composées*, comme sont, par exemple, celles de l'éléphant, et qui consistent en une série de lames ou de cônes dentaires coiffant chacun une lame ou un cône pulpeux, et réunis tous ensemble en une seule masse par l'émail et le cortical. La différence ne consisterait que dans la nature de la substance transsudée par les noyaux, et dans l'absence perpétuelle d'alvéoles et de racines.

Ces cônes ou ces lames intérieures se voient aussi dans la substance du bec des canards, et se terminent d'une manière plus sensible dans ces lamelles ou dentelures permanentes qui garnissent dans ces oiseaux tout le pourtour de l'organe, tandis que les dentelures du bec du perroquet disparaissent peu de temps après la naissance.

M. Geoffroy dit, à ce sujet, quelques mots sur les véritables dents, et fait observer avec raison que les mâchelières de l'homme et de beaucoup d'autres mammifères ne diffèrent des dents dites *composées*, que parce que leur couronne est formée sur des cônes pulpeux plus courts, plus gros et moins nombreux; et il cite des exemples où des dents ordinairement simples se sont unies par accident en une dent composée, et d'autres où beaucoup de germes pulpeux, s'étant trouvés rapprochés, ont produit des groupes de dents tout-à-fait monstrueux.

On avait cru long-temps que c'était le pollen des fleurs qui fournissait aux abeilles la matière de la cire : mais, depuis quelques années, MM. Huber père et fils, à qui leurs observations aussi ingénieuses que soutenues ont valu si justement le titre d'historiographes des abeilles, ont prouvé que les abeilles à qui l'on ne fournit que du pollen et des fruits ne produisent point de cire, tandis qu'il est certain qu'elles en donnent aussitôt qu'elles retrouvent du miel ou du nectar des fleurs; c'est pour la nourriture des larves que les abeilles

ramassent le pollen, qu'elles mêlent pour cet effet avec un peu de miel; enfin la cire paraît par petites écailles qui se détachent entre les anneaux de l'abdomen de certaines abeilles que M. Huber a nommées *cirières*. Il résulte de ces faits, que la cire est une excrétion, qui, comme toutes les excrétions, a sa première origine dans la nutrition, et est extraite des alimens.

M. Latreille, qui s'est occupé avec soin de ce sujet, a remarqué que les segmens particulièrement destinés à cette excrétion ont deux espaces qui demeurent membraneux, et où se trouve, entre l'épiderme et le derme, un vide, rempli sur le reste du corps par la substance cornée des tégumens, mais qui, à ces endroits, forme les poches à cire. Ces poches, placées vis-à-vis du second estomac de l'insecte, sont recouvertes par le bord de l'anneau qui précède celui dont elles font partie : mais M. Latreille a trouvé ces poches dans toutes les abeilles ouvrières, sans en pouvoir distinguer qui parussent plus spécialement destinées à cette production par le développement de leurs organes; en sorte que, s'il y a dans une ruche, comme M. Huber l'a observé, des abeilles uniquement chargées de faire la cire, cette répartition de travail ne tiendrait pas à une distinction de caste, comme celle des bourdons et des ouvrières.

M. Latreille s'est occupé avec une attention toute particulière d'un organe qui, selon lui, contribue puissamment à la production de ce bruit aigu qui rend les grillons, criquets et sauterelles si incommodes : c'est une espèce de tambour ou de caisse remplie d'air, placée de chaque côté à la base de l'abdomen, au-dessus de l'articulation du dernier pied. Sa face externe est garnie d'un rebord saillant, fermée par une lame élastique très-mince, placée obliquement, et d'où partent intérieurement de petits filets qui aboutissent à une autre membrane plus intérieure, qui elle-même se lie à la trachée

vésiculaire la plus voisine, laquelle appartient au deuxième segment de l'abdomen. On sait que, dans ces insectes, les arêtes élastiques des élytres font l'office de cordes; et les cuisses de derrière, celui d'archet. M. Latreille regarde l'espèce de tympan qu'il a décrit comme fournissant un corps à cette sorte d'instrument à cordes; il pense donc que c'est un organe du son, et que son emploi n'est pas borné à faciliter le vol, comme l'avait cru Degeer. Il est confirmé dans cette idée par l'analogie de position de cet organe et de l'organe musical, bien connu pour tel dans les cigales. M. Latreille, à l'occasion de cet instrument, a fait des observations nouvelles sur le nombre des stigmates ou des ouvertures respiratoires dans les cigales et dans les sauterelles, et en décrit quelques-unes qui avaient échappé à l'œil de ses prédécesseurs.

L'Académie avait proposé pour sujet d'un prix fondé par feu M. Alhumbert l'histoire du développement des os et des variations de la marche du sang dans le têtard de la salamandre, lors de son passage à l'état de salamandre parfaite.

Le prix a été décerné à M. Dutrochet, bien qu'il n'ait traité que la première partie du problème, à cause de l'intérêt de ses observations, principalement sur l'état des os lorsqu'ils ne sont encore que gélatineux, et avant qu'aucun point osseux s'y manifeste. Ils se forment alors, selon M. Dutrochet, par une véritable végétation. Dans une vertèbre, par exemple, on voit d'abord le corps sous forme de deux cônes opposés par leurs sommets, et toutes les autres parties en sortent comme des bourgeons.

Dans le têtard de la grenouille, la colonne vertébrale dans le principe n'est qu'un cordon revêtu d'une gaîne fibreuse d'une seule pièce, qui, lorsque l'ossification s'est faite et a distingué les vertèbres, devient le périoste; on sait même que

la queue de ce têtard conserve jusqu'à la métamorphose l'organisation qui appartenait d'abord à toute l'épine.

Dans la grenouille, les os des membres, selon M. Dutrochet, sont de même formés de deux cônes qui croissent par leurs bases opposées, et se rapprochent ainsi peu à peu les uns des autres. Les épiphyses sortent en quelque façon du corps de l'os, et se moulent mutuellement sur l'épiphyse voisine avec laquelle elles s'articulent. L'auteur ne trouve pas les apophyses sur ces premiers germes gélatineux de l'os, et conjecture qu'elles naissent d'une partie ossifiée des tendons qui s'y insèrent.

On sait que les salamandres reproduisent leurs pattes quand on les a coupées. M. Dutrochet, en observant cette reproduction sur des têtards transparens, croit avoir remarqué qu'elle commence aussi par une végétation du périoste, qui contient une substance gélatineuse, d'abord d'une seule pièce, et dans laquelle les os se forment et se séparent ensuite par l'effet de l'ossification.

Un autre prix physiologique est celui qu'a fondé M. de Monthyon, et qui peut être donné à tout ouvrage imprimé ou manuscrit, sans qu'il soit interdit aux auteurs de se nommer; mais les ouvrages doivent présenter des expériences nouvelles et tendant à perfectionner la physiologie ou la science de la vie animale. Jusqu'à présent les auteurs ne paraissent pas avoir bien connu cette condition; la plupart ont adressé à l'Académie de simples observations d'anatomie, ou des détails pathologiques qui ne rentrent pas d'une manière directe dans les vues du respectable fondateur. Cependant l'Académie a cru pouvoir, pour cette fois, consacrer ce fonds à deux médailles qu'elle a décernées aux auteurs de deux ouvrages très-recommandables dans les deux genres que nous venons d'indiquer.

L'un d'eux est un mémoire de M. Jules Cloquet sur les

calculs urinaires. L'auteur décrit, d'après plus de six mille de ces concrétions, toutes les variétés dont elles sont susceptibles, et indique diverses voies par lesquelles la nature elle-même parvient quelquefois à les détruire, telles que la dissolution, la rupture spontanée, la décomposition de leur partie animale. Il croit même en avoir trouvé un qui avait été rongé intérieurement par un ver intestinal. Ce travail est sur-tout remarquable par des expériences sur la possibilité de faire circuler dans la vessie, au moyen d'une seringue convenable, une grande quantité d'eau, et sur le soulagement marqué qui en est résulté pour plusieurs malades.

L'autre de ces ouvrages récompensés par une médaille est une description anatomique du cerveau et du système nerveux dans un grand nombre de poissons, par M. le docteur Desmoulins. C'est un supplément au travail de M. Serre, que nous avons annoncé l'année dernière, et il contient des détails intéressans sur la distribution des branches nerveuses. Malheureusement ce genre de détails n'est point de nature à entrer dans une analyse, car on ne pourrait en donner une idée qu'en les copiant presque entièrement; et nous sommes obligé de renvoyer à l'ouvrage même, qui sans doute paraîtra dans quelque temps.

Nous sommes obligé de prendre le même parti à l'égard du travail très-considérable de M. de Chabrier, ancien officier supérieur, touchant les organes du vol des insectes. L'auteur, dans une suite de Mémoires qui ont été imprimés, soit dans les *Mémoires du Muséum d'histoire naturelle,* soit dans le *Journal de physique*, décrit avec un détail infini cette prodigieuse variété d'organes intérieurs et extérieurs dont se composent les ailes de ces animaux, et sur lesquels elles s'appuient et s'articulent, ou par lesquels elles sont mues dans les divers sens qu'exige ce mouvement si compliqué du vol. Les anatomistes consulteront avec fruit ce travail, qui, se joignant



à ceux de MM. Jurine, Latreille et Audouin, sur le même sujet, ou sur des sujets analogues, ne laissera presque rien à desirer dans une partie aussi neuve qu'étendue de la science de l'organisation.

MÉDECINE.

Nos lecteurs se doutent bien que l'étude de la fièvre jaune n'a pas diminué d'intérêt à une époque où ce fléau terrible semble nous menacer de plus près : aussi l'Académie a-t-elle entendu plusieurs nouveaux Mémoires sur cet important sujet.

M. Moreau de Jonnès a publié un écrit sur les phénomènes de sa propagation, et sur son principe contagieux, soit qu'il se manifeste par l'importation de terre ou de mer, ou par les communications des hommes entre eux dans les maisons et dans les lieux publics. Des faits nombreux qu'il a accumulés dans ses précédens ouvrages, et de ceux qu'il a recueillis dans les rapports plus récens des divers observateurs, il conclut que jamais cette maladie ne s'est montrée pour la première fois dans un pays, sans y avoir été apportée par les personnes ou les choses infectées de son principe contagieux; qu'elle n'est jamais produite spontanément par aucune cause locale, mais qu'elle ne s'étend pas indéfiniment, et qu'un certain degré de chaleur et d'humidité est nécessaire à sa propagation; en sorte qu'elle s'éloigne peu du rivage de la mer ou des grands fleuves, qu'elle s'éteint dans les lieux élevés, et qu'elle est d'autant moins menaçante que la saison et le climat sont plus froids. Les émanations morbifiques sont plus ou moins dangereuses, selon le degré d'énergie qu'elles ont acquis du degré même du mal, et selon la quantité qui s'en est accumulée; et c'est ainsi que s'expliquent les anomalies qui ont donné lieu à de si violentes contestations; c'est ainsi que la fièvre jaune est plus contagieuse que la peste dans la chambre

resserrée d'un malade, et qu'elle cesse de l'être sur une montagne, sur un rocher insulaire, ou dans un lazaret exposé à une ventilation forte et soutenue.

M. Desmoulins a pensé que la coloration de la peau en jaune ne vient point de la bile, ni d'une lésion du foie, mais qu'elle n'est que le produit d'une congestion du sang sur la peau et les membranes muqueuses des intestins, qui produit et le vomissement noir et les ecchymoses, et enfin la coloration universelle qui vient à leur suite.

Une autre de ces affreuses contagions qui détruisent quelquefois des populations entières, le *cholera-morbus* de l'Inde, a aussi été décrite par M. Moreau de Jonnès : elle fut apportée pour la première fois, en 1819, de Calcutta à l'île de France, par une frégate anglaise, et y fit périr en six semaines plus de six mille nègres; car, au contraire de la fièvre jaune, c'est sur les nègres que le *cholera-morbus* sévit avec le plus de fureur.

La cupidité ayant introduit à Bourbon, malgré les défenses du Gouvernement, quelques nègres atteints de cette maladie, elle s'établit bientôt au lieu où ils étaient débarqués; mais un cordon vigilant et des quarantaines sévères parvinrent à l'y concentrer. Elle s'est étendue sur presque tout l'Indostan, sur la Chine méridionale, sur les Philippines, et a causé des pertes énormes dans tous ces pays.

On dit que l'huile d'olive, prise intérieurement avec de l'éther et du camphre, est jusqu'à présent le seul remède qui ait agi contre ce mal avec une efficacité sensible.

Nous avons rendu compte, l'année dernière, de la découverte faite par MM. Pelletier et Caventou, des principes qui donnent au quinquina sa vertu fébrifuge, et que ces chimistes ont reconnu être de nouvelles espèces d'alcalis. Il s'agissait

de constater les effets de ces principes appliqués dans leur état d'isolement au traitement des fièvres intermittentes, et d'examiner si leur emploi n'entraînerait point d'inconvénient particulier. M. Pétros et M. Chomel, docteurs en médecine, se sont occupés de cette recherche. Il résulte de leurs expériences que l'emploi des sulfates de quinine et de cinchonine, tout aussi avantageux que celui du quinquina en nature, en ce qui concerne la cure des fièvres, est beaucoup moins susceptible d'inconvéniens, à raison de la très-petite dose nécessaire, et parce qu'ils ne fatiguent point l'estomac, comme le fait le quinquina en nature par cette quantité de matière ligneuse et indigeste qu'il contient. Les nouveaux remèdes ont sur-tout été utiles dans des circonstances où l'état d'irritation de l'estomac rendait l'usage du quinquina impossible.

M. Bertin, fils d'un anatomiste célèbre que l'Académie a compté autrefois parmi ses membres les plus distingués, et qui cultive lui-même avec zèle et avec succès la partie de l'anatomie relative aux lésions des organes, a commencé dès 1811 à présenter à l'Académie des observations précieuses sur les maladies du cœur. Il avait reconnu dès-lors diverses altérations du cœur, tenant à l'épaississement de ses parois avec ou sans rétrécissement de ses cavités, avec ou sans endurcissement, avec ou sans ramollissement dans son tissu; altérations auxquelles les anatomistes pathologiques avaient donné trop peu d'attention. Il a continué ses recherches sur cette espèce de nutrition surabondante ou d'hypertrophie. Elle se porte tantôt sur l'un, tantôt sur l'autre ventricule, et quelquefois sur les deux; elle peut en affecter plus ou moins les diverses parties. Ce ne sont là ni des anévrismes, ni des dilatations actives; et l'énergie des parois, loin d'être augmentée, est quelquefois très-affaiblie. M. Bertin prouve la réalité de toutes ces variétés par des ouvertures de cadavres bien décrites,

auxquelles il a cherché à donner encore plus d'utilité, en y rattachant les symptômes observés sur les malades.

Une observation bien curieuse du même médecin est celle d'une femme qui n'a pas laissé de vivre cinquante-sept ans, bien qu'elle eût dès sa naissance un vice d'organisation qui semblait mortel. Les valvules de son artère pulmonaire, unies ensemble, ne laissaient qu'une ouverture d'une ligne de diamètre; en sorte que la plus grande partie du sang, ne pouvant traverser le poumon, retournait de l'oreillette droite dans la gauche par le trou de Botal qui était demeuré ouvert, et que le ventricule droit avait sa cavité fort rétrécie, et ses parois épaissies à proportion. Dans un pareil état de la circulation, le sang ne pouvait prendre à un degré suffisant les qualités artérielles : aussi cette femme avait-elle eu dès son enfance les lèvres colorées en bleu; et lorsqu'elle faisait quelque chose avec action, son visage entier se teignait de cette couleur : avec l'âge, cette difformité était arrivée à un tel point, que cette malheureuse n'osait plus se montrer. Morte à la suite d'une hémiplégie, on trouva dans son cerveau deux amas d'un fluide purulent.

M. Cruvelhier, docteur en médecine, a présenté un travail intéressant sur ces trois maladies trop souvent funestes au premier âge, le croup, l'hydropisie aiguë des ventricules du cerveau, et la perforation spontanée de l'estomac.

Relativement au croup, il paraît convaincu de cette vérité consolante, qu'il est toujours possible d'arrêter les progrès de cette cruelle maladie, quand on s'y prend à temps. Des saignées locales, répétées jusqu'à la décoloration complète de la face, et les révulsifs les plus énergiques, sont les moyens dont l'expérience garantit le succès.

L'hydropisie du cerveau est bien plus difficile à reconnaître, et ses effets plus difficiles à prévenir; l'inégalité de la

respiration, l'irrégularité du pouls, jointes à l'affaiblissement des sensations internes et externes, en ont paru à l'auteur les symptômes les plus marqués, dans ces commencemens où il importe si fort de la signaler. Attristé du peu de succès des saignées ordinaires contre ce mal terrible, il a essayé d'en pratiquer à la membrane pituitaire des arrière-narines, au moyen d'un instrument fait exprès.

Mais la partie des recherches de ce médecin qui a le plus frappé l'attention, c'est ce qui concerne une désorganisation de la membrane de l'estomac et des intestins, qui en convertit les tuniques, en certains endroits, en une substance gélatineuse, et y produit des perforations, causes inévitables de mort.

Cette maladie fut épidémique à Limoges, à la fin de l'été de 1819, et l'auteur en a observé la marche et les effets sur seize individus. Des selles verdâtres, de la tristesse, et surtout une soif inextinguible, suivies de nausées et de vomissemens, se terminent par un assoupissement qu'interrompent des cris douloureux et des mouvemens convulsifs, et qui conduit insensiblement à la mort.

A l'ouverture des corps, on trouve le tissu des intestins ramolli, gonflé, comme changé en gélatine, mais sans aucune trace d'inflammation, et même sans altération dans la couleur des parties. Au milieu de si grands désordres dans l'économie, les fonctions intellectuelles ne sont que faiblement affectées, ou même ne le sont point du tout.

Le moyen de guérison le plus efficace est cruel; car il consiste sur-tout dans l'abstinence complète de boisson, tandis qu'une soif terrible est précisément un des symptômes du mal. L'opium a aussi produit quelques bons effets.

Deux jeunes médecins, MM. Parent et Martinet, ont présenté à l'Académie un travail remarquable par son exactitude

et la précision avec laquelle on a tiré d'un grand nombre d'observations tous les résultats qu'elles pouvaient offrir.

Il a pour objet cette maladie terrible de l'inflammation de la membrane arachnoïde, l'une de celles qui enveloppent le cerveau et la moelle épinière.

Les auteurs, dans de nombreux tableaux, ont considéré ce mal par rapport à ses causes extérieures, aux âges, aux sexes de ceux qui en sont atteints, à sa durée plus ou moins longue, aux symptômes qu'il présente à ses diverses époques, et sur-tout à celle de son invasion, la seule où l'on puisse espérer de l'attaquer avec quelque succès, et cependant celle où il est le plus difficile de le reconnaître; enfin par rapport aux traces qu'il laisse après la mort, soit dans l'organe primitivement affecté, soit dans ceux qui ne l'ont été que sympathiquement.

AGRICULTURE.

C'est un grand problème dans l'histoire des hommes que de savoir de quel pays viennent originairement les végétaux cultivés et les animaux domestiques, sans lesquels il semble que la société n'aurait pu se maintenir, ni presque s'établir. Il n'est pas étonnant toutefois que cette origine ne soit pas connue historiquement, puisque la culture a dû précéder toutes les histoires; mais on pourrait y remonter, si l'on retrouvait dans quelques contrées ces différens êtres à l'état sauvage et primitif.

M. Dureau de Lamalle, membre de l'Académie des belles-lettres, a fait des recherches sur la partie des céréales, et particulièrement du blé et de l'orge.

Après avoir rappelé que ces deux céréales ne subsistent pas dans les climats très-froids, qu'on ne les trouve probablement point dans les vastes contrées que parcourent les

peuples chasseurs et les peuples nomades, il pense que c'est plutôt aux environs des pays qui furent civilisés les premiers qu'elles ont dû s'offrir aux hommes.

Les Égyptiens attribuaient, selon Diodore, l'invention du blé et de l'orge à Isis; et cet écrivain rapporte que, selon le même peuple, Osiris, inventeur de la vigne, aimait l'agriculture, et avait été élevé à Nysa, ville de l'Arabie heureuse. Mais, comme divers auteurs anciens disent que la ville de *Bethsané* ou de *Scythopolis* s'appelait aussi *Nysa*, M. Dureau de Lamalle pense que c'est là le véritable lieu où Osiris avait été élevé et avait découvert la vigne. Il en conclut que c'est aussi près de Bethsané qu'Isis doit avoir trouvé le blé et l'orge: d'où il arrive à ce résultat, que le blé et l'orge sont originaires de la vallée du Jourdain; et il ne doute pas qu'on ne puisse les y retrouver à l'état sauvage, si les botanistes les y cherchent.

Il se confirme, dit-il, dans cette idée, parce que la vierge des zodiaques égyptiens, copiée ensuite par les Grecs et par les Romains, tient un épi de blé, et parce que c'est dans le Levant que naissent le plus grand nombre des espèces dans les genres *triticum*, *hordeum* et *secale*.

La méthode des naturalistes s'applique à tout, et est même susceptible de servir de cadre pour la classification des diverses opérations de l'art. C'est ce que M. Thouin a essayé à l'égard de la greffe; il a distribué les diverses manières dont les cultivateurs ont imaginé d'unir ensemble des arbres ou des parties d'arbre, de manière à les mettre en communauté de nourriture; il les a distribuées, dis-je, en classes, en genres et en espèces, comme on aurait distribué les arbres eux-mêmes, et il a donné à chaque espèce le nom d'un cultivateur ou d'un botaniste célèbre, comme on a coutume de le faire dans la botanique proprement dite. Les descriptions soignées et accompagnées de figures, que M. Thouin a faites de ces

diverses manières de greffer, ont été rassemblées en un seul ouvrage que l'auteur a intitulé *Monographie des greffes*, et qui offre un grand nombre de pratiques utiles à la méditation et à l'émulation des amateurs de la culture des arbres.

M. Yvart a publié, dans un ouvrage sur l'origine et les progrès des assolemens raisonnés, des recherches historiques fort curieuses, par lesquelles il prouve que, dès la plus haute antiquité, les peuples éclairés ont connu l'art de maintenir constamment la terre dans un état productif, en variant seulement la succession des récoltes. Cette histoire d'une pratique d'une si vaste utilité servira d'introduction à un traité complet sur cette matière importante, dont M. Yvart promet de gratifier bientôt les cultivateurs.

ÉLOGE HISTORIQUE DE M. BANKS,

LU À L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, LE 2 AVRIL 1821;

PAR M. LE BARON CUVIER.

Les ouvrages que laisse après lui l'homme dont nous avons aujourd'hui à vous entretenir, se réduisent à quelques feuilles; leur importance n'est pas de beaucoup supérieure à leur étendue, et cependant son nom brillera avec éclat dans l'histoire des sciences. Dès sa jeunesse, s'arrachant aux agrémens que lui promettait une fortune indépendante, il a bravé pour elles les dangers de la mer et les rigueurs des climats les plus opposés; pendant une longue suite d'années, il a profité, pour les servir, de tous les avantages que lui donnaient une position heureuse et l'amitié des hommes en pouvoir; enfin, et c'est le principal de ses titres à nos hommages, il a constamment regardé quiconque travaillait à leurs progrès, comme ayant des droits acquis à son intérêt et à son assistance. Pendant cette guerre de vingt-deux ans qui a porté ses ravages sur presque tous les points des deux mondes, par-tout le nom de M. Banks a été un palladium pour ceux de nos compatriotes qui se livraient à des recherches utiles: si leurs collections étaient enlevées, il suffisait qu'ils s'adressassent à lui pour qu'elles leur fussent rendues; si leur

personne était détenue, le temps de lui faire parvenir leurs réclamations était le seul délai qu'éprouvât leur mise en liberté. Lorsque les mers nous étaient fermées, elles s'ouvraient à sa voix pour nos expéditions savantes. La géographie et l'histoire naturelle lui ont dû la conservation de travaux précieux; et sans elles, nos collections publiques seraient encore aujourd'hui, peut-être pour toujours, privées d'une partie des richesses qui en font l'ornement. On trouvera sans doute que de pareils services équivalent à bien des livres; et si, dans ce discours, c'est principalement la reconnaissance due à de nobles actions que nous avons à exprimer, ce n'est point trop augurer de nos auditeurs, que d'espérer que ce sentiment ne sera pas moins vivement partagé par eux que n'aurait pu l'être l'admiration pour de grandes découvertes.

Sir JOSEPH BANKS, chevalier baronet, conseiller d'état du Roi d'Angleterre, grand'croix de l'ordre du Bain, président de la Société royale de Londres, et associé étranger de l'Académie des sciences de l'Institut, naquit à Londres, dans la rue d'Argyle, le 13 février 1743, de Guillaume Banks-Hodgenkson et de Marianne Bate. Quelques-uns font remonter l'origine de sa famille à un Simon Banks, Suédois, qui se serait établi dans le comté d'York du temps d'Édouard III, et aurait été le dix-huitième aïeul de Joseph. D'autres prétendent qu'elle n'était venue de Suède que depuis un siècle, et n'avait eu en Angleterre que deux générations. Quoi qu'il en soit, comme dans la Grande-Bretagne la noblesse non titrée ne jouit d'aucun privilége, par un juste retour, l'opinion ne l'écarte pas non plus des professions lucratives. Il paraît que le grand-père de M. Banks exerça la médecine dans le comté de Lincoln, et que les succès qu'il obtint dans son art lui donnèrent les moyens d'acquérir une assez grande fortune. Devenu dans sa province un homme d'une certaine

importance, il fut revêtu, en 1736, des fonctions de shériff, et siégea dans un ou deux parlemens, comme représentant de la ville de Peterborough.

Joseph Banks, comme la plupart des jeunes Anglais nés dans l'aisance, après avoir été confié pendant quelque temps aux soins d'un ecclésiastique, fut envoyé dans un collége. Ses parens choisirent d'abord celui de Harrow, près de Londres, d'où ils le firent passer au célèbre collége de Christ dans l'université d'Oxford; et son père étant mort en 1761, il entra dans le monde à dix-huit ans, maître de lui-même et de sa fortune. Ce pouvait être un écueil dangereux pour un homme si jeune: mais dès-lors M. Banks n'était sensible qu'aux jouissances attachées aux travaux de l'esprit; et le seul usage qu'il fit de sa liberté, fut de s'y consacrer sans partage.

Vers cette époque, l'histoire naturelle commençait à se relever de l'humilité où des sciences plus hâtives l'avaient retenue; les tableaux éloquens de Buffon, les classifications ingénieuses de Linnæus, offraient de l'attrait aux esprits les plus divers : on voyait s'ouvrir sur les pas de ces hommes célèbres des routes neuves et pleines de charme, et c'était à leur suite que devait naturellement s'engager un jeune homme qui ne se dévouait aux sciences que pour son plaisir. M. Banks s'occupa donc de bonne heure d'étudier les productions de la nature, et sur-tout celles du règne végétal; bientôt son goût pour les plantes se changea en passion, et il fit à leur recherche tous les sacrifices qu'elle exige : le premier, comme l'on sait, est de beaucoup voyager à pied; et ce sacrifice est plus pénible qu'un autre, dans un pays où cette manière d'aller est si peu usitée, qu'elle pourrait à elle seule rendre un homme suspect : aussi prit-on plus d'une fois notre jeune botaniste pour un voleur; et un jour que la fatigue l'avait obligé de s'endormir loin de la grande route,

des officiers de police le saisirent violemment et le menèrent lié devant un magistrat, que cette aventure égaya beaucoup.

Cependant son ardeur pour l'étude ne lui faisait pas oublier le soin de ses affaires : dès-lors aussi il songeait qu'une grande facilité pour rendre des services à la société, c'est de se mettre en état de les lui rendre sans lui demander de secours. Sa propriété la plus considérable était à Revesby, dans le comté de Lincoln, sur la lisière de cette vaste étendue de prairies marécageuses qui entourent la baie de Boston, et dont la nature est tellement semblable à celle de la Hollande, qu'elle porte dans une de ses parties le même nom que cette province. Il passait une partie de l'année dans cette campagne; il y perfectionnait l'art de conduire les canaux et d'élever les digues, si important pour l'amélioration d'un pareil territoire; il peuplait les étangs et les petits lacs de cette contrée aquatique, et s'y amusait quelquefois à la pêche: on dit même que ce fut dans cet exercice qu'il se lia d'amitié avec ce Jean de Montagu, comte de Sandwich, devenu dans la suite chef de l'amirauté, et qui a vu son nom immortalisé par l'extension surprenante que la connaissance du globe a obtenue au temps de son administration.

Si l'anecdote est vraie, elle offre un exemple de plus des grands effets que peut amener une petite cause; car on ne peut douter que l'ascendant de M. Banks n'ait puissamment contribué à multiplier ces découvertes. S'il n'eut pas besoin d'exciter le comte de Sandwich à des expéditions auxquelles la volonté du Roi l'engageait assez, toujours est-il vrai qu'il lui indiqua plus d'une fois les points où il convenait le mieux de les diriger, et qu'il lui fit connaître les moyens les plus sûrs de les rendre profitables.

L'exemple de ce ministre passa d'ailleurs, dans la suite, en une sorte de règle, et les nombreux successeurs qu'il eut dans

ce poste mobile, crurent tous s'honorer en prenant les avis de l'homme qui lui en avait donné de si avantageux.

Cependant M. Banks n'avait pas attendu ce moment de crédit pour donner carrière à ses vues. Dès 1766, un de ses amis se trouvant capitaine du vaisseau qui devait protéger la pêche de Terre-Neuve, il profita de cette occasion pour visiter cette plage. Ce n'était pas diriger ses premières courses vers le côté le plus attrayant ; mais bientôt il eut une occasion de se dédommager.

La paix de 1763 venait de rendre le repos à l'Europe et de rouvrir les mers ; tous les peuples cherchaient à réparer par de nouvelles entreprises le mal que leur avaient fait leurs dissensions. L'Angleterre sur-tout, victorieuse dans les deux hémisphères, et qui voyait de tous côtés s'offrir à sa fortune des carrières sans limites, montrait une énergie qui, dirigée par un chef ambitieux, aurait pu devenir funeste à l'humanité. Heureusement qu'à cette même époque un sceptre qui était presque celui de l'océan, tomba dans les mains d'un jeune monarque pur dans ses mœurs, simple dans ses goûts, et qui de bonne heure avait compris qu'une découverte utile pouvait honorer un règne autant que des conquêtes. Le premier parmi les princes, il eut l'idée d'aborder des pays nouveaux sans y porter la terreur, et de n'y faire connaître sa puissance que par ses bienfaits. Chaque fois que l'historien rencontre un pareil exemple, il est de son devoir de le montrer dans toute sa beauté : c'est sur-tout à l'historien des sciences qu'il appartient, pour remplir ce devoir, de s'élever au-dessus des misérables rivalités des nations ; et bien que celui qui a mérité cet hommage ait été si souvent et si long-temps en guerre avec la France, ce n'est pas sans doute devant une assemblée telle que la nôtre, que j'aurai à m'excuser de le lui avoir rendu.

George III s'était donc empressé, dès son avénement au trône, d'envoyer quelques vaisseaux dans la mer du Sud, avec des instructions générales pour le perfectionnement de la géographie : le commodore Byron s'y était rendu en 1764; deux autres officiers, le capitaine Wallis et le capitaine Carteret, y furent envoyés en 1766. Ils n'étaient pas encore de retour, qu'une quatrième expédition fut ordonnée, sous la conduite de ce Jacques Cook qui, par ce voyage et par les deux autres qu'il a exécutés, a plus contribué à faire connaître le globe qu'aucun des navigateurs qui l'avaient précédé.

Ce voyage avait été conçu à-la-fois dans l'intérêt de la géographie et de l'astronomie; car la commission principale de Cook était d'observer le passage de Vénus sur le disque du soleil, qui, ayant déjà eu lieu en 1761, allait se répéter en 1769.

M. Banks résolut de le faire tourner aussi au profit de l'histoire naturelle, et demanda, à cet effet, d'en partager les dangers et d'y consacrer une partie de sa fortune. Il n'épargna rien pour en assurer la réussite, en ce qui le concernait. Une grande provision d'objets utiles aux peuples qu'il allait visiter fut rassemblée à ses frais; il fit placer sur le vaisseau tous les appareils nécessaires aux observations de physique et à la conservation des objets naturels; il engagea un élève distingué de Linnæus, depuis peu établi en Angleterre, le docteur Solander, à se dévouer avec lui pour la science, objet commun de leur amour; il emmena deux peintres pour représenter ce qui ne pourrait se conserver; il prit les hommes de service nécessaires; enfin il pourvut à tout ce qui pouvait rendre son entreprise commode et fructueuse.

Nous ferons remarquer ici que cette époque doit être notée dans l'histoire des sciences, comme celle où l'histoire naturelle commença à étendre ses recherches sur une grande

échelle en contractant alliance avec l'astronomie et la navigation. Ce fut aussi pour faire observer ce passage de Vénus que l'impératrice Catherine II ordonna ces grands voyages qui s'exécutèrent en Sibérie sous la direction de Pallas, et pendant lesquels de nombreux naturalistes firent des collections si riches. Dans le même temps, Bougainville, par ordre de Louis XV, faisait le tour du monde, conduisant avec lui Commerson, cet homme d'une activité sans bornes et d'un savoir presque universel; et c'est vraiment dans ces trois entreprises à peu près contemporaines que les gouvernemens ont appris à quel point les sciences sont sœurs et combien elles multiplient leurs services en combinant leurs travaux.

Je suis bien dispensé, sans doute, de rappeler en détail à mon auditoire les événemens de ce premier voyage du capitaine Cook. Quel est celui d'entre nous qui n'en ait pas lu dès l'enfance la relation avec une sorte de délice? Qui n'a pas tremblé pour nos navigateurs, lorsque le froid menace de les endormir d'un sommeil de mort sous les neiges de la Terre de feu? Qui n'a pas desiré vivre un moment comme eux au milieu de ce peuple enfant d'Otaïti, parmi ces êtres si beaux, si doux, heureux de leur innocence, goûtant sans inquiétude toutes les voluptés sous un ciel pur, sur une terre féconde? A qui le cœur n'a-t-il point palpité, lorsqu'échoués entre les roches de corail de la Nouvelle Hollande ils voient les pièces de leur bordage se détacher, une voie d'eau s'ouvrir plus puissante que leurs pompes, et que, depuis deux jours la mort sous les yeux, ils sont sauvés subitement par l'idée que suggère un homme qui n'était point marin, de faire entrer de dehors quelques flocons de laine dans les fentes du navire!

Tout dans cette expédition, et les dangers des voyageurs, et leurs plaisirs, et les mœurs variées des peuples chez lesquels ils abordent, jusqu'aux caresses des nouvelles Circés

d'Otaïti et aux combats avec les anthropophages de la Nouvelle Zélande, jusqu'à cet incendie général des herbes dans lequel les habitans de la Nouvelle Galles du sud furent au moment de les envelopper, semblent réaliser ces amusantes féeries de l'Odyssée qui ont fait le charme de tant de nations et de tant de siècles.

Or c'est incontestablement à la présence de deux hommes nourris d'autres idées que de simples marins, c'est à leur manière d'observer et de sentir, qu'est dû, en grande partie, ce puissant intérêt. Rien ne leur avait coûté pour enrichir leurs collections ou pour satisfaire leur curiosité. M. Banks, sur-tout, se montre toujours d'une activité étonnante; la fatigue ne le rebute pas plus que le danger ne l'arrête. On le voit, au Brésil, se glisser comme un contrebandier sur le rivage, pour arracher quelques productions à cette riche contrée, malgré la stupide jalousie du gouverneur. A Otaïti, il a la patience de se laisser peindre de noir, de la tête aux pieds, pour faire un personnage dans une cérémonie funèbre, qu'il n'aurait pu voir autrement; et ce n'est pas seulement pour voir, pour observer, qu'il déploie son caractère; en tout lieu, bien que sans autorité légale, il semble prendre naturellement le rang que lui auraient donné en Europe les conventions de la société; il est toujours en avant; il préside aux marchés, aux négociations; c'est à lui qu'on s'adresse des deux parts dans les embarras; c'est lui qui poursuit les voleurs, qui recouvre les objets volés : s'il n'eût retrouvé ainsi le quart de cercle qui avait été adroitement enlevé par un insulaire, le but principal de l'entreprise, l'observation du passage de Vénus sur le disque du soleil, aurait été manqué. Une seule fois il n'osa se faire rendre justice : mais ce fut lorsque la reine Obéréa, l'ayant logé trop près d'elle, lui fit, pendant la nuit, voler tous ses vêtemens; et l'on conviendra qu'en



pareille occurrence il n'eût pas été galant d'insister trop sur son bon droit.

Cette sorte de magistrature à laquelle il se trouva porté, tenait à ce que, dès-lors, sa figure, sa contenance, étaient faites pour imposer du respect, en même temps que sa bonté soutenue captivait l'amitié. Il donnait aux sauvages des outils d'agriculture, des graines de plantes potagères, des animaux domestiques; il veillait à ce qu'on ne les maltraitât point, et même à ce qu'on les traitât avec indulgence, lorsque les torts étaient de leur côté. S'il existe dans la nature une prééminence naturelle, c'est bien celle qui est fille à-la-fois et de la force d'ame et de la bienfaisance.

Ses récoltes, pendant les trois années que dura le voyage, en objets de toute espèce, furent immenses, bien qu'il en ait perdu une partie lors de l'accident arrivé au vaisseau. Long-temps on espéra que Solander et lui en feraient jouir le public; et il est difficile de savoir ce qui les en a empêchés. Solander n'est mort qu'en 1782, et il aurait pu disposer de dix ans, pour sa part, dans ce travail : d'ailleurs leur journal commun, leurs notes, tous les dessins faits sous leurs yeux, existent encore dans la bibliothèque de M. Banks. On avait même commencé à exécuter des gravures qui devaient être portées à deux mille; mais, au grand déplaisir des naturalistes, il n'en a rien paru, du moins sous les auspices des auteurs. Peut-être M. Banks jugea-t-il que ses richesses n'en profiteraient pas moins à la science, quand il ne les mettrait pas en œuvre lui-même. Un des traits les plus remarquables de son caractère fut la générosité avec laquelle il communiquait ses trésors scientifiques à quiconque lui paraissait digne d'en faire usage. Fabricius a disposé de tous ses insectes. Il avait donné à notre confrère Broussonnet, pour l'ichthyologie qu'il avait commencée, des échantillons de tous ses

poissons. Les botanistes qui ont eu besoin de voir ses plantes, ont consulté librement ses herbiers. Gærtner en a sans cesse profité pour son admirable histoire des fruits et des graines, et Vahl pour ses *Eclogæ;* et dans ces derniers temps, l'excellent ouvrage de M. Robert Brown sur les plantes de la Nouvelle Hollande, ouvrage fait chez M. Banks et au milieu de ses collections, a rempli et au-delà tout ce que l'on aurait pu espérer de lui-même. Il avait d'ailleurs répandu dans tous les jardins de l'Europe les graines de la mer du Sud, comme dans la mer du Sud il avait distribué les nôtres. Enfin il se reposait sur l'idée que, pour ce qui pouvait toucher à l'utilité immédiate, le but de son voyage était rempli autant qu'il pouvait l'être. Effectivement, une foule de beaux arbustes qu'il a rapportés le premier, ornent aujourd'hui nos bosquets et nos terres; la canne d'Otaïti, qui donne plus de sucre et se moissonne plus souvent, est venue réparer en partie les désastres de nos colonies; l'arbre à pain porté dans les contrées chaudes de l'Amérique leur rendra des services non moins grands que ceux que l'Amérique nous rendit autrefois en nous donnant la pomme de terre; le lin de la Nouvelle Zélande, dont les fils sont plus tenaces que ceux d'aucune autre plante, est cultivé parmi nous, et sera infailliblement, quelque jour, une acquisition importante pour notre marine; plusieurs de nos bassins se sont embellis du cygne noir; le kanguroo, le phascolome, se sont répandus dans quelques-uns de nos parcs, et rien n'empêche qu'ils ne deviennent dans nos bois des gibiers aussi utiles que le daim ou le lapin, qui n'étaient pas non plus autrefois des animaux indigènes. Mais ce ne sont encore là que des résultats peu importans en comparaison de la connaissance générale que ce voyage a commencé à nous donner de la mer Pacifique, de cette foule d'îles dont la nature l'a semée, et de

cette création en quelque sorte toute spéciale dont elles sont peuplées. La Nouvelle Hollande sur-tout, si l'on en excepte l'homme et le chien, qui sans doute n'y sont arrivés que depuis peu, tant ils s'y trouvent encore dans un état misérable; la Nouvelle Hollande, disons-nous, par sa nature vivante, ne ressemble, pour ainsi dire, en rien au reste du monde : ce sont d'autres animaux, souvent bizarres, paraissant allier des formes qui se contrarient; des végétaux qui semblent destinés à renverser toutes nos règles, tous nos systèmes. Depuis une trentaine d'années, les Anglais ont formé un établissement au milieu de ce continent, parmi cette nature presque aussi nouvelle pour l'Europe que le serait celle d'une autre planète; ce que déjà il a fourni à la science est prodigieux : c'est un profit pour tous les peuples. Quant aux avantages qu'il donne et qu'il donnera à la métropole, il n'est pas de mon sujet de les développer en détail; mais chacun sent ce qu'une grande colonie européenne, dans une zone tempérée, dans un pays salubre et fertile, placée entre l'Asie et l'Amérique, et communiquant aussi aisément avec le Pérou qu'avec le Bengale, doit prendre nécessairement d'importance commerciale, politique et militaire. Ce qui est certain, c'est qu'avant peu d'années, soit qu'elle devienne indépendante ou qu'elle demeure sujette, elle aura multiplié la race la plus civilisable de l'espèce humaine, autant que l'ont fait les colonies anglaises de l'Amérique du nord. Tels seront, tels sont déjà, en grande partie, les résultats du voyage de MM. Cook, Banks et Solander, et ils seront tels, uniquement parce que ce voyage, fait par des hommes instruits, a été dirigé dans des vues plus éclairées, et conduit avec plus de philosophie que ceux que l'on faisait depuis trois siècles.

Je n'ai pas besoin de dire avec quel empressement ces

nouveaux Argonautes furent accueillis à leur retour. Toutes les classes de la nation voulurent leur témoigner ce qu'elles sentaient pour eux; le Roi, en particulier, leur montra le plus grand intérêt. Ami comme il l'était de la botanique et de l'agriculture, il reçut avec un plaisir sensible les graines et les plantes que lui offrit M. Banks, et conçut dès-lors pour ce jeune voyageur cette affection dont il n'a cessé de lui donner des marques.

L'Angleterre, l'Europe entière, avaient applaudi trop unanimement à ce genre si nouveau et si généreux d'entreprises, pour que le gouvernement anglais ne se crût pas obligé de le renouveler. En 1773, le capitaine Cook dut repartir pour son second voyage, de toutes les expéditions nautiques la plus étonnante par le courage et la persévérance de ceux qui s'y sont livrés. M. Banks aussi était résolu de l'accompagner de nouveau; il devait encore emmener Solander; tous leurs préparatifs étaient faits : mais ils demandaient, et cela était trop juste pour de pareils hommes, de se donner sur le vaisseau les commodités qui, sans gêner l'expédition, pouvaient rendre leur dévouement moins pénible. Il est difficile de comprendre comment le capitaine put se résoudre à se priver de leur secours. Fut-ce jalousie ou regret d'avoir vu partager sa gloire par des hommes qui avaient partagé si efficacement ses travaux? Fut-ce le souvenir de quelques embarras que lui avaient occasionnés pendant son premier voyage les égards dus à des personnages considérables? Nous ne prétendons pas le décider. Ce qui est certain, c'est qu'il fit détruire de son chef, sur le vaisseau, divers arrangemens que M. Banks y avait fait faire, et que celui-ci, dans un mouvement d'humeur, renonça à tous ses projets.

Je ne chercherai point ici à prononcer entre eux. Si l'on songe que le capitaine Cook se brouilla avec les deux Forster,

qui remplacèrent dans ce second voyage MM. Banks et Solander; que dans le troisième il refusa d'emmener aucun naturaliste, qu'il n'y en a pas eu depuis sur les expéditions nautiques des Anglais, et que ceux qui se sont embarqués sur les nôtres, ont cru bien rarement avoir à se louer de leurs conducteurs, on trouvera peut-être que la liberté d'action dont les hommes de cabinet ont l'habitude, a peine à se concilier avec la discipline sévère, si nécessaire sur un vaisseau; et l'on ne fera de reproches ni à nos deux naturalistes, ni au grand navigateur qui ne put s'arranger avec eux.

Cependant M. Banks, ne pouvant accompagner Cook, résolut de diriger son ardeur d'un autre côté. Les contrées du Nord, l'Islande sur-tout, si remarquable par ses phénomènes volcaniques, lui offraient encore assez de sujets de recherches. En quelques semaines un navire fut nolisé, meublé de tout ce qui était nécessaire à des naturalistes, et M. Banks partit le 12 juillet 1772, accompagné de son fidèle Solander, du Suédois Uno de Troïl, depuis évêque de Linkoping, et de quelques autres personnes dignes de prendre part à une telle entreprise.

Un hasard heureux leur fit visiter, en passant, cette île de Staffa, si intéressante par l'immense amas de colonnes basaltiques qui en forme le massif, et par cette grotte de deux cent cinquante pieds de profondeur, tout entourée de ces colonnes dont la régularité naturelle égale ce que les arts de l'homme ont produit de plus surprenant. Il est singulier que cette merveille de la nature, si voisine d'un pays très-habité, ait été si peu connue; mais, bien que l'île eût été nommée par Buchanan, personne n'avait rien dit de sa structure extraordinaire, et l'on peut la regarder comme une découverte de nos voyageurs.

Bientôt ils arrivèrent en Islande. Ce n'était plus ce peuple

heureux de la mer du Sud à qui la nature a prodigué tous ses dons : un sol également désolé par le feu des volcans et par des hivers de neuf mois, la plaine hérissée presque partout de roches pelées et tranchantes, des hauteurs toujours couvertes de neige, des montagnes de glace que la mer apporte encore pendant un été si court et qui souvent font recommencer l'hiver, tout semble annoncer aux Islandais la malédiction des puissances célestes. Ils portent l'empreinte du climat : leur gravité, leur aspect mélancolique, font un aussi grand contraste avec la gaieté légère des insulaires de la mer du Sud, que les pays habités par les deux nations; et toutefois les habitans de l'Islande ont aussi leurs jouissances, et des jouissances d'un ordre supérieur : l'étude, la réflexion, adoucissent leur sort; ces grands édifices naturels de basaltes, ces immenses jets d'une eau bouillante ou colorée, ces végétations pierreuses qu'elle produit, des aurores boréales de mille formes et de mille couleurs, illuminant de temps en temps ces spectacles imposans, leur donnent des dédommagemens et les excitent à la méditation. Seule peut-être parmi les colonies, l'Islande s'est fait une littérature originale plus tôt que sa métropole, plus tôt que toute l'Europe moderne. On assure qu'un de ses navigateurs avait découvert l'Amérique près de cinq siècles avant Christophe Colomb; et ce n'est que dans ses anciennes annales que l'on a pu retrouver des documens un peu authentiques pour l'histoire de la Scandinavie : encore aujourd'hui, le moindre paysan y est instruit de l'histoire de son pays; et c'est en redisant de mémoire les chants de leurs anciens poètes, qu'ils passent leurs longues soirées d'hiver.

Notre caravane savante employa un mois à parcourir cette île; et M. de Troïl a publié une relation bien intéressante de ce qu'ils observèrent. Quant à M. Banks, toujours peu

occupé de lui-même, il se borna à donner à Pennant, pour son *Voyage en Écosse*, les dessins qu'il avait fait faire de l'île de Staffa et de sa grotte, ainsi que la description qu'il en avait prise. En Islande, comme dans la mer du Sud, comme à Terre-Neuve, il lui suffisait que ses observations ne fussent point perdues pour le public, et sa gloire personnelle lui paraissait satisfaite. Au reste, encore ici il a mieux fait que d'écrire, il est devenu pour les Islandais un bienfaiteur non moins zélé et plus effectif que pour les Otaïtiens : non-seulement il a attiré sur eux l'attention de la cour de Danemarck; veillant lui-même sur leur bien-être, deux fois, lorsqu'ils étaient tourmentés par la famine, il a envoyé à ses frais dans leur île des cargaisons de grains. Comme les personnages que divinisait l'ancienne mytohlogie, on aurait dit qu'il devenait une providence pour les lieux où une fois il avait abordé.

De retour de deux entreprises où il avait donné des preuves si éclatantes de son amour désintéressé pour les sciences, M. Banks devait naturellement trouver sa place dans les premiers rangs de ceux qui les cultivent : dès long-temps membre de la Société royale, il prit alors une grande part à son administration et à ses travaux; sa maison, ouverte avec une hospitalité égale aux savans anglais et étrangers, devint elle-même une sorte d'académie ; l'accueil du maître, le plaisir d'y voir réunis les amis pleins de mérite qu'il s'était faits, une bibliothèque riche et d'un usage commode par la méthode qui avait présidé à sa distribution, des collections que l'on aurait vainement cherchées même dans les établissemens publics, y attiraient les amis de l'étude. Nulle part un semblable point de réunion n'était plus précieux, on pourrait dire plus nécessaire, que dans un pays où les barrières qui séparent les conditions sont plus élevées qu'en tout autre et où les hommes de rangs différens se rencontrent difficile-

ment, si quelqu'un pour les rapprocher ne se met soi-même en quelque sorte hors de rang, ou ne se fait un rang propre et extraordinaire.

M. Banks est le premier qui ait eu le bon esprit de se donner ce genre honorable d'existence, et de créer ainsi une sorte d'institution dont l'utilité était si frappante, qu'elle fut promptement sanctionnée par le sentiment général; le choix que la Société royale fit de lui, quelques années après, pour son président, donna à cette sanction toute l'authenticité dont elle était susceptible : mais, comme il n'est que trop commun parmi les hommes, ce fut au moment où il obtenait cet honneur, le plus grand dont il pût former le desir, qu'il lui arriva d'essuyer les chagrins les plus amers.

Ici il devient indispensable que nous donnions quelques explications à nos auditeurs.

La Société royale de Londres, la plus ancienne des académies des sciences qui subsistent aujourd'hui, et sans contredit l'une des premières par les découvertes de ses membres, ne reçoit aucun secours du gouvernement et ne se soutient que par les seules contributions de ceux qui la composent : en conséquence, il a été nécessaire qu'elle fût très-nombreuse, et, par une conséquence non moins nécessaire, comme dans toutes les associations politiques où la participation des citoyens au gouvernement est en raison inverse de leur nombre, les hommes auxquels elle confie son administration exercent sur ses travaux, et jusqu'à un certain point sur la marche et sur les progrès des sciences, une influence plus considérable que nous ne pourrions nous le figurer dans nos académies du continent. Le besoin où se trouve le ministère, dans une constitution représentative, d'avoir pour tous ses actes des garans en quelque sorte officiels, ajoute encore à

cette influence et l'étend jusque sur le sort des individus. A la vérité, on fait chaque année une élection nouvelle; mais les fonctions du président sont trop délicates pour que beaucoup de personnes y soient propres, et il est bien rare que celui qui en est une fois revêtu ne soit pas réélu tant qu'il consent à l'être. Un premier choix est donc une grande affaire dans le monde savant; et quand il est disputé, il l'est avec une grande chaleur.

A l'époque dont nous parlons, ce débat fut d'autant plus vif, qu'un incident singulier, j'oserais presque dire ridicule, avait jeté une aigreur extraordinaire dans les esprits. Les physiciens de la Société royale, consultés sur la forme qu'il convenait de donner à un paratonnerre que l'on voulait placer sur je ne sais quel édifice public, avaient proposé à la presque unanimité de le terminer en pointe : un seul d'entre eux, nommé *Wilson*, imagina de prétendre qu'il devait être fait en bouton arrondi, et mit un entêtement incompréhensible à soutenir ce paradoxe. La chose était si claire, qu'en tout autre pays, ou en tout autre temps, on se serait moqué de cet homme, et que l'on aurait fait le paratonnerre comme jusque-là on avait fait tous les autres : mais l'Angleterre se trouvait alors dans le fort de sa querelle avec les colonies d'Amérique, et c'était Franklin qui avait découvert le pouvoir qu'ont les pointes de soutirer la foudre. Une question de physique devint donc une question de politique. Elle fut portée, non pas devant les savans, mais devant les partis : il n'y avait, disait-on, que les amis des insurgens qui pussent vouloir des pointes; et quiconque ne soutenait pas les boutons, était évidemment sans affection pour la métropole. Comme à l'ordinaire, la foule et même les grands se partagèrent, avant d'avoir rien examiné; et Wilson trouva des protecteurs, comme on en trouverait contre le théorème de Pythagore,

si jamais la géométrie devenait aussi une affaire de parti. On assure même qu'un personnage auguste, en toute autre occasion ami généreux et éclairé des sciences, eut cette fois la faiblesse de se faire solliciteur, et le malheur de solliciter contre les pointes. Il en parla au président d'alors, le baronet John Pringle, savant d'un esprit judicieux et d'un caractère élevé; Pringle, dit-on, représenta respectueusement que les prérogatives du président de la Société royale n'allaient pas jusqu'à changer les lois de la nature. Il eût pu ajouter que, s'il est honorable pour les princes, non-seulement de protéger les sciences, comme ils le doivent, mais encore d'amuser leurs loisirs en s'informant des discussions qu'elles occasionnent, ce ne peut être qu'à condition de ne pas faire intervenir leur rang à l'appui des opinions qu'ils adoptent. Ni ces réflexions ne furent faites, ni les représentations de Pringle ne furent reçues avec la bonté à laquelle il était accoutumé; et comme depuis trois ans cette malheureuse querelle lui avait déjà procuré mille tracasseries, il crut convenable à son repos de donner sa démission. Ce fut à sa place que M. Banks fut élu au mois de novembre 1778. De quel côté s'était-il rangé dans la guerre des pointes et des boutons électriques? Nous ne le savons pas bien; mais ce que tout le monde comprend, c'est qu'en pareille circonstance il était impossible que qui que ce fût arrivât à la présidence sans y être accueilli par de grandes inimitiés. M. Banks devait y être plus exposé, précisément parce qu'il jouissait de la faveur de ce même personnage à qui son prédécesseur avait déplu : en outre, il était riche, il était jeune, et, bien qu'il eût fait pour les sciences plus que beaucoup d'écrivains, il avait peu écrit. Que de motifs et que de prétextes pour l'attaquer! Quelle honte pour l'Angleterre et pour les mathématiques! un simple amateur allait occuper le fauteuil de Newton; comme

si l'on avait pu espérer que jamais un autre Newton l'occuperait! Un naturaliste allait se voir à la tête de tant de mathématiciens ; comme s'il n'eût pas été juste que chaque science obtînt à son tour des honneurs proportionnés aux fruits qu'elle produisait! Petit à petit ces murmures dégénérèrent en ressentimens. Enfin, à l'occasion d'un réglement qui exigeait que les secrétaires résidassent à Londres, et dont la conséquence fut la démission du docteur Hutton, professeur de mathématiques à l'école de Woolwich, ces ressentimens éclatèrent en un violent orage. Le docteur Horseley, mathématicien instruit et théologien ardent, qui depuis a été successivement évêque de Saint-David et de Rochester, et dont nous avons déjà parlé dans une autre occasion, comme de l'un des antagonistes de Priestley, se fit l'organe principal de l'opposition. Il prononça des discours et fit imprimer des écrits d'une amertume excessive : il prédit à la Société et aux sciences tous les malheurs imaginables ; et, soutenu de quelques membres plus considérés que lui, tels que l'astronome Maskelyne, il se vit au moment de renverser M. Banks. Heureusement on s'aperçut qu'il prétendait aussi à le remplacer, et cette découverte calma tout ce qu'il avait excité de passions ; un tel chef parut à ses amis mêmes un mal plus certain qu'aucun de ceux qu'il avait prédits : on l'abandonna, et, quelques séances après, la Société, par une délibération solennelle du 8 janvier 1784, déclara qu'elle était satisfaite de son choix; Horseley et quelques hommes violens comme lui se retirèrent, et depuis lors M. Banks, constamment réélu, a rempli en paix ce noble poste pendant quarante-une années consécutives, durée plus longue que celle d'aucun de ses prédécesseurs. Newton lui-même n'a occupé la présidence que pendant vingt-quatre ans.

Certainement, si l'on jette un coup-d'œil sur l'histoire de

la Société royale pendant ces quarante-une années, on ne trouvera pas qu'elle ait eu à se repentir de sa résolution.

Pendant cette époque si mémorable dans l'histoire de l'esprit humain, les savans anglais, il nous est honorable de le dire, nous à qui l'on ne contestera pas le droit de rendre ce témoignage et qui pouvons le rendre sans crainte pour nous-même, les savans anglais ont pris une part aussi glorieuse que ceux d'aucune autre nation à ces travaux de l'esprit communs à tous les peuples civilisés; ils ont affronté les glaces de l'un et de l'autre pôle; ils n'ont laissé dans les deux océans aucun recoin qu'ils n'aient visité; ils ont décuplé le catalogue des règnes de la nature; le ciel a été peuplé par eux de planètes, de satellites, de phénomènes inouïs; ils ont compté, pour ainsi dire, les étoiles de la voie lactée; si la chimie a pris une face nouvelle, les faits qu'ils lui ont fournis ont essentiellement contribué à cette métamorphose; l'air inflammable, l'air pur, l'air phlogistiqué, leur sont dus; ils ont découvert la décomposition de l'eau; des métaux nouveaux et en grand nombre sont les produits de leurs analyses; la nature des alcalis fixes n'a été démontrée que par eux; la mécanique, à leur voix, a enfanté des miracles, et placé leur pays au-dessus des autres dans presque tous les genres de fabrications; et si, comme aucun homme raisonnable n'en peut douter, de pareils succès proviennent de leur énergie personnelle et de l'esprit général de leur nation, beaucoup plus que de l'influence d'un individu, dans quelque position qu'il pût être, toujours faudra-t-il avouer que M. Banks n'a point abusé de sa position, et que son influence n'a rien eu de funeste. Le recueil même des mémoires de la compagnie, sur lequel on pourrait sans exagération supposer au président une action plus effective que sur la marche des sciences, a pris évidemment plus de richesse; il a paru plus exactement, et sous des

formes plus dignes d'un si bel ouvrage. C'est aussi du temps de M. Banks que la Société elle-même a été mieux traitée par le gouvernement, et qu'elle a occupé dans un des palais royaux des appartemens dignes d'un corps qui fait tant d'honneur à la nation.

Il était impossible que des services aussi réels ne fussent pas enfin reconnus par les hommes impartiaux; l'opinion publique les proclama, et le gouvernement se crut obligé de les proclamer comme elle. Élevé à la dignité de baronet en 1781, décoré en 1795 de l'ordre du Bain, l'un des premiers parmi les hommes qui n'étaient ni pairs du royaume, ni pourvus de grands offices militaires, M. Banks fut, en 1797, nommé conseiller d'état; ce qui, en Angleterre, donne un rang distingué et la qualification de *très-honorable,* qui n'est pas sans quelque importance dans un pays où l'étiquette en a beaucoup.

Pour lui, cependant, ce n'était qu'un titre; mais ce titre était une faveur, et il n'en fallait pas davantage pour réveiller l'envie. Déjà, à son retour d'Otaïti, un plaisant lui avait adressé une héroïde au nom de la reine Obéréa : dans une autre occasion, on lui avait prêté une prière instante à Dieu de multiplier les insectes, comme du temps des plaies d'Égypte; cette fois, feignant qu'il était admis aux véritables conseils politiques, on le représentait courant après des papillons, pendant que ses collègues délibéraient sur les intérêts de l'Europe.

Le seul remède applicable à de pareilles piqûres était d'en rire. Ce fut celui qu'il employa.

Du reste, s'il ne donnait pas officiellement au Roi des conseils politiques, il n'en était pas moins pour lui un conseiller très-réel et très-utile. Il partageait ses occupations rurales, il lui faisait connaître les productions intéressantes

des pays éloignés, et entretenait ainsi en lui ce goût pour la nature, qui avait déjà valu aux sciences tant d'acquisitions, et qui leur en valut davantage, à mesure que l'exemple du prince fut imité par les grands. C'est ainsi que, pendant trente ans, l'Angleterre a été en quelque sorte le centre de la botanique et le marché des plantes et des arbustes nouveaux.

La confiance née de cette communauté d'occupations douces donnait à M. Banks des occasions de servir encore plus immédiatement son pays; et l'on assure que les ministres employèrent quelquefois son ascendant pour faire adopter au monarque des résolutions que les circonstances politiques rendaient nécessaires, mais pour lesquelles ses affections naturelles lui donnaient de la répugnance.

Il faudrait n'avoir aucune idée de la marche compliquée et mystérieuse des moindres affaires dans un gouvernement où les intrigues de cour se mêlent, à chaque instant, aux intérêts de parti, pour ne pas concevoir l'importance qu'un homme pouvait acquérir dans une position pareille. Une chose admirable, c'est que M. Banks n'en usa ni pour sa fortune, ni pour sa vanité.

Ce qu'il eut de faveur, il le fit toujours réfléchir sur les sciences qui le lui avaient procuré : par-tout où une réunion se formait pour une entreprise utile, il s'empressait d'y prendre part; tout ouvrage qui avait besoin des secours des riches ou de ceux de l'autorité, pouvait compter sur son appui; chaque fois qu'une occasion se présentait d'entreprendre quelque recherche importante, il l'indiquait et faisait connaître les moyens les plus efficaces d'y réussir. Il a concouru ainsi aux plans de tous les grands voyages de mer faits après le sien; il a beaucoup contribué à faire établir le bureau d'agriculture; l'un des premiers membres de la société d'Afrique et des plus actifs, il a sans cesse fait encourager

ceux qui ont essayé de pénétrer dans cette partie du monde. C'est d'après ses avis réitérés qu'on a cherché à faire le tour de l'Amérique par le nord-ouest, et qu'on y a persévéré, malgré le mauvais succès d'une première tentative. Toutes les opérations relatives à la mesure de la méridienne, soit que des Anglais ou des Français y travaillassent, furent favorisées par lui ; en temps de guerre comme en temps de paix, les passe-ports, l'hospitalité, leur étaient assurés par ses soins. Mais ce que déjà nous avons annoncé, et ce qu'il est sur-tout de notre devoir de célébrer dans cette enceinte, c'est la générosité infatigable avec laquelle, au milieu des passions les plus échauffées, il a su adoucir les maux de la guerre envers ceux qui se livraient à des recherches scientifiques.

Le vertueux Louis XVI, à l'ouverture de la guerre d'Amérique, avait, de son chef, fait donner par-tout à ses vaisseaux l'ordre de respecter le capitaine Cook et ses compagnons. A l'honneur de notre siècle tant calomnié, ce bel exemple est devenu un article de la loi des nations, mais c'est principalement le zèle constant de M. Banks qui est parvenu à l'y faire inscrire. Non-seulement il n'a jamais manqué une occasion d'engager le gouvernement anglais à s'y conformer ; plus d'une fois il a fait parvenir ses sollicitations jusqu'à des gouvernemens étrangers. Dès le commencement de la guerre, il avait obtenu que des ordres semblables seraient donnés en faveur de La Pérouse, s'il existait encore ; il s'était fait enquérir de lui sur toutes les mers. Lorsque la discorde eut mis fin à l'expédition d'Entrecasteaux, et que les collections de M. de la Billardière furent transportées en Angleterre, il réussit à se les faire remettre ; et non-seulement il s'empressa de les renvoyer ici, il ajouta à tant de soins la délicatesse de les renvoyer sans même les

avoir regardées : il aurait craint d'enlever, écrivait-il à M. de Jussieu, une seule idée botanique à un homme qui était allé les conquérir au péril de sa vie. Dix fois des collections adressées au Jardin du Roi, et prises par des vaisseaux anglais, furent recouvrées par lui et rendues de la même manière; il envoya jusqu'au cap de Bonne-Espérance pour faire racheter des caisses appartenant à M. de Humboldt, qui avaient été prises par des corsaires, et n'a jamais voulu en recevoir le remboursement : il se croyait, pour ainsi dire, solidaire de toutes les atteintes que ses compatriotes portaient aux sciences et aux arts. Bien plus, il se croyait obligé de réparer le mal que leur faisaient les autres peuples. Ayant appris, par les journaux, que notre confrère Broussonnet avait été obligé de fuir les bourreaux de sa patrie, il fit donner aussitôt à ses correspondans en Espagne l'ordre de ne le laisser manquer de rien. Ses secours l'atteignirent à Madrid, à Lisbonne, le suivirent jusqu'à Maroc. Lorsque le grand minéralogiste Dolomieu, par la plus insigne violation du droit des gens, et pour satisfaire la vengeance d'une femme passionnée, fut jeté dans les cachots de Messine, ce fut l'ingénieuse humanité de M. Banks qui pénétra la première dans le souterrain où il gémissait caché à tout l'univers, et qui lui donna, avec quelques soulagemens, des nouvelles de son pays et de sa famille : s'il ne parvint pas à le faire rendre à la liberté, ce ne fut pas faute d'employer tous les moyens imaginables auprès du gouvernement qui le détenait avec tant d'injustice. Et ce que M. Banks faisait pour nos compatriotes, il ne mettait pas moins de zèle à le demander pour les siens. Chacun se souvient de cette autre violation du droit des gens par laquelle des milliers d'Anglais résidant ou voyageant paisiblement en France furent déclarés prisonniers de guerre. M. Banks s'empressa de

découvrir tous ceux en faveur de qui l'on pouvait alléguer quelque occupation ou quelque titre scientifique; c'était par l'Institut qu'il les faisait réclamer, et l'Institut n'était pas plus difficile que lui sur le prétexte. On parvint ainsi à soustraire plus d'un personnage digne d'estime à une captivité qui lui aurait peut-être été fatale.

Certes, celui qui use ainsi de son influence a bien le droit de veiller à ce qu'elle demeure intacte; c'est même un devoir pour lui; et dans cette lutte universelle pour le pouvoir, lorsque le hasard en fait échoir quelques parcelles à un homme animé de pareils sentimens, s'il négligeait de les conserver, la société tout entière aurait droit de se plaindre. Voilà l'unique réponse que les amis de M. Banks aient à faire à ce que l'on a pu dire contre le soin jaloux avec lequel il prévenait ce qui pouvait affaiblir la considération de sa place, ou mettre la discorde dans sa compagnie. Quelquefois, nous l'avouerons, ses précautions ont pu sembler excessives : mais, attaqué si souvent par des hommes exaspérés, n'avait-il pas raison de craindre qu'un instant de relâchement ne leur donnât prise? Le seul fait d'avoir répondu avec quelque politesse à l'Institut, qui venait, en 1802, de le nommer associé étranger, réveilla toutes les fureurs de ce Horseley qui semblait l'avoir oublié depuis quinze ans, et à qui l'on devait croire que son âge et sa dignité épiscopale auraient inspiré plus de modération : il écrivit contre M. Banks une brochure virulente, et, après sa mort, il a laissé des héritiers de sa haine, que la mort de M. Banks lui-même n'a pu calmer.

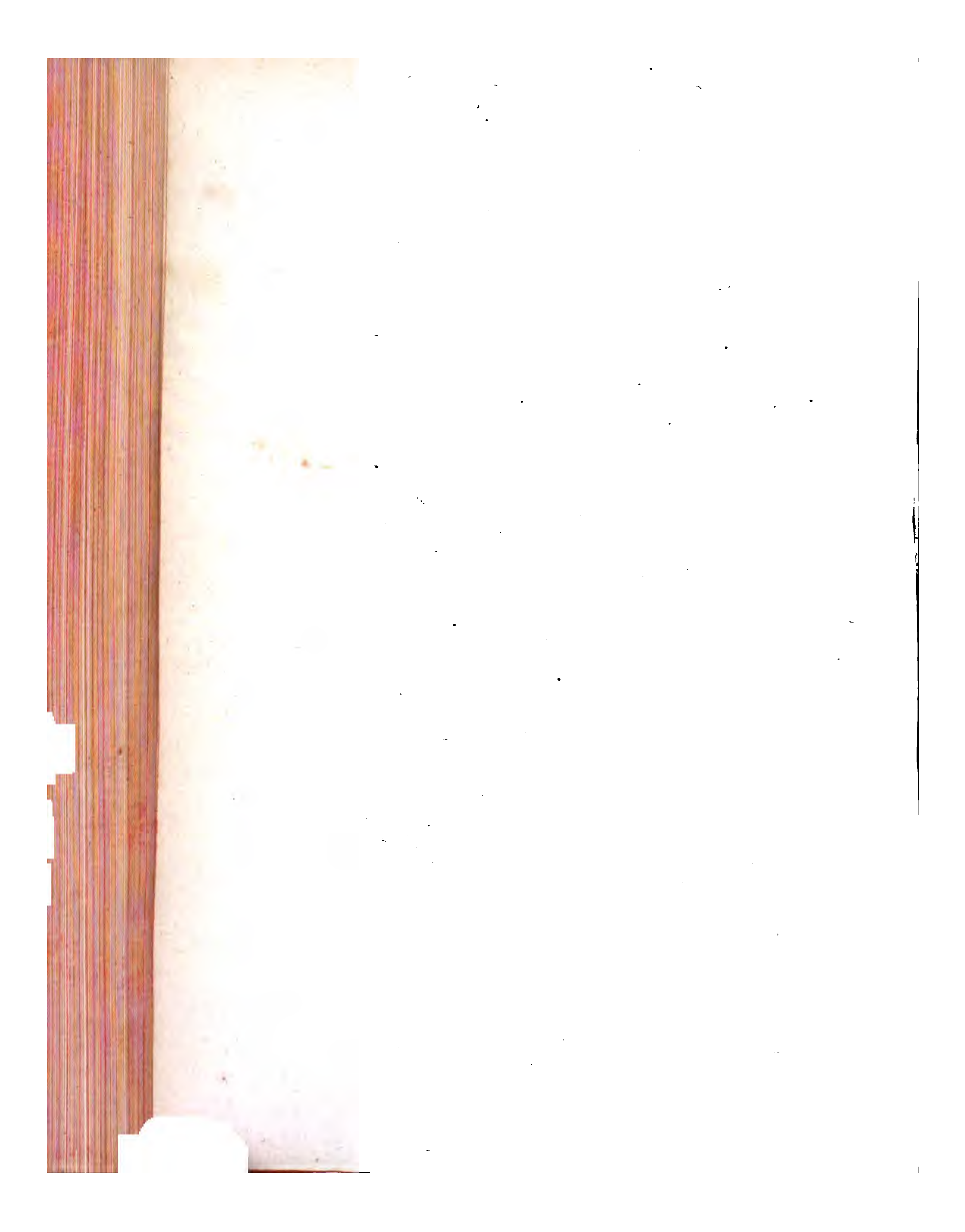
Pour nous, que rien n'empêche, à ce qu'il nous semble, de porter un jugement aussi impartial que la postérité, nous croyons devoir louer sans réserve en M. Banks le courage qu'il a mis à des entreprises périlleuses; le noble emploi

qu'il a fait de sa faveur pour soutenir tout ce qui était utile; l'assiduité exemplaire avec laquelle il a rempli les devoirs d'une place honorable, et l'aménité qu'il a introduite dans le commerce des amis de la science; la généreuse sollicitude qu'il a montrée pour ceux d'entre eux que le malheur poursuivait; et lorsque nous songeons combien, en réalité et malgré d'impuissantes attaques, il a été récompensé par la considération publique, et à quel point il a dû se trouver heureux par l'exercice même d'une bienveillance si constante et à laquelle il était parvenu à donner une si grande étendue, nous regardons comme un devoir pressant de l'offrir en exemple à tant d'hommes qui passent dans une oisiveté fatigante pour eux-mêmes et pour les autres une vie que leur position dans le monde leur permettrait de rendre si aisément utile à l'humanité.

Son bonheur domestique égala tous les autres : il ne perdit qu'en 1804 sa respectable mère; une sœur pleine d'esprit et de connaissances a vécu presque aussi long-temps que lui; une épouse aimable a fait constamment le charme de sa société. La nature même semblait l'avoir servi aussi bien que la fortune; d'une belle figure, d'une taille élevée, d'un tempérament vigoureux, si la goutte a troublé ses dernières années et l'a même privé pendant quelque temps de l'usage de ses jambes, elle n'a pu altérer ni sa tête ni son humeur. Les derniers momens d'une vie toute consacrée aux progrès des sciences ont encore été employés à les assurer après elle. Il a donné en mourant au muséum britannique sa riche bibliothèque d'histoire naturelle, collection formée par cinquante ans de recherches assidues, et que le catalogue dressé sous ses yeux par M. Dryander a rendue célèbre dans toute l'Europe, et utile même à ceux qui n'ont pu la voir, par l'ordre avec lequel non-seulement les ouvrages qui la composent,

mais jusqu'aux mémoires particuliers qui entrent dans ces ouvrages, y sont énumérés et classés sous chacune des matières auxquelles ils se rapportent. Il a cherché à assurer l'existence de ce grand botaniste M. Brown, qui lui avait sacrifié des espérances de fortune bien plus grandes que tout ce qu'il pouvait en attendre, mais qui avait cru que la science et l'amitié d'un homme tel que M. Banks méritaient un pareil sacrifice. Il a porté l'attention jusqu'à assigner des fonds pour faire continuer des dessins botaniques qui avaient été commencés dans le jardin royal de Kew par l'excellent artiste M. Bauer.

M. Banks est décédé le 19 mars 1820, ne laissant point d'enfans. La Société royale a choisi pour président le chevalier Humphry Davy, qui l'égalera en tout ce qu'il avait de bien, et ne donnera pas lieu aux mêmes objections ; car, jeune encore, ses découvertes sont au nombre des plus admirables de ce siècle. M. Davy était déjà auparavant membre étranger de l'Institut, et l'Académie des sciences a nommé à la place de M. Banks M. Gauss, professeur à Gœttingue, à qui ses excellens travaux sur les mathématiques donnaient depuis long-temps un titre à cet honneur.



HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1822.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

PAR M. LE BARON FOURIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

Rapport lu dans la séance publique de l'Institut, le 24 avril 1823.

MESSIEURS,

L'Académie des sciences a formé le dessein de vous exposer, chaque année, dans la séance générale, les progrès les plus récens des connaissances qui sont l'objet de ses recherches. Nous présentons aujourd'hui une partie de ce rapport : celle qui concerne les sciences naturelles sera donnée dans la

prochaine séance générale. On continuera ainsi, et alternativement, pour les sciences mathématiques et pour les sciences physiques, à vous présenter l'état sommaire des travaux de l'Académie dans le cours de deux années consécutives. Il n'y aura donc aucune découverte principale et aucune application importante qui ne vous soient publiquement annoncées dans cette suite de tableaux annuels. Ils ne comprendront pas seulement les découvertes qui auront été faites en France, mais encore celles qui nous seront connues par nos correspondances avec toutes les académies de l'Europe. On pourra se rappeler un jour et consulter avec quelque intérêt cette histoire contemporaine et rapide des plus heureux efforts de l'esprit humain.

Un ordre constant et admirable préside à tous les effets naturels. La lumière, la gravité, la chaleur, l'électricité, le magnétisme, exercent leur action suivant des lois immuables que l'homme peut découvrir par une étude attentive et persévérante. La connaissance de ces principes est l'objet de toutes les sciences positives.

La physique s'est enrichie, depuis le commencement de ce siècle, de découvertes capitales; l'optique, la théorie de la chaleur, celle de l'électricité, ont été rapidement perfectionnées. Ce mouvement imprimé à la physique générale ne s'est point ralenti dans l'intervalle de temps que nous considérons ici. Avant d'exposer les derniers progrès, nous devons indiquer les ouvrages qui ont pour but de propager et de faciliter l'étude des sciences.

Les théories mathématiques ont toujours joui de cet avantage, que plusieurs traités élémentaires ont été écrits par les plus grands géomètres. On doit à Newton les *Principes de l'arithmétique universelle*, à Euler des *Élémens d'algèbre*, à M. Legendre un *Traité de géométrie*. Cet ouvrage, dont on vient de publier la douzième édition, continue de se

répandre en France et dans tous les pays où les sciences sont honorées.

M. Lacroix a publié de nouveau ses *Élémens de l'analyse des probabilités*, science importante et encore peu connue, née d'une pensée de Pascal, élevée en Angleterre au rang des connaissances dont la société retire des avantages immédiats, et qui a reçu parmi nous un accroissement immense de l'auteur de la *Théorie analytique des probabilités*, en sorte qu'elle doit à la France son origine et ses progrès les plus éclatans. L'ensemble précieux des traités que M. Lacroix a publiés, comprend toute l'étendue de l'analyse mathématique. Il a joint à l'ouvrage dont nous parlons, des remarques importantes sur les caisses d'épargnes, les assurances, les placemens viagers, les tontines. Ces remarques ont pour objet de distinguer les établissemens honorables et utiles, de ceux que la raison et l'expérience ont justement condamnés.

On a réimprimé le *Traité de statique* de M. Poinsot. Cet ouvrage a cela de remarquable, que l'auteur a découvert des principes nouveaux dans une des théories les plus anciennement connues, inventée par Archimède et perfectionnée par Galilée.

MM. Poisson et Cauchy ont entrepris des recherches d'analyse dont nous ne pourrions point ici exposer les résultats; nous ajouterons seulement que leurs travaux ont perfectionné la partie des sciences mathématiques qui s'applique le plus directement à l'étude des phénomènes naturels.

Les premiers théorèmes de l'optique avaient été découverts par Descartes, Huyghens et Newton. Cette science a pris un nouvel essor vers le commencement du siècle; elle doit ses progrès récens en France à MM. Malus, Arago, Biot et Fresnel, et en Angleterre à MM. Wollaston, Young et Brewster.

La lumière se transmet avec une vîtesse immense à toutes les parties de l'univers. Elle parcourt d'un mouvement

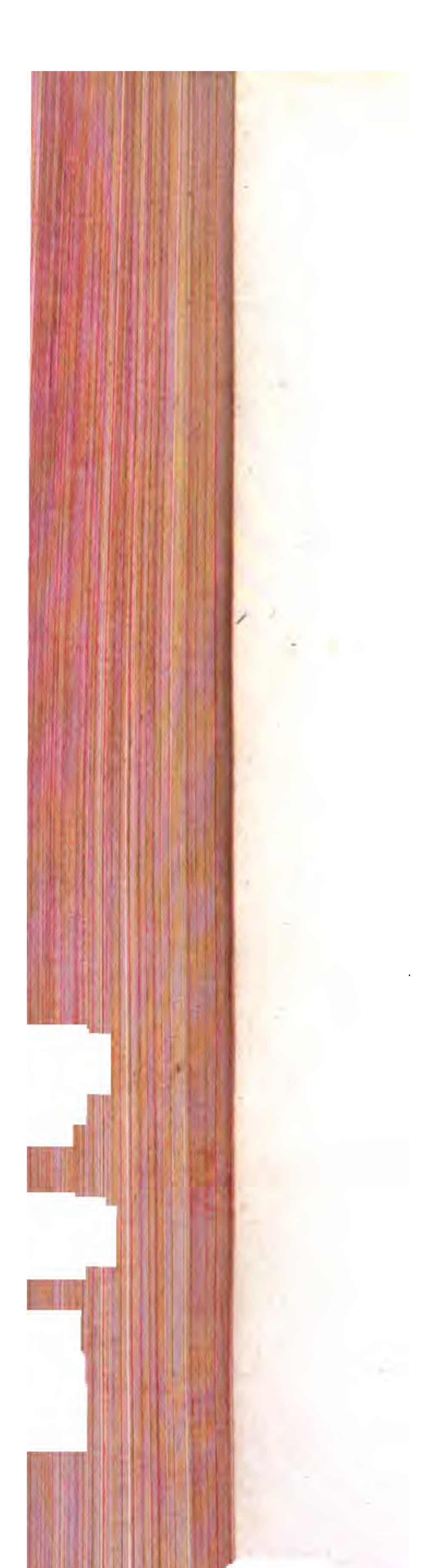
uniforme environ soixante-dix mille lieues dans l'intervalle d'une seconde; elle se réfléchit à la surface des corps; une partie de ses rayons pénètre les substances diaphanes; elle se décompose en rayons colorés homogènes, inégalement réfrangibles.

Lorsqu'un rayon de lumière traverse certains cristaux, il se partage en deux faisceaux distincts; c'est ce qui constitue la double réfraction. La loi de ce phénomène a été déduite des observations par Huyghens, et M. de Laplace l'a ramenée aux principes généraux de la mécanique rationnelle.

Chacun des deux rayons réfractés acquiert, dans l'intérieur du milieu cristallisé, une disposition spéciale que l'on a désignée sous le nom de *polarisation*, et qui a un rapport singulier et constant avec la situation des élémens des cristaux. Cette propriété devient manifeste lorsqu'un rayon polarisé tombe obliquement sur la surface d'un corps diaphane qui en réfléchit une partie : car les effets de la réflexion et de la transmission sont très-différens, et en quelque sorte opposés, selon que la surface se présente au rayon de différens côtés.

M. Malus a étudié ce genre de phénomènes avec une persévérance admirable; et ce sont ses nombreuses et ingénieuses découvertes, et les expériences de MM. Wollaston et Young, qui ont imprimé un nouveau mouvement à l'optique et ont déterminé ses derniers progrès.

On doit à M. Arago la découverte de la polarisation colorée. Ses recherches, qui ont perfectionné toutes les autres parties de l'optique, ont un caractère remarquable, en ce qu'elles donnent à cette science des instrumens nouveaux qui reproduisent et perpétuent l'utilité des expériences. C'est ainsi que, par l'observation des phénomènes de la polarisation colorée, il a pu comparer les rayons qui partent des bords du disque apparent du soleil à ceux qu'envoie le centre de cet astre. Il en est de même des effets de la diffraction, dont



M. Arago déduit un nouveau procédé, pour mesurer avec une extrême précision les moindres différences de force réfringente des corps ou des substances aériformes. L'optique n'a rien acquis de plus ingénieux et de plus important.

MM. Biot et Brewster ont beaucoup contribué à enrichir cette science de mesures précises, de faits nouveaux, et d'un grand nombre d'observations.

M. Fresnel a cultivé dans ces dernières années toutes les branches de l'optique avec un succès éclatant. Il a déterminé les lois mathématiques des phénomènes les plus composés, et tous les résultats de son analyse sont exactement conformes aux observations. Ces franges alternativement brillantes ou obscures qui accompagnent les ombres des corps étroits, les anneaux colorés que produit la lumière dans les lames très-minces, les couleurs que la lumière polarisée développe en traversant les lames des cristaux, deviennent ainsi des conséquences nécessaires et évidentes des mêmes principes.

Lorsque deux rayons sortis d'une source commune se réunissent au même point d'une surface, les deux effets de lumière ne s'ajoutent pas toujours; ils peuvent se détruire mutuellement. Ainsi la réunion de deux rayons lumineux peut produire l'obscurité; ce qui arrive en effet dans un grand nombre d'expériences. C'est dans les résultats de ce genre que consiste le principe des interférences, que nous regardons comme la notion la plus étendue et la plus féconde de cette optique nouvelle. On peut en trouver l'origine dans les expériences de Grimaldi, qui ont précédé *l'Optique* de Newton, ou dans les recherches de Hook; mais on le doit sur-tout à M. Thomas Young, qui l'a démontré et introduit dans l'étude des phénomènes d'optique. Nous devons ajouter que ce principe n'est pas borné aux propriétés optiques. M. Arago a prouvé que, dans le cas où l'effet du concours des deux rayons est nul, l'action chimique de la lumière disparaît aussi.

Les recherches les plus récentes de M. Fresnel ont pour objet l'expression mathématique des lois de la double réfraction dans tous les cristaux, celle de la quantité de lumière réfléchie par les corps transparens sous les diverses incidences, enfin un genre de polarisation très-différente de celle que l'on a considérée jusqu'ici, et dont les caractères ne sont ni moins généraux ni moins constans.

Une des applications les plus récentes de l'étude des propriétés de la lumière, est celle que l'on fait aujourd'hui en France dans l'établissement des phares *dioptriques*. Nous appelons ainsi ceux où la lumière du foyer n'est point réfléchie, mais transmise par des lentilles de verre qui rendent les rayons parallèles.

La flamme se trouve placée au centre du système de huit lentilles semblables, et le système entier tourne sur son axe, en sorte que tous les points de l'horizon sont successivement éclairés. La lumière paraît alternativement plus vive et plus faible; cette intermittence d'éclat, d'affaiblissement, ou de disparition, diversifie et signale les feux. M. Fresnel est parvenu à former des lentilles de grandes dimensions, en les composant de plusieurs parties; et il supprime toutes les épaisseurs qui ne pourraient que contribuer à la déperdition de la lumière, disposition remarquable que Buffon a employée le premier.

Il était nécessaire sur-tout de placer au foyer une lumière extrêmement vive. MM. Arago et Fresnel ont inventé pour cela une lampe à flammes concentriques, dont la lumière équivaut peut-être à celle de cent cinquante bougies. Les dernières expériences ont prouvé que ces phares, même dans des temps assez peu favorables, sont facilement aperçus à plus de huit lieues de distance. Tel est l'éclat des feux, que, même avant la fin du jour, ils ont pu être employés comme signaux dans une opération géodésique due à MM. Arago

et Mathieu, et à MM. Kater et Colby de la Société royale de Londres. On voyait ces signaux avec une lunette à plus de seize lieues, une heure avant le coucher du soleil; et une heure après le coucher, on les distinguait aisément à la vue simple, à cette même distance.

Les découvertes qui ont été faites récemment dans les théories de l'électricité et du magnétisme, doivent leur origine aux expériences mémorables de M. Oersted de l'académie de Copenhague. Des recherches entreprises depuis long-temps, et ses considérations sur l'identité des causes de l'électricité et du magnétisme, lui ont donné lieu d'observer que le fil conducteur qui joint les deux extrémités de l'appareil électrique de Volta, exerce une action très-sensible sur la direction de l'aiguille aimantée, et il a reconnu tous les caractères généraux de ce phénomène. L'Académie des sciences de Paris, en apprenant cette observation capitale, a décerné à M. Oersted un de ses grands prix annuels. Elle jugeait alors que cette découverte deviendrait la source d'une théorie physique et mathématique féconde en résultats nouveaux; et ses vues ont été bientôt confirmées dans le sein même de l'Académie.

M. Arago a ajouté le premier un fait très-remarquable à ceux que le célèbre physicien danois nous avait appris: il a vu que ce même conducteur qui transmet le courant électrique, attire le fer et lui communique les propriétés de l'aimant, et que cet effet cesse aussitôt que le courant est interrompu.

M. Ampère a recherché avec le soin le plus attentif et le plus ingénieux les lois générales des actions dynamiques du conducteur et des aimans. Il a reconnu qu'il existe entre les conducteurs une action mutuelle attractive ou répulsive, selon certaines conditions; découverte importante, dont il déduit l'explication d'un grand nombre de faits. Quant à

l'action des corps aimantés, M. Ampère l'attribue à la présence d'une multitude de circuits électriques formés autour de chaque molécule de ces corps. Si l'on ne peut point affirmer l'existence de ces courans, il est du moins incontestable que l'on reproduit d'une manière frappante les propriétés magnétiques, lorsqu'on donne au conducteur la figure d'une hélice dont les spires sont très-multipliées. Cette considération fait connaître clairement quels effets doivent résulter de l'action du magnétisme terrestre combinée avec celle des conducteurs. Elle explique un fait très-remarquable, que M. Faraday a observé le premier, et qui consiste dans le mouvement continuel d'une portion du conducteur autour d'un aimant. L'explication même a servi à compléter cette ingénieuse expérience; elle a suggéré le moyen de faire tourner l'aimant autour de son axe, et de produire le mouvement continu entre les seuls conducteurs, ou par l'action du magnétisme terrestre. L'auteur de cette théorie, M. Ampère, a déduit des observations l'expression mathématique de la force qui agit entre les élémens des conducteurs, et il ramène ainsi à un seul principe les effets les plus composés de l'action des conducteurs et du magnétisme terrestre.

Nous regrettons que les bornes de ce rapport ne nous permettent point d'exposer les résultats des belles expériences de sir Humphry Davy sur la mesure de la propriété conductrice dont jouissent divers métaux traversés par les courans électriques. Nous aurions desiré aussi pouvoir appeler l'attention sur le procédé employé par M. Schweiger pour multiplier et rendre manifestes les effets d'une force électromotrice presque insensible.

M. Biot et M. Pouillet ont déterminé par des procédés exacts et précis les lois mathématiques de l'action des conducteurs sur les aimans. M. Savary et M. de Montferrant ont fait d'heureuses applications du calcul intégral à la

mesure des effets électro-dynamiques, et ils ont déduit de la loi proposée par M. Ampère des résultats conformes aux expériences de Coulomb et à celles que l'on vient de citer.

Enfin des expériences récentes, dues à M. Seebeck de l'académie de Berlin, nous apprennent que le contact de métaux différens et l'inégalité des températures suffisent pour occasionner des effets magnétiques très-sensibles.

MM. Oersted et Fourier se sont réunis pour faire de nouvelles expériences sur ces actions *thermo-électriques*. Ils ont découvert le moyen d'accroître et de multiplier les effets de ce genre par la succession alternative de deux métaux retenus à des températures inégales.

Quelque rapide et imparfait que soit cet exposé, il laisse apercevoir toute l'étendue de ces nouvelles théories. Une relation aussi manifeste entre des phénomènes que l'on pouvait regarder comme étant d'une nature différente, nous avertit qu'ils ont une origine commune, et nous fait entrevoir la cause du magnétisme terrestre et de ses rapports avec les aurores boréales. La seule diversité des matières mises en contact et la différence des températures déterminant des effets magnétiques très-intenses, il serait, pour ainsi dire, impossible qu'on n'observât point de tels effets dans l'enveloppe solide du globe terrestre; et l'on voit en même temps quelle peut être sur les phénomènes magnétiques l'influence des variations diurnes ou annuelles de la chaleur produite par les rayons solaires.

En publiant la *Mécanique céleste*, ouvrage immortel, qui sera cité dans tous les âges comme un des plus grands monumens que les sciences aient produits, l'auteur avait annoncé le dessein d'écrire l'histoire sommaire des découvertes mathématiques relatives au système du monde. Les sciences et la littérature viennent d'acquérir la première partie de cette

histoire; on y remarque, comme dans la *Notice des progrès de l'astronomie*, cette précision élégante qui naît d'une étude immense et de la profondeur des pensées.

La première partie du cinquième volume a pour objet les recherches mathématiques sur la figure de la terre; question importante et très-difficile, aujourd'hui complétement résolue, et qui rappelle des noms illustres, tels que ceux de Newton, de Clairaut, Maclaurin, Legendre, Lagrange et Laplace.

En traitant de l'action mutuelle des sphères, l'auteur examine les conditions de la statique moléculaire des fluides aériformes. Cette recherche est entièrement nouvelle. L'analyse de M. de Laplace explique les deux lois connues de la statique des gaz. L'une de ces lois porte le nom de Mariotte, qui l'a découverte; on est redevable de la seconde à MM. Gay-Lussac et Dalton.

Cette même analyse fait connaître distinctement les conditions qui déterminent la solidité, l'état liquide, la conversion en vapeurs, et un état en quelque sorte intermédiaire de vapeurs comprimées, qui n'était point connu avant les expériences très-remarquables de M. le baron Cagniard de la Tour.

La même théorie donne la mesure exacte de la vîtesse du son dans l'air; question plus ancienne, qui n'avait pu être qu'imparfaitement résolue, parce qu'on n'avait pas encore observé l'élévation de température due à la compression de l'air.

Les académiciens français avaient fait, en 1738, des expériences propres à mesurer cette vîtesse; le bureau des longitudes les a renouvelées dans le mois de juin dernier, avec toute la précision que comportent aujourd'hui les recherches physiques. On a trouvé que la vîtesse du son dans l'air, à la température de dix degrés, diffère très-peu de cent soixante-quatorze toises par seconde.

On doit surtout l'exactitude de ces nouvelles observations à l'excellence des instrumens de MM. Breguet. Personne n'ignore combien leurs découvertes ont perfectionné la mesure du temps, et les avantages qu'en ont retirés la physique, la géographie et la navigation.

Ces dernières expériences sur la vîtesse du son ne seront pas moins mémorables que celles de 1738. Pour faire apprécier le degré d'intérêt de ces observations, il suffit de dire qu'elles ont été proposées et exécutées par plusieurs membres du bureau des longitudes, et qu'ils ont eu pour coopérateurs M. Alexandre de Humboldt, dont le nom à jamais célèbre est associé à toutes les branches de la philosophie naturelle, et M. Gay-Lussac, auteur de découvertes capitales sur les propriétés de l'air et des gaz.

Nous ne rappellerons point ici les travaux qui s'accomplissent chaque année dans l'observatoire royal de Paris, ni les collections précieuses où l'on publie ces observations. Toutes les personnes qui s'intéressent aux progrès des sciences connaissent l'objet et l'étendue de ces travaux. Parmi ceux dont la date est la plus récente, nous aurions cité les *Tables de Jupiter, Saturne et Uranus*, dues à M. Bouvard, et que tous les astronomes ont adoptées.

On a observé pendant l'année 1822 l'apparition de quatre comètes : la première a été découverte par M. Gambard à Marseille, et deux autres par M. Pons. Pour l'un de ces astres, on n'a eu que deux observations, en sorte que les élémens de l'orbite n'ont pu être calculés. On a déterminé ces élémens pour les deux autres comètes. Ils diffèrent beaucoup de ceux qui appartiennent aux comètes précédentes. Ainsi ce sont des astres nouveaux, ou du moins différens de tous ceux dont le cours a été bien observé.

Il n'en est pas de même de la quatrième comète vue en 1822 ; elle est évidemment celle de 1786, 1795, 1805,

1819. La durée de sa révolution autour du soleil est de douze cent deux jours.

Le retour de cet astre est un événement astronomique du plus grand intérêt. Son peu d'éclat et la lumière crépusculaire n'ont point permis de l'observer en Europe, et l'on n'avait pas été plus heureux à l'observatoire du Cap de Bonne-Espérance. Mais cette comète vient d'être reconnue dans le pays de la terre le plus éloigné de l'Europe, la Nouvelle-Hollande. Les astronomes de l'observatoire de Paramatta, le plus récent des établissemens de ce genre, ont observé cette comète pendant tout le mois de juin 1822, et dans des positions très-voisines de celles qui avaient été calculées. On doit la fondation de ce nouvel observatoire à M. le général Brisbane, correspondant de l'Académie des sciences, gouverneur de la Nouvelle-Galles méridionale, qui cultive l'astronomie et les sciences naturelles, et s'intéresse vivement à leurs progrès.

La comète de 1759, qui a été l'objet des recherches de deux savans célèbres, Halley et Clairaut, était jusqu'ici le seul astre de ce genre dont la révolution elliptique fût connue avec une entière certitude : mais la période qui fixe son retour, est de soixante-seize ans environ. La comète dont nous venons de parler, et dont M. Enke a découvert les élémens elliptiques, offre cet avantage, qu'elle peut être observée dix fois en trente-trois ans. L'ellipse allongée qu'elle décrit est comprise dans l'intérieur de notre système solaire. La plus grande distance de la comète au soleil est douze fois plus grande que sa moindre distance, et cette dernière est environ le tiers de la distance moyenne de la terre au soleil.

Cette comète est peut-être destinée à nous procurer des connaissances nouvelles sur la nature singulière de ces astres, qui ont très-peu de masse et semblent consister seulement en vapeurs condensées : ils ne causent dans notre système planétaire aucune perturbation sensible ; mais ils en subissent

eux-mêmes de très-considérables. Leur cours ne peut point être fixe, si la masse change graduellement, ou se sépare, ou se dissipe; toutefois, aussi long-temps que cette masse subsiste, ces astres sont assujettis aux lois connues de la gravité, en sorte qu'il n'y en a aucun dont l'observation n'offre une nouvelle preuve de la vérité des principes de l'astronomie moderne.

Au nombre des applications importantes des théories mécaniques, nous avons à citer un procédé nouveau, extrêmement ingénieux, dû à M. de Prony, et qui sert à mesurer l'effet dynamique des machines de rotation;

Le mémoire de M. Girard sur la force de résistance des enveloppes cylindriques;

Et l'ouvrage très-remarquable que le même auteur vient de publier, et qui concerne à-la-fois l'hydraulique, la connaissance du régime des fleuves, le commerce et l'industrie.

Les bornes que nous avons dû prescrire à ce rapport, nous permettent à peine d'énumérer une suite de questions mécaniques ou physiques qui intéressent la société civile et sur lesquelles le Gouvernement a consulté l'Académie des sciences. Elle s'est empressée de seconder ses vues, et s'honorera toujours des obligations de ce genre qui lui seraient imposées.

La première de ces questions est relative à l'usage public des voitures : il s'agissait d'examiner les causes qui peuvent les rendre sujettes à verser, soit que ces accidens proviennent d'une construction défectueuse, ou de la distribution imprudente des objets transportés, ou de la vîtesse excessive, ou enfin de la disposition même de la route. Les autres questions concernent

La construction des paratonnerres,

Les procédés aréométriques qu'il faut employer pour mesurer avec une grande précision la pesanteur spécifique des liquides,

Enfin l'usage des machines mues par la force de la vapeur, et les garanties les plus propres à prévenir des explosions funestes.

Toutes ces questions ont été examinées par des commissions spéciales, et soumises ensuite à une discussion très-attentive.

Le rapport sur l'emploi des aréomètres a été fait par M. Arago.

M. Gay-Lussac a rédigé l'instruction relative à la construction des paratonnerres.

On doit à M. Dupin les trois rapports qui concernent la stabilité des voitures, l'usage des bateaux à vapeur, et celui des machines à feu. Dans le même temps qu'il s'occupait de la rédaction de ces rapports, M. Dupin continuait de publier ses *Mémoires mathématiques* et son ouvrage qui a pour objet de décrire les arts et établissemens nautiques, militaires et industriels de la Grande-Bretagne. L'auteur a trouvé dans l'opinion des géomètres, celle de plusieurs écrivains très-distingués, et les honorables suffrages des étrangers, une récompense digne de ses efforts.

Nous avons indiqué les résultats principaux que les sciences exactes viennent d'acquérir dans un intervalle de temps assez court. On voit assez par cet exposé que les théories ne peuvent faire aucun progrès considérable sans que les applications se multiplient. Les sciences, même les plus abstraites, deviennent inopinément d'une utilité immédiate et sensible, et se prêtent aux usages les plus vulgaires. C'est un théorème d'Archimède qui sert de fondement à ces mesures aréométriques nécessaires à l'administration et aux particuliers. La presse hydraulique qui sert aujourd'hui à tous les arts, dont la force immense rapproche ou divise, réduit à leur moindre volume les matières transportées, fait pénétrer les couleurs dans l'épaisseur des tissus réunis, en un mot, qui est devenue

en Angleterre d'un usage presque universel, cet instrument, dis-je, est un corollaire de statique proposé par Pascal.

Ainsi les sciences, dont le premier caractère est sans doute d'élever et d'éclairer l'esprit, semblent aussi nous avoir été données pour suppléer à notre faiblesse et à l'imperfection des sens. Je vois par-tout l'homme s'emparer des forces de la nature, et poursuivre sa plus noble conquête. Il dispose à son gré du poids et des mouvemens de l'air et des eaux; il fait servir à ses desseins l'élasticité de la vapeur, ou plutôt celle du feu lui-même, qui pénètre et anime l'univers, cause perpétuelle et infinie de puissance et d'action : cet empire sur les élémens et les forces naturelles n'est-il pas un des principaux attributs de la raison humaine, et le témoignage le plus éclatant de la sublimité de sa source?

Au rang des grandes applications des sciences mathématiques, on doit placer celles qui appartiennent en France à des branches principales du service public.

L'établissement destiné à réunir tous les documens qui intéressent la marine, doit à MM. de Rosili et de Rossel une nouvelle activité, et cet ordre constant et précis qu'exigent l'extrême variété et l'importance des résultats; on a connu, dans ces circonstances, tous les avantages que procurent à l'administration une expérience consommée, la sagesse des vues et les lumières de la théorie.

L'analyse et la discussion de ces documens, et les méthodes hydrographiques qui servent à l'exploration des côtes, ont été perfectionnées par MM. Buache et Beautems-Beaupré.

Ces méthodes ont reçu un degré de perfection que l'on pouvait à peine espérer; on a employé de nouvelles sondes; on a reconnu et décrit avec des détails innombrables la configuration des terres, la position des écueils et des bas-fonds. Ces travaux s'étendent chaque année à de nouvelles parties des côtes de l'Océan. Ils confirment la juste réputation, et



exactitude rigoureuse qui semblait n'appartenir qu'aux observations astronomiques.

Ainsi se prépare une carte générale de la France, fondée dans toutes ses parties sur un ensemble de mesures trigonométriques, seul moyen de coordonner et de vérifier les mesures cadastrales. Une commission spéciale que le Gouvernement a établie, et que préside un membre de l'Académie des sciences, dirige ce beau travail, dont les résultats formeront une des propriétés les plus importantes qu'une nation puisse acquérir.

Ces recherches intéressent beaucoup les sciences mathématiques, parce qu'elles concourent à la détermination exacte de la figure de la terre. Tous les gouvernemens éclairés se sont réunis pour favoriser les travaux qui ont pour objet de procurer cette connaissance. On continue cette année dans l'Indostan une grande opération de ce genre, que le gouvernement britannique a confiée à M. le colonel Lambton, correspondant de l'Académie des sciences. Cet excellent observateur vient de nous transmettre les résultats qu'il a obtenus; il en déduit l'élément principal du système métrique français, et trouve sensiblement la même valeur que celle qui a été déterminée dans nos climats. Il en est de même de l'aplatissement du globe, ou de l'excès du diamètre de l'équateur sur l'axe qui passe par les pôles. De la comparaison des mesures faites dans l'Inde et dans l'Europe, on conclut que cet excès est égal à la trois-cent-dixième partie de l'axe polaire, quantité peu différente de celle qui était précédemment connue; et ce qui doit être regardé comme un des résultats les plus admirables des théories modernes, la valeur en quelque sorte moyenne de l'aplatissement du globe terrestre se déduit de la seule observation des irrégularités du mouvement lunaire.

Les opérations géodésiques de la France se rattachent à

toutes celles que l'on a entreprises en Angleterre, dans le royaume des Pays-Bas, le Hanovre, le Danemarck, la Bavière, l'Autriche, la Suisse, la haute Italie. Les ingénieurs les plus habiles de ces contrées, ou les géographes français eux-mêmes, y ont exécuté des opérations qui se lient avec les nôtres et forment un immense réseau de triangles. Une même science a étendu son empire et sa possession paisible sur la plus grande partie de l'Europe.

Dans le même temps que l'on s'appliquait en France à ces grands travaux, et que l'on explorait avec tant de soin les côtes des mers voisines, une expédition savante parcourait l'autre hémisphère. M. le capitaine Louis de Freycinet recueillait les innombrables résultats d'un voyage déjà célèbre.

Un officier de la marine française, sorti de la première école mathématique de l'Europe, M. Marestier, étudiait dans l'Amérique septentrionale une industrie nouvelle et puissante, si nécessaire à ce vaste continent, et qui est devenue en peu d'années un des principaux élémens de la fortune publique.

De jeunes voyageurs, MM. Cailliaud et le Torzec, formés par les leçons de nos astronomes, munis des instrumens et des méthodes de l'observatoire de Paris, pénétraient dans l'Afrique orientale à plus de cinq cents lieues de la limite de l'Égypte et de la Nubie; ils décrivaient les monumens anciens, et déterminaient par l'observation du ciel une multitude de positions géographiques entièrement ignorées. Nous avons dû nous borner ici, Messieurs, à vous entretenir des progrès de la géographie astronomique; mais nous ne pouvons oublier que dans le même temps et presque dans les mêmes contrées d'autres Français se livraient à des travaux difficiles qui ont enrichi l'architecture, les arts et la science des antiquités.

Si nous considérons sous un aspect plus étendu tous les titres de la gloire littéraire, quel spectacle, Messieurs, s'offre

à notre pensée! La France brille aujourd'hui de l'éclat immortel des beaux-arts; elle éclaire tout le domaine des plus hautes sciences, et, chaque année, elle en recule les limites. Elle cultive, comme également précieuses et nécessaires au bonheur des peuples, toutes les études littéraires; celles qui recueillent les leçons de l'histoire et posent ainsi les fondemens de l'expérience du genre humain, ou celles qui fixent le langage, éternisent et consacrent le souvenir des grandes vertus, peignent les passions, les mœurs et la nature entière, ou reproduisent ces modèles sublimes d'une antique éloquence qui inspira tant de résolutions généreuses. Il appartient à notre patrie de posséder et de transmettre aux âges futurs ce vaste ensemble des connaissances humaines. Heureux et mémorable concours dont cette séance même est le continuel témoignage! source pure d'une gloire durable que nulle autre ne peut égaler! Puisse la France conserver à jamais le rang élevé qu'elle occupe aujourd'hui! qu'elle jouisse des bienfaits des arts et les répande sur toutes les nations!

Après cet exposé sommaire des progrès les plus récens des sciences mathématiques, il nous reste à faire connaître d'une manière plus spéciale l'objet de chaque recherche.

GÉOMÉTRIE.

L'auteur de la *Mécanique céleste* a commencé à publier le tome V et dernier de ce grand ouvrage. Cette partie comprend les notices historiques des travaux des géomètres sur le système du monde, et de nouvelles recherches sur divers points de ces théories. Rien n'est plus digne de l'attention que l'énumération précise des découvertes qui se sont succédé depuis la fin du XVII.ᵉ siècle jusqu'aujourd'hui, et qui ont servi à résoudre des questions aussi difficiles et aussi com-

posées. Dans la notice historique de chaque livre, l'auteur indique les recherches capitales, en exprime le vrai caractère, et montre les rapports qu'elles ont entre elles, en omettant des détails qui ne pourraient laisser aucun souvenir utile.

Le livre XI traite de la figure de la terre et de son mouvement autour de l'axe. Les recherches mathématiques sur cet objet prennent leur origine dans les ouvrages de Newton. La notice expose les résultats successifs dus à Newton, Huyghens, Maclaurin, Clairaut, d'Alembert, à MM. Lagrange, Legendre, Ivory, et à l'auteur même de la *Mécanique céleste.*

Quant aux recherches nouvelles expliquées dans ce livre XI, elles ont pour objet d'examiner la question de la figure de la terre sous des points de vue que l'on n'avait point encore considérés, savoir : 1.° l'effet dynamique de la présence et de la distribution des eaux à la surface du globe; 2.° celui de la compression exercée sur les couches intérieures; 3.° celui du changement de dimensions qui serait occasionné par le refroidissement progressif du globe. Il est évident que chacune de ces causes peut influer sur l'équilibre, la figure ou le mouvement de la masse terrestre. L'examen analytique de ces questions est nécessaire pour compléter la théorie de la figure du globe; car les géomètres ont fait jusqu'ici abstraction des conditions physiques que l'on vient d'indiquer.

Il suffit d'énoncer l'objet de ces différentes recherches pour que l'on puisse juger qu'elles ont un haut degré d'intérêt, et peuvent éclairer plusieurs questions de géologie et de physique générale.

Voici les conséquences principales que l'analyse fournit sur cet important sujet. La comparaison des résultats de la théorie avec ceux des expériences sur la longueur du pendule nous apprend que la masse de la terre n'est point homogène. Les couches situées à de plus grandes profondeurs sont plus denses; elles sont disposées régulièrement autour du centre de gravité

du globe, et leur forme diffère peu de celle de la surface courbe engendrée par la révolution d'une ellipse. L'ellipticité ou l'excès du diamètre de l'équateur sur l'axe polaire pris pour unité peut être déterminé par la comparaison des degrés du méridien mesurés dans divers climats, ou par celle des longueurs du pendule, et par deux inégalités du mouvement lunaire. Ces différentes méthodes conduisent à des résultats sensiblement égaux. Si l'on concevait que la surface du sphéroïde terrestre privé des eaux de l'océan devînt liquide, et que l'équilibre fût établi, la forme du globe différerait très-peu de sa forme actuelle. Ainsi la présence et la distribution des eaux à la superficie de la terre ne causent pas de changemens considérables dans la loi de la diminution des degrés et dans celle de la pesanteur. Cela provient, 1.° de ce que la densité de l'eau est environ cinq fois moindre que la densité moyenne de la terre; 2.° du peu de profondeur de l'océan : car la valeur moyenne de cette profondeur ne peut être qu'une partie assez petite de la différence du rayon de l'équateur au rayon qui passe par le pôle.

On ne peut admettre aucun déplacement considérable des pôles à la surface du globe, et toute hypothèse physique fondée sur une telle supposition ne s'accorderait point avec la connaissance exacte que nous avons acquise des causes mécaniques qui déterminent la figure du globe. Toutes les observations connues et tous les résultats de la théorie concourent à prouver que l'axe du mouvement diurne passe par des points invariables de la superficie de la terre, et que la durée de ce mouvement n'a subi aucun changement appréciable depuis les époques les plus reculées. Ces deux conséquences fondamentales avaient été démontrées. Mais il fallait examiner si la masse liquide répandue sur une partie de la surface terrestre peut empêcher qu'il n'existe pour le système entier un ou plusieurs axes principaux de rotation, propriété dont jouissent

les corps solides : or on conclut de cet examen que non-seulement il existe dans ce cas un axe principal, mais que la mobilité de l'océan et les résistances opposées aux oscillations ne peuvent que conserver ou rétablir l'équilibre du sphéroïde. Ainsi la terre, dont une partie est couverte d'eau, jouit, comme les corps solides, de la propriété de pouvoir tourner uniformément autour de certains axes immuables; seulement elle changerait de figure si l'axe de rotation venait à changer.

Les observations, et la comparaison de la théorie avec les faits, tendent à prouver que la masse du globe était primitivement à l'état fluide. La compression que le poids des couches supérieures exerce sur les couches intérieures du globe a dû augmenter la densité des parties les plus voisines du centre, et cette seule cause expliquerait la densité croissante des couches. Il est intéressant d'examiner si, dans la supposition d'une masse homogène primitivement fluide, comprimée par son propre poids, on trouverait des résultats qui se pussent concilier avec les observations; et en effet, on y est parvenu. Il suffit de concevoir que dans les corps solides la résistance à la compression est d'autant plus grande que la masse est déjà plus comprimée. En représentant par une loi très-simple cette augmentation de la force de résistance, on voit que tous les faits connus pourraient être expliqués. Au reste, l'auteur a pour objet dans cette discussion, non de considérer les diverses causes qui ont déterminé la constitution intérieure du globe, mais d'examiner séparément quel serait l'effet résultant de la compression dans une masse fluide homogène.

La recherche relative aux changemens que le refroidissement progressif aurait pu occasionner dans les dimensions, et par conséquent dans le mouvement diurne du globe, n'offrait pas moins d'intérêt que les précédentes.

Si la température de la terre s'est abaissée progressivement,

la longueur du rayon a diminué de plus en plus; et, conformément à l'un des principes généraux de la mécanique, le mouvement de rotation est devenu plus rapide. Or M. de Laplace a conclu de la théorie des inégalités du mouvement lunaire, et des observations anciennes, que la durée du jour n'a pas changé, depuis Hipparque, de la centième partie d'une seconde centésimale. Il s'agissait d'examiner comment ce résultat s'accorde avec les conséquences que la théorie analytique de la chaleur nous fournit aujourd'hui.

Pour que la vîtesse de rotation d'un globe de verre de même dimension que la terre augmentât d'un cinquante-millième de sa valeur, il faudrait que la température supposée commune à tous ses points fût diminuée d'un degré centésimal. Or il est manifeste que, durant le refroidissement d'une sphère d'une aussi grande dimension, la diminution de la température pendant un instant n'est pas la même pour tous les points : les parties les plus voisines de la surface perdent plus facilement leur chaleur. Pour connaître les changemens de dimension de la sphère dans un temps donné, il faut donc considérer la loi suivant laquelle la chaleur est distribuée dans une sphère qui se refroidit. C'est par-là que la recherche des changemens de dimension du globe se trouve liée à la théorie analytique de la chaleur. M. Fourier a donné les équations fondamentales de cette théorie, et il a établi la loi du décroissement des températures dans une sphère qui aurait été échauffée par son immersion dans un milieu et qui se refroidirait dans un autre milieu. Nous ne faisons qu'indiquer la nature de ces questions, parce que cette matière est trop étendue pour que l'on puisse en rappeler ici les principes. Nous aurons d'autres occasions de traiter ce sujet dans la suite de ces extraits. On se bornera à donner le résultat principal de l'analyse de M. de Laplace. Il consiste en ce que l'effet de la perte de chaleur du globe terrestre supposé

homogène n'a pas fait varier la durée du jour, depuis Hipparque, de la deux-centième partie d'une seconde centésimale, et que la densité croissante des couches rend cet effet encore moins sensible.

Dans le livre XII, l'auteur traite de l'attraction des sphères et des conditions de l'équilibre ou du mouvement des fluides aériformes; il examine les effets de la force répulsive de la chaleur, et analyse toutes les causes mécaniques qui maintiennent l'équilibre intérieur des différens corps. Les élémens de la chaleur se repoussent entre eux, et ils sont attirés par les élémens des corps. Toutes ces molécules des corps ont une chaleur propre, et elles s'attirent mutuellement. Chacune d'elles est soumise à différentes forces attractives ou répulsives. En distinguant ces forces, et considérant toutes les actions mutuelles comme n'ayant d'effets sensibles qu'à des distances extrêmement petites, on trouve que l'équilibre des substances aériformes est assujetti aux deux lois connues; savoir, celle de Mariotte et celle que MM. Gay-Lussac et Dalton ont démontrée. Chaque molécule d'un gaz est le centre d'une infinité de rayons qui se portent dans tous les sens: c'est l'intensité de ce rayonnement qui est la mesure exacte de la température, et il est déterminé par la force répulsive de la chaleur des molécules voisines. Dans l'état solide, l'attraction des molécules dépend de la situation respective et de la figure de ces molécules: cette attraction, équivalente à l'action des forces répulsives, devient plus grande que leur action si l'on augmente extrêmement peu la distance des molécules, et elle devient plus petite si l'on diminue la distance; c'est ce qui constitue l'équilibre stable. Dans l'état liquide, l'attraction ne dépend point de la figure des molécules et de leur disposition respective; le volume total est conservé. Dans l'état aériforme tel que nous l'observons, les molécules sont placées à une telle distance, que leur attraction est sans effet sensible. Il

ne subsiste que l'action répulsive, qui tend à augmenter le volume, et qui l'augmenterait en effet si la masse n'était point retenue par des pressions extérieures. Dans cet état, les deux lois que nous avons citées subsistent; cela n'aurait point lieu pour un gaz extrêmement comprimé. Ce dernier état est celui que M. Cagniard de la Tour a observé dans les belles expériences qu'il a communiquées à l'Académie.

La même analyse explique les propriétés que l'on observe dans le mélange de diverses substances aériformes.

La chaleur dont on a considéré ici l'action capillaire est celle que l'on a nommée *libre* ou *thermométrique*, pour la distinguer de la chaleur latente, qui entre, pour ainsi dire, dans la composition des corps, et ne contribue point à l'augmentation de la température.

La question qui a pour objet de déterminer la vîtesse du son dans l'air, appartient à la théorie dont nous venons d'indiquer les résultats principaux. Cette question n'a pu être qu'imparfaitement résolue avant que les observations nous eussent fait connaître que la compression de l'air développe une chaleur très-sensible, et l'on trouve en cela un exemple frappant de la dépendance mutuelle des diverses parties des sciences. En introduisant cette nouvelle condition, c'est-à-dire, en exprimant dans le calcul l'augmentation de température due à la compression instantanée de l'air, M. de Laplace a complété la solution de cette question. Il était nécessaire, pour appliquer cette solution, de déduire de l'observation le rapport de la capacité de chaleur de l'air sous une pression constante à la capacité de chaleur de l'air sous un volume constant. On a eu recours pour cela à des expériences très-ingénieuses de MM. Clément et Desormes, et à celles que MM. Gay-Lussac et Welter ont faites récemment, et qui déterminent ce rapport avec un nouveau degré de précision. Cette quantité étant connue, M. de Laplace a déduit de son

analyse la valeur de la vîtesse, et il a trouvé un résultat qui ne diffère pas sensiblement de celui que l'on a obtenu par l'observation directe de la vîtesse du son.

M. Poisson a publié, dans le cours de l'année 1822, des mémoires très-importans, soit pour les progrès des théories analytiques, soit pour l'application de ces théories aux questions relatives à la distribution de la chaleur dans les corps solides.

Ces mémoires sont insérés dans la collection des cahiers de l'École polytechnique, et il en a été donné divers extraits dans les *Annales de chimie et de physique* et dans le *Bulletin des sciences de la Société philomathique.*

M. Cauchy a présenté à l'Acaédmie, dans le cours de l'année 1822, divers mémoires d'analyse dont nous allons indiquer l'objet. Le premier, présenté dans la séance du 16 septembre 1822, a pour objet l'intégration des équations linéaires aux différences partielles et à coefficiens constans avec un dernier terme variable. L'auteur annonce que ce mémoire est le développement de celui qu'il avait présenté sur le même sujet en 1821, et que la méthode d'intégration est fondée sur l'emploi des théorèmes donnés par M. Fourier dans ses Mémoires sur la chaleur.

M. Cauchy établit, 1.° une formule à l'aide de laquelle on peut exprimer par des intégrales doubles les racines d'une équation quelconque algébrique ou transcendante; 2.° plusieurs formules nouvelles, dont l'une sert à simplifier dans un grand nombre de cas l'intégrale générale de l'équation linéaire ci-dessus mentionnée, en réduisant à une intégrale définie, simple ou double, une intégrale multiple prise par rapport à chaque variable entre des limites infinies, et dans laquelle la fonction sous le signe d'intégrale est le produit de cosinus

d'angles proportionnels à ces mêmes variables par une fonction de la somme de leurs carrés.

Lorsque l'équation linéaire proposée est l'une de celles que fournissent les théories de la chaleur, du son, des plaques vibrantes, &c., l'intégrale donnée par M. Cauchy se change dans les intégrales connues de ces mêmes équations.

M. Cauchy a communiqué, dans la même séance du 16 septembre, ses recherches sur les intégrales définies qui renferment des exponentielles imaginaires. L'auteur a été conduit à plusieurs formules nouvelles, dont l'une sert à remplacer une fonction quelconque d'une variable par une intégrale définie dans laquelle il n'entre plus qu'une fonction rationnelle de cette variable dont le dénominateur est du premier degré.

M. Cauchy a communiqué, dans la séance du 28 octobre 1822, un nouveau mémoire sur les intégrales définies, qui a pour objet de fixer la nature des constantes arbitraires et des fonctions arbitraires que peuvent comporter les valeurs de ces mêmes intégrales, quand elles deviennent indéterminées. Dans ce mémoire, l'auteur développe la théorie des *intégrales définies singulières*, qu'il avait déjà considérées en 1814 dans un mémoire approuvé par l'Académie, et dont il s'était servi pour déterminer *à priori* la différence entre les deux valeurs que peut offrir une intégrale double, suivant l'ordre dans lequel s'effectuent les deux intégrations. L'auteur applique la même théorie aux intégrales simples dans lesquelles la fonction sous le signe d'intégrale passe par l'infini. Après avoir remarqué que ces intégrales sont en général indéterminées, il fixe le nombre et la nature des constantes arbitraires qu'elles comportent. Enfin il fait voir comment on peut transformer une intégrale définie indéterminée en une autre qui soit complétement déterminée, et de plus équivalente à l'une quelconque des valeurs de la première. Plusieurs des formules

que M. Cauchy présente dans ce nouveau mémoire, coïncident avec celles qu'il a données dans le mémoire déjà cité. L'une de ces formules présente une expression remarquable de l'intégrale du produit d'une fonction d'une variable par la différentielle de cette variable, l'intégration devant avoir lieu entre des limites infinies. Cette seule formule suffit pour évaluer un grand nombre de nouvelles intégrales définies, en même temps qu'elle fournit plusieurs de celles qui étaient déjà connues.

M. Cauchy a présenté, dans la séance du 30 septembre 1822, un mémoire contenant des recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. L'auteur se proposant de donner l'application de ses formules à la théorie des plaques ou des lames élastiques, nous ferons connaître plus en détail l'objet de ces nouvelles recherches analytiques sur la théorie de l'élasticité, lorsque le second mémoire aura été présenté. Nous remarquerons que l'auteur cite MM. Navier et Fresnel comme ayant déjà traité des questions du même genre. Le premier de ces géomètres, connu par divers mémoires approuvés de l'Académie et par des recherches analytiques sur des questions de la théorie des probabilités, a donné, en 1820 et 1821, deux mémoires sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques. M. Fresnel a été conduit par ses recherches sur les théories optiques à examiner les propriétés des mouvemens vibratoires qui s'accomplissent dans l'intérieur des corps élastiques. On trouve dans le *Bulletin des sciences de la Société philomathique* un extrait du mémoire de M. Cauchy et des observations communiquées par M. Navier.

La solution des questions fondamentales de la théorie de la chaleur est déduite d'une méthode analytique que M. Fourier a donnée dans ses mémoires lus et déposés à l'Académie vers la fin de l'année 1807 et dans le mois d'octobre 1811. Cette même

méthode s'applique à un grand nombre de questions physiques dont les conditions sont représentées par des équations aux différences partielles. Une des plus remarquables est celle des vibrations des lames ou des surfaces élastiques. M. Delambre a présenté, comme il suit, dans l'analyse des travaux de l'Académie, l'extrait du mémoire de M. Fourier sur les vibrations des surfaces flexibles tendues, et des lames ou des plaques élastiques :

L'auteur du mémoire remarque que l'application de l'analyse mathématique à l'étude des phénomènes naturels se compose de deux parties distinctes. La première consiste à exprimer par le calcul toutes les conditions physiques de la question; la seconde consiste à intégrer les équations différentielles auxquelles on est parvenu, et à déduire de ces intégrales la connaissance complète du phénomène que l'on considère: son mémoire appartient à cette seconde branche de l'application de l'analyse. On n'avait point encore obtenu les intégrales générales de ces équations, c'est-à-dire, celles qui contiennent en termes finis autant de fonctions entièrement arbitraires que le comportent l'ordre et la nature des équations différentielles; il s'est proposé surtout de découvrir ces intégrales générales sous une forme propre à faire connaître clairement la marche et les lois des phénomènes. On ne connaissait point encore, il y a quelques années, l'équation différentielle du mouvement des surfaces élastiques, lorsque l'Institut appela sur cette question l'attention des géomètres. On forma alors cette équation, qui est du quatrième ordre, et diffère totalement de celle des surfaces flexibles; mais il était nécessaire d'intégrer cette dernière équation et celle des lames élastiques. L'objet principal du mémoire est de prouver que les intégrales générales de ces équations sont exprimées par des intégrales définies au moyen des théorèmes que l'auteur a donnés précédemment dans ses recherches sur la chaleur.

Si l'on considère que les mêmes théorèmes servent à déterminer les lois de la propagation de la chaleur dans la matière solide, les oscillations des fils et des surfaces flexibles ou élastiques, et le mouvement des ondes à la surface des liquides, on reconnaît l'utilité et l'étendue de cette nouvelle méthode d'analyse.

Ici l'auteur donne les intégrales générales des surfaces vibrantes dont les dimensions sont infinies. L'intégrale de l'équation des lames élastiques, développée en une suite ordonnée selon les puissances de la variable, peut être sommée : mais l'expression à laquelle conduit ce procédé, ne pourrait servir pour la résolution de la question physique ; elle présenterait sous une forme extrêmement compliquée une fonction qui est très-simple en elle-même.

Soit que l'on rende sensibles à la vue les agitations des corps sonores, soit qu'on mesure la durée des vibrations par les valeurs comparatives des sons produits, les résultats observés coïncident toujours avec ceux qui dérivent des valeurs particulières ; et ces mêmes rapports sont confirmés aujourd'hui par l'examen des intégrales générales.

Si les deux extrémités d'une lame élastique sont appuyées sur des obstacles fixes, le mouvement se composera d'une multitude de vibrations isochrones, qui concourent sans se troubler : mais les rapports ne seront pas les mêmes que pour les cordes flexibles ; on n'entendra point l'octave, la douzième et la dix-septième : cette résonance n'est donc point un fait général qui serve de fondement aux lois de l'harmonie. Suivant les suppositions qu'on fera et les fonctions arbitraires qu'on introduira dans le calcul, on pourra supprimer à l'origine un grand nombre de sons partiels : ainsi, dans un cas dont l'auteur expose toutes les circonstances, le son subordonné le moins aigu sera à la triple octave de la seconde majeure du son principal, intervalle que l'on regarde comme

dissonant; les sons supérieurs seront entièrement inappréciables.

S'il s'agit d'une surface flexible tendue, de figure rectangulaire, et dont les extrémités soient fixées, le mouvement se décomposera en une multitude de mouvemens partiels dont chacun est exprimé par une intégrale particulière; les coefficiens des différens termes sont des intégrales définies faciles à obtenir, les séries seront convergentes. Les sons subordonnés n'ont, en général, aucun rapport commensurable : ces sons diffèrent totalement de ceux que font entendre la surface élastique et le monocorde. Dans le cas d'une seule dimension, le corps flexible est sonore, l'harmonie est pure et complète : dès qu'on ajoute une seconde dimension, toute harmonie cesse; on n'a plus qu'un mélange confus de sons assez peu distans les uns des autres, et dont il est impossible de discerner les rapports.

Si la surface est élastique, l'équation, au lieu d'être du second ordre, est du quatrième. Les sons subordonnés seront entre eux et avec le son principal comme nombre à nombre; et c'est pour cette raison que les surfaces élastiques rendent des sons harmonieux. Si l'on fait entrer dans le calcul les forces retardatrices constantes, le ton demeure sensiblement le même; mais le son s'affaiblit, le mouvement cesse, ou plutôt il passe et se propage dans les corps voisins. L'action de ces forces détruit rapidement l'effet accidentel de la disposition initiale, et ne laisse subsister quelque temps que l'effet de l'élasticité propre et de la figure du corps sonore.

Si la surface élastique, d'une épaisseur très-petite, a ses autres dimensions infinies, le mouvement se propagera rapidement dans toute l'étendue de la surface; il se formera des plis et des sillons annulaires, qui s'éloigneront de l'origine du mouvement. La question sera d'exprimer dans une seule formule tous les états variables de la surface, en sorte que

l'on puisse connaître exactement sa figure dans un instant quelconque. Cette équation contient, sous le double signe d'intégration définie, deux variables auxiliaires avec les trois variables principales.

La quantité sous le signe est le produit de deux facteurs, dont l'un est une fonction arbitraire donnée par l'état initial; le second est une fonction trigonométrique qui ne renferme rien d'arbitraire. Cette composition de l'intégrale est très-digne de remarque, parce qu'un grand nombre de questions physiques conduisent à des expressions de la même forme. L'analyse sépare les deux parties du phénomène, dont l'une est accidentelle et l'autre constante. La première doit être regardée comme arbitraire et fortuite; elle varie d'un cas à l'autre; l'effet nécessaire du temps est de la diminuer ou de la détruire: mais la seconde est due au seul principe de l'élasticité, qui se conserve pendant toute la durée du mouvement, et ne peut dépendre de la figure initiale. L'état final auquel le système parvient nécessairement est très-simple; il est représenté par la fonction trigonométrique dont nous avons parlé. Cette conséquence ne convient pas seulement à la question actuelle; elle s'applique à des phénomènes très-divers, dont les conditions sont exprimées par des intégrales de même forme.

L'auteur passe aux lois du mouvement de la surface élastique, telles que les donne son intégrale. Une certaine partie de la surface étant d'abord forcée par un obstacle extérieur à s'écarter de la situation d'équilibre, le mouvement commence aussitôt que l'obstacle a disparu. Les parties qui n'avaient point été écartées du plan d'équilibre, ne tardent point à participer à ce mouvement oscillatoire qui se propage tout-à-coup au-delà des limites du déplacement initial. On peut alors distinguer dans la table élastique trois parties différentes: l'une, très-voisine de l'origine, a déjà cessé d'osciller;

l'autre, qui en est très-éloignée, n'a reçu encore aucune agitation sensible; la seconde, qui est intermédiaire, est sujette à un mouvement devenu régulier et indépendant de l'état initial.

Les anneaux concentriques qui se sont formés, passent alternativement au-dessus et au-dessous du plan d'équilibre, et en même temps ils s'éloignent, s'élargissent et s'abaissent. La vîtesse du sommet de chaque anneau est en raison inverse du carré du temps écoulé depuis l'origine du mouvement. La distance d'un sommet au sommet voisin est proportionnelle à cette racine carrée; la profondeur ou positive ou négative de chaque sillon décroît en raison inverse du temps écoulé.

L'auteur indique ici d'autres mouvemens, dont on ne pourrait donner une idée exacte sans l'emploi des formules analytiques. Dans la question qu'il vient de traiter, il n'a fait abstraction d'aucune des causes qui influent sur le mouvement. L'analyse représente à-la-fois les forces qui déterminent les premières agitations et celles qui diminuent de plus en plus l'intensité jusqu'à ce qu'elles les aient rendues tout-à-fait insensibles. Elle montre comment le mouvement initial, en se propageant dans les parties les plus éloignées, se dissipe et cesse bientôt de pouvoir être observé. Le même résultat a lieu dans les mouvemens apparens des cordes sonores. Cet effet est comparable à celui de la diffusion de la chaleur dans la matière solide.

« Nous terminons ici, dit l'auteur, l'exposé de nos re-
» cherches sur les mouvemens des surfaces élastiques : elles
» fournissent de nouvelles preuves de l'étendue de l'analyse
» mathématique, dont le principal objet est l'interprétation
» des phénomènes naturels. Cette science exprime par des
» formes simples les effets naturels les plus composés; elle
» nous présente ceux qui subsistent loin de nous, à des

» distances immenses, et ceux qui ne s'accompliront que dans » l'avenir, ou qui nous ont précédés de plusieurs siècles; elle » détermine les lois générales et simples qui règlent tous les » mouvemens de la chaleur ou les oscillations harmoniques » des corps sonores, et nous fait découvrir entre les phéno- » mènes des analogies secrètes qui semblaient devoir échapper » à toutes nos expériences. Cette science est, en quelque » sorte, destinée à suppléer à nos instrumens et à nos sens; » elle ramène l'étude de la nature à un nombre limité d'ob- » servations primordiales, qui ont pour objet de mesurer les » dimensions ou les qualités spécifiques des corps. »

MÉCANIQUE.

M. Girard a traité des questions fort importantes concernant la résistance de la fonte de fer, et l'emploi de cette matière dans les travaux de conduite ou les chaudières des machines à vapeur.

On a eu occasion, dans le courant de l'année dernière, de réparer la machine hydraulique du pont Notre-Dame, et l'on a substitué à l'arbre en bois de la grande roue un arbre en fonte de fer. Une plus grande légèreté, avec plus de résistance sans aucune chance probable de dépérissement, est un avantage incontestable de cette substitution. La fonte de fer peut recevoir, au gré de l'industrie qui la met en œuvre, la même forme que la nature donne aux corps pour les rendre capables d'une résistance déterminée avec la moindre quantité possible de matière résistante. Ainsi l'on peut, sans la moindre difficulté d'exécution, donner aux diverses pièces mobiles d'une machine en fonte la figure de tuyaux creux, telle que la nature l'a donnée aux os des animaux et aux tiges de certaines plantes. M. Girard a déduit des formules connues de la résistance des solides le rapport qui doit exister entre le

diamètre intérieur et le diamètre extérieur d'un cylindre creux, pour que, dans des circonstances données, ce cylindre soit en même temps doué de la plus grande légèreté et capable de la plus grande résistance. Mais il faut, pour mettre à profit cette utile théorie, que l'expérience apprenne quelle est la ténacité de la fonte, dans le sens des différens objets auxquels elle peut être soumise. Jusqu'à présent on s'est peu occupé en France de cette recherche; les Anglais, qui depuis long-temps appliquent la fonte à une multitude d'usages, nous ont devancés sur ce point. L'auteur du mémoire cite les expériences sur la résistance de la fonte qui ont été faites par MM. Samuel Bronn et George Rennie : il détermine, d'après ces expériences, et la théorie de la résistance des cylindres creux, l'épaisseur que doit avoir un tuyau de fonte pour soutenir une charge d'eau déterminée; question importante, dont on n'avait point donné jusqu'à présent de solution rigoureuse : cette solution s'applique aux chaudières cylindriques des machines à vapeur. On trouve qu'une de ces chaudières en fonte de fer, de 50 centimètres de rayon et de 34 millimètres d'épaisseur, pourrait résister, avant de se rompre, à l'action de la vapeur d'eau dont elle serait remplie, la tension de cette vapeur étant supposée équivalente au poids de soixante-sept atmosphères. Dans les machines ordinaires de Woolf, telles qu'on les exécute en France, la tension de la vapeur s'élève rarement au-dessus de quatre ou cinq atmosphères; on donne d'ailleurs aux chaudières d'un mètre de diamètre une épaisseur de 30 à 35 millimètres : ainsi l'on voit qu'à moins de très-grandes imperfections de fabrication dans la fonte de ces chaudières, on n'a point à craindre qu'elles se rompent par l'action du fluide élastique qu'elles renferment.

M. Girard, rappelant à cette occasion l'économie de combustible que présente l'usage des machines à vapeur à pression moyenne de Woolf, explique par cette économie l'empresse-

ment avec lequel elles ont été adoptées depuis 1815 dans nos villes manufacturières. Mais l'emploi de ces précieuses machines exige que l'on prenne des précautions suffisantes pour garantir la manufacture et les établissemens voisins des accidens que pourrait occasionner l'incurie ou l'inexpérience. Les avantages propres à ces machines, et les précautions qu'elles nécessitent, ont fixé l'attention de l'Académie. Après avoir entendu la lecture du mémoire de M. Girard, elle a chargé une commission spéciale, composée de MM. de Laplace, Gay-Lussac, Ampère, Girard et Dupin, de lui faire un rapport sur cet important objet.

M. Dupin a fait, au nom de la section de mécanique, un rapport sur la construction des voitures et les diverses causes qui peuvent les rendre sujettes à verser; nous insérons dans cette analyse l'extrait du mémoire dont il s'agit. Nous ferons connaître de la même manière deux autres rapports rédigés par M. Dupin, et qui concernent aussi des questions d'un grand intérêt.

« Si les accidens fâcheux qui sont aujourd'hui l'objet de la sollicitude du Gouvernement, avaient pour seule cause la configuration des voitures publiques et le système de leur charge, rien ne serait plus simple que d'indiquer les moyens de donner à ces voitures une forme et des dimensions propres à rendre désormais tout versement impossible.

» Malheureusement il n'en est point ainsi. Une foule de causes concourent à rendre les voitures en mouvement ou plus stables, ou moins stables. Si l'on ne faisait entrer en considération qu'une partie de ces causes, on risquerait de tomber dans de graves erreurs, et d'y induire le public ainsi que l'autorité.

» La première chose qu'il convienne de faire, c'est l'examen même des conditions principales desquelles dépend la non-stabilité des voitures. »

Ces conditions exposées dans le rapport sont relatives à la stabilité des voitures considérées soit en repos, soit en mouvement, avec une vîtesse petite ou considérable, sur une route horizontale ou montante ou descendante, rectiligne ou curviligne dans le sens de sa longueur, plate ou creuse ou bombée dans le sens transversal. On n'avait pas encore examiné cette théorie de la stabilité des voitures d'une manière mathématique et complète : cette partie du travail de M. Dupin est peu susceptible d'analyse ; elle se trouvera dans la collection des Mémoires de l'Académie.

« Sans s'arrêter sur les mesures de répression qu'il est possible d'employer, et que la prévoyance du Gouvernement saura juger, on propose un moyen simple et efficace.

» Il faudrait que chaque versement des voitures publiques fût constaté par l'autorité locale, qui s'assurerait sur-le champ des causes de l'accident. Les procès-verbaux de ce genre seraient adressés par le préfet de chaque département au ministère de l'intérieur. A la fin de chaque année, un tableau général des versemens arrivés dans les douze mois précédens, avec le nom de l'entreprise et du conducteur, serait imprimé dans le journal officiel, placardé à la porte de toutes les postes royales, et imprimé dans le livre des postes. Le public apprendrait par-là le nom des entreprises où les versemens sont le plus rares. Cette connaissance donnerait bientôt la préférence aux entrepreneurs les plus sages et les plus habiles. Alors une émulation pour ne pas verser les voyageurs remplacerait chez les entrepreneurs de diligences l'émulation avec laquelle ils semblent aujourd'hui charger leurs voitures de manière à les verser le plus possible. »

L'auteur indique ensuite les moyens par lesquels on peut rendre les routes plus favorables à la stabilité des voitures.

« En résumé, lorsqu'on rendra les routes plus unies par un pavage et un empierrement plus parfaits, moins bombées

à leur milieu, moins inclinées sur les côtés, moins courbées dans leurs tournans, alors le degré de stabilité nécessaire aux voitures publiques pour qu'elles ne versent pas, sera beaucoup augmenté; en même temps on pourra donner aux transports la plus grande vîtesse possible, toutes choses égales d'ailleurs.

» Voyons maintenant ce qu'il est possible de faire pour assurer aux voitures le plus grand degré de stabilité d'après leur forme et le système de leur chargement.

» La stabilité des voitures à quatre roues est d'autant plus grande que les roues de droite sont plus éloignées de celles de gauche (cette distance est ce qu'on appelle *la voie*). Le *minimum* de la voie est fixé par l'ordonnance du 4 février 1820 à $1^m,62$ entre les jantes de la partie des roues portant sur terre, pour les roues de derrière, et à 2 centimètres de moins pour les roues de devant.

» Ainsi, le *minimum* de la voie étant seul fixé, les constructeurs de voitures peuvent augmenter cette voie autant que l'exigeront la structure et le système de chargement qu'ils adopteront.

» La même ordonnance fixe le poids total que chaque diligence peut porter à raison de 25 kilogrammes (1) par voyageur. Mais cette limite est presque toujours dépassée; elle l'est parfois au-delà de toute proportion.

» La même ordonnance fixe à 40 centimètres (2) la hauteur des effets placés sur l'impériale des voitures.

» Ici l'on a sans doute agi d'après les vrais principes de la mécanique, dans la vue d'empêcher les entrepreneurs des voitures de trop élever les centres de gravité et d'oscillation. Malheureusement la mesure adoptée n'est pas la plus propre à atteindre le but qu'on s'est proposé.

---

(1) A 10 kilogrammes pour les voitures à deux roues.

(2) A $0^m,27$ pour les voitures à deux roues.

» La règle qui fixe la hauteur des paquets au-dessus de l'impériale (et qui n'est pas plus exécutée que les autres) ne statue rien sur la hauteur de l'impériale elle-même, et, par conséquent, sur l'élévation du centre de gravité du système.

» Il importe extrêmement d'abaisser le plus possible la caisse des voitures, et avec elle tous les objets qu'elle doit contenir ou porter.

» Si l'autorité croit devoir intervenir dans la forme et les proportions qu'il convient de donner aux voitures publiques, il faut, pour chaque espèce de voitures, faire ce que font les officiers du génie maritime pour chaque vaisseau qu'ils construisent sur un nouveau plan : il faut déterminer la position du centre de gravité de la voiture, à vide et chargée ; il faut déterminer aussi le moment d'inertie du système par rapport aux axes du versement.

» Une table comparée de ces résultats et des stabilités dynamiques rapportées à une unité bien établie montrerait d'un coup d'œil quelles sont les voitures les moins versantes ; et à quel degré elles jouissent de cette qualité précieuse. Sans négliger aucune précaution, il faut encore hâter les progrès qu'il est naturel d'attendre du perfectionnement des arts mécaniques appliqués à la construction de nos voitures, lesquelles pourront devenir plus légères sans cesser d'être moins solides, plus hardies sans cesser d'être moins stables, à mesure que nos routes seront améliorées dans leur forme, dans leur structure et dans leur entretien ; à mesure que des réglemens efficaces auront produit leur effet. Voici ce que l'on propose dans la vue d'atteindre ce but :

» Le Gouvernement, s'il le jugeait convenable, ferait les frais d'un prix de 20,000 francs pour les voitures à quatre roues. Ce prix pourrait être décerné, le 1.er janvier 1825, au constructeur qui, sans négliger aucune des qualités desirables dans une voiture publique, la capacité, la commodité, la légèreté,

obtiendrait la plus grande stabilité pour transporter un nombre donné de voyageurs avec un poids déterminé de bagage. La bonté de ces voitures devrait être démontrée par une expérience d'au moins une année; les plans des voitures devraient être accompagnés d'un mémoire descriptif, contenant les calculs de stabilité et du mouvement d'inertie pris par rapport à l'axe du versement.

» On pourrait, dans un programme rédigé avec soin, indiquer aux praticiens, comme des faits qui serviraient de base à leurs tentatives, les vrais principes sur lesquels doivent reposer les proportions et la disposition des voitures et de leur chargement, pour acquérir la plus grande stabilité possible.

» Si l'on réfléchit sur les sommes considérables que doivent coûter des essais souvent infructueux tentés sur des constructions aussi dispendieuses que celles de nos grandes voitures publiques, on ne trouvera point trop élevées les sommes que nous proposons d'accorder à titre de récompense : on ne les trouvera pas trop élevées, si l'on songe à l'importance de leur objet qui se rattache à la vie, à la fortune des particuliers de toutes les classes, et à l'activité, au développement de la plupart des branches de notre industrie.

» Si l'on employait tous les moyens d'amélioration dont on vient de présenter l'idée, sans doute on n'obtiendrait pas encore un système de roulage dans lequel tout versement serait impossible; mais les accidens de cette nature deviendraient certainement beaucoup plus rares. Enfin, loin d'avoir acquis la sûreté du voyageur aux dépens de son activité, on aurait encore accéléré nos transports et nos voyages; objet, nous le répétons, d'une si haute importance, que jamais les particuliers ni l'état ne doivent le perdre de vue dans leurs projets d'utilité nationale ou particulière. »

Le second rapport, dont nous insérons l'extrait, concerne

les bateaux à vapeur et la marine militaire des États-Unis d'Amérique.

Son Excellence le Ministre de la marine et des colonies a desiré que l'Académie des sciences exprimât son jugement sur les mémoires dans lesquels M. Marestier rend compte des observations qu'il a faites, durant son voyage aux États-Unis d'Amérique, et de ses recherches sur l'emploi des bateaux à vapeur.

L'Académie a nommé, pour examiner ce travail, une commission composée de MM. Sané, Biot, Poisson, et Charles Dupin, rapporteur.

La première partie du rapport présente l'origine et les progrès de l'art qui consiste à appliquer à la navigation la force motrice de la vapeur.

« Dans plusieurs états de l'Union, le charbon fossile se trouve en abondance. En certains endroits, les bateaux qui transportent les voyageurs et les produits de l'industrie passent au voisinage des mines qui doivent leur fournir la force motrice; à défaut de ce combustible, les rives des plus beaux fleuves présentent d'immenses forêts, dont les bois sont, pour ainsi dire, sans autre valeur que le prix de leur exploitation.

» Sans doute, l'Europe ne saurait présenter au même degré toutes ces facilités et tous ces avantages. La navigation par la vapeur ne produira point dans l'ancien monde des changemens aussi rapides, aussi importans, que dans le nouveau, parce que déjà les nations européennes possèdent une foule de moyens de transport qui manquent à l'Amérique. Mais, dans beaucoup de circonstances et dans beaucoup de localités, le nouveau système de transport aura des avantages assez marqués, assez nombreux, pour mériter que l'on cherche à les perfectionner de plus en plus par la théorie appliquée à l'expérience, et l'ingénieur par la pratique assistée de la théorie.

« Tels sont les motifs qui doivent faire prendre aux travaux de M. Marestier tout l'intérêt qui s'attache à des recherches dont les résultats sont d'une grande utilité publique. »

Ici M. Dupin analyse la partie de l'ouvrage de M. Marestier qui fait connaître les dimensions et la structure des bateaux à vapeur.

Il expose ensuite l'ensemble des résultats mathématiques auxquels l'auteur est parvenu, et il le suit dans les descriptions des bateaux à vapeur exécutés en Amérique.

Le rapport fait ensuite connaître l'objet du second mémoire de M. Marestier : ce mémoire concerne la marine militaire des Américains; il contient la description et l'examen des frégates à vapeur, et des détails fort importans relatifs aux arts nautiques.

La conclusion suivante, que nous rapportons textuellement, exprime l'opinion que l'Académie s'est formée du travail de M. Marestier :

« Tel est l'ensemble des sujets que l'auteur a traités dans » ses deux mémoires. Il fallait beaucoup de sagacité et de » talent d'observation pour en recueillir les matériaux. Ces » matériaux sont mis en œuvre avec une concision toute » géométrique. L'ouvrage que nous venons d'examiner pré» sente toutes les données utiles que l'auteur a pu recueillir, » toutes les conséquences qu'un esprit juste et calculateur » pouvait en déduire, et rien au-delà. Cette sagesse est un » des caractères les plus remarquables du travail étendu que » nous venons d'examiner. On y trouve le fruit de cet esprit » mathématique propagé par l'enseignement de l'École poly» technique. Il est honorable pour l'enseignement de cette » école, de former des élèves qui, mûris par l'expérience, » puissent autant voir, et sur-tout bien voir, en observant » tous les élémens qu'il importait de recueillir pour arriver » à des conséquences démontrées, et pour mettre les ingé-

» nieurs en état d'exécuter, d'après les bases dont on leur
» a donné le degré d'exactitude, les travaux neufs et diffi-
» ciles qu'exige d'eux l'architecture navale appliquée à la
» navigation par la vapeur.

» Par l'importance du sujet, par la manière habile dont il
» est traité, par les difficultés d'observation qu'il a dû présen-
» ter, et par les conséquences auxquelles l'auteur est arrivé,
» ses travaux nous paraissent dignes d'occuper un rang très-
» distingué dans l'estime des gens de l'art et des savans : ils font
» honneur au corps du génie maritime, qui possède un tel ingé-
» nieur ; ils font honneur au ministère de la marine, qui a su
» distinguer le vrai mérite, et lui donner une occasion mar-
» quante de se montrer dans un grand jour, et d'ajouter encore
» aux premiers services qui déjà l'avaient fait connaître.

» Lorsque M. Marestier aura retranché quelques devis et
» quelques détails techniques qu'il était important de re-
» cueillir, mais qui seront utiles seulement au portefeuille
» des ingénieurs, nous pensons que son ouvrage sera très-
» digne de l'impression, et rendra des services signalés à la
» nouvelle branche d'industrie maritime qui chez nous est en-
» core si peu avancée. Si la nature spéciale des matières que
» l'auteur a traitées rend onéreuse et difficile une telle entre-
» prise, il est de la munificence de l'autorité publique d'aider
» à cette impression, comme elle l'a fait pour la publication
» de plusieurs autres voyages. Enfin nous pensons que l'Aca-
» démie doit accorder son approbation aux deux mémoires
» de M. Marestier. Nous lui proposons de déclarer qu'ils sont
» dignes de faire partie de la collection des savans étrangers,
» pour y être insérés, dans le cas où le Gouvernement ne
» trouverait pas d'autre moyen plus favorable pour en faire
» jouir notre marine militaire et marchande. »

L'Académie a considéré comme un objet digne de la plus

haute attention l'examen des questions relatives à l'usage des diverses sortes de machines à vapeur, à leurs avantages respectifs provenant de l'augmentation de la force motrice ou de l'économie du combustible, aux accidens que peut causer l'explosion des enveloppes qui contiennent la vapeur échauffée. Une commission a présenté un rapport très-étendu sur cette matière, et plusieurs séances de l'Académie ont été consacrées à cette importante discussion. L'extrait suivant du rapport fait au nom de la commission par M. Charles Dupin présente le résumé des recherches les plus attentives et les précautions qu'il a paru convenable de proposer :

« L'emploi des machines à pression élevée est plus avantageux que celui des machines à basse pression,

» 1.° Parce qu'il exige des emplacemens d'autant moins grands que la compression de la vapeur est plus considérable ;

» 2.° Parce qu'il produit la même force que des machines à simple pression, avec une moindre quantité de combustible.

» L'emploi des machines à pression élevée est regardé comme plus dangereux que celui des machines à pression simple.

» On peut construire des machines où les explosions soient, sinon impossibles, du moins extrêmement rares ; des machines où les explosions ont été sans exemple jusqu'à ce jour dans l'emploi qu'on en a fait en France.

» De ce nombre sont les machines à pression moyenne, de trois à quatre atmosphères, construites en France sur le système de Woolf perfectionné par Edwards, en employant des chaudières et des cylindres qui puissent résister à une pression quatre ou cinq fois plus forte que celle à laquelle ils sont soumis ordinairement.

» De ce nombre sont encore les machines à haute pression, de dix atmosphères, exécutées sur le système d'Olivier Evans,

aux États-Unis d'Amérique, en employant des chaudières assez fortes pour résister à une pression dix fois plus grande que celle qu'ils doivent supporter ordinairement.

» Mais des machines construites avec moins de soins, ou manœuvrées avec plus d'imprudence, ont subi des accidens graves, sur-tout en Angleterre.

» En France, il n'y a qu'un seul accident qui ait coûté la vie à quelques personnes; savoir, à deux ouvriers attachés au service de la machine.

» En France, le dommage causé par l'explosion d'une machine à vapeur ne s'est jamais étendu hors du local où la machine était établie : ainsi il n'est point arrivé parmi nous qu'aucun propriétaire voisin ait souffert par l'explosion des machines à vapeur. Il n'a point paru nécessaire de prescrire aucune distance de ces machines aux endroits habités. A ce sujet on fait observer qu'il suffirait d'assujettir à cette condition d'une distance déterminée les machines établies dans les villes, pour y proscrire par le fait l'usage des machines à moyenne et à haute pression.

» Cependant, si ces explosions n'ont produit encore aucun accident, ou aucun dommage aux propriétaires voisins, il n'est point prouvé qu'elles ne peuvent pas en produire par la suite. Or la seule appréhension d'un danger est un dommage réel causé par l'établissement d'une machine de ce genre dans le voisinage d'une habitation.

» Ce motif exige que l'on multiplie les précautions pour éloigner de plus en plus la crainte du péril. C'est dans cette vue que l'on a proposé les mesures de précaution suivantes:

» 1.° Deux soupapes de sûreté seront adaptées à la chaudière des machines à vapeur. L'une de ces soupapes sera placée de manière à être hors de l'atteinte de l'ouvrier qui dirige le chauffage et le jeu de la machine; l'autre devra rester à sa disposition, pour qu'il puisse au besoin diminuer

la pression de cette soupape. Et ce serait inutilement qu'il augmenterait cette pression, puisque la soupape à laquelle il ne peut atteindre ouvrirait passage à la vapeur, à une limite inférieure.

» 2.° On propose d'éprouver, au moyen de la presse hydraulique, la force de toutes les chaudières, en faisant supporter à ces chaudières une pression quatre à cinq fois plus grande que celle à laquelle elles sont soumises dans le jeu ordinaire de la machine. On se bornera à cette épreuve, tant que la pression sera comprise entre deux et quatre atmosphères; au-delà de ce terme, le rapport de la pression d'épreuve à la pression ordinaire sera le même que le rapport de cette dernière pression à celle de l'atmosphère.

» 3.° Nous proposons que chaque fabricant de machines à vapeur soit tenu de faire connaître ses moyens d'épreuve et tout ce qui peut garantir la solidité et la sûreté de sa machine, sur-tout de la chaudière et de ses appendices. Le fabricant doit faire connaître à l'autorité, ainsi qu'au public, la pression ordinaire à laquelle doivent jouer ses machines, cette pression étant évaluée en unités d'atmosphère ou en kilogrammes par centimètre carré de surface exposée à la pression de la vapeur.

» Aux précautions que nous venons d'indiquer, l'Académie a jugé convenable d'en ajouter une dernière dont le but est d'écarter des propriétaires voisins jusqu'à l'apparence du danger.

» Ce moyen consiste à entourer d'un mur d'enceinte les chaudières de machines à vapeur qui se trouvent à proximité de quelque habitation, dans le cas où ces machines seraient d'une force suffisante pour qu'une explosion pût renverser le mur mitoyen qui sert de limite à cette habitation et à l'établissement où se trouve la machine à vapeur.

» L'Académie a pensé qu'on pouvait, dans tous les cas,

réduire à un mètre la distance du mur d'enceinte au mur mitoyen, à un mètre l'épaisseur du mur d'enceinte, et à un mètre la distance de ce mur à la chaudière.

» Pour les machines les moins fortes, on peut prendre de moindres précautions, soit en diminuant l'épaisseur du mur d'enceinte, soit même en le supprimant tout-à-fait. Mais il n'appartient qu'à des praticiens éclairés, également familiers avec la connaissance de la résistance de la maçonnerie et celle de la force des chaudières à vapeur, de donner un devis qui proportionne les précautions au danger.

» Enfin on croit devoir reproduire ici des observations sur la publicité, analogues à celles que l'Académie a adoptées dans la question de la stabilité des voitures.

» Si l'autorité publique fait tenir un état exact de tous les accidens arrivés aux machines à vapeur de chaque espèce, et publie cet état, en faisant mention des effets produits et des causes, du nom des manufactures où les accidens sont arrivés, du nom du fabricant de la machine, on aura pris le plus efficace de tous les moyens pour rendre rares les malheurs qui peuvent résulter de l'emploi des machines à vapeur à simple, à moyenne et à haute pression. »

Une commission formée de MM. Girard et Ampère avait été chargée de rendre compte de quelques expériences faites en Suède par M. Lagerhjelm, sur l'écoulement de l'air atmosphérique par des orifices pratiqués en mince paroi, et sur l'aspiration qui a lieu à la paroi d'un tuyau court contenant de l'air qui s'écoule sous des pressions déterminées. M. Girard a fait, au nom de cette commission, le rapport dont nous allons donner l'extrait.

Les expériences qui font l'objet du travail de M. Lagerhjelm ont été communiquées à l'Académie par M. Olivier, ancien élève de l'École polytechnique, résidant en Suède. Leur

objet n'est pas nouveau, et plusieurs physiciens s'en étaient déjà occupés : elles consistent à comprimer sous une cloche une certaine quantité d'air atmosphérique, et à opérer l'écoulement au moyen d'un tube qui passe de la partie supérieure de la cloche à l'extérieur de la cuve qui la contient. On observe la hauteur verticale dont cette cloche s'abaisse en un temps donné; et comme on connaît le diamètre de l'orifice par lequel l'air s'écoule, il est aisé d'en déterminer la vîtesse.

Les expériences dont il s'agit ont ce résultat commun, que la vîtesse de l'écoulement de l'eau et la vîtesse de l'écoulement de l'air par le même orifice et sous une même pression sont entre elles précisément dans le rapport inverse des pesanteurs spécifiques de ces deux fluides : d'où l'on conclut immédiatement qu'un fluide aériforme s'écoule par un orifice pratiqué en mince paroi, en suivant précisément les mêmes lois que suit un fluide incompressible qui s'écoule par un orifice semblable.

La contraction de la veine fluide à la sortie de l'orifice se manifeste également dans l'écoulement de l'eau et de l'air; ce qui prouve encore que leur écoulement uniforme est assujetti aux mêmes lois. M. Lagerhjelm ayant ensuite ajusté, au-dessous du tuyau horizontal par lequel l'air s'écoulait, un tube de verre vertical dont l'extrémité inférieure plongeait dans un vase rempli d'eau, et dont l'extrémité supérieure pouvait être introduite dans le tuyau d'écoulement avec plus ou moins de saillie sur la surface intérieure de la paroi de ce tuyau, il remarqua que dans toutes les positions de ce tube une partie de l'air qu'il contenait était entraînée par celui qui s'échappait de la cloche, de sorte qu'il s'élevait toujours une colonne d'eau dans le tube à une hauteur telle, que, son poids étant ajouté à la force élastique de l'air dilaté qui en occupait la partie supérieure, la pression de l'atmosphère sur l'eau du vase se trouvait exactement contre-balancée;

il remarqua enfin, et ceci est une observation nouvelle et importante, que la hauteur de la colonne d'eau aspirée ou soutenue dans le tube vertical était d'autant plus considérable que l'orifice supérieur de ce tube était plus rapproché de l'axe du tuyau d'écoulement : d'où il suit que les couches concentriques de l'air qui s'écoulait ainsi étaient animées de vîtesses inégales décroissantes, à partir du centre jusqu'à la paroi de ce tuyau.

PHYSIQUE.

M. Ampère, dans le cours de l'année 1821, a lu à l'Académie plusieurs mémoires relatifs aux phénomènes qu'il a nommés *électro-dynamiques.* Dans le premier de ces mémoires, présenté le 7 janvier, l'auteur annonçait le succès d'une expérience qui doit sur-tout intéresser les physiciens, parce qu'elle indique la nature de l'action exercée sur un aimant par un conducteur voltaïque. On venait de découvrir en Angleterre que cette action produit, dans certaines circonstances, un mouvement continu, en sorte que le conducteur tourne toujours dans le même sens autour d'un aimant, ou un aimant autour d'un conducteur; M. Ampère avait produit ce singulier mouvement en supprimant l'aimant et en remplaçant l'action qu'il exerce alors sur le conducteur, soit par celle d'un autre conducteur, soit par l'action qui émane du globe terrestre (1) : mais le premier auteur de ces expériences avait tenté inutilement de faire tourner un aimant autour de son axe par l'action d'un fil conducteur; il avait même essayé de prouver, par des raisons spécieuses, que cette dernière sorte de mouvement était impossible. M. Ampère,

(1) Le mémoire où M. Ampère a décrit les expériences par lesquelles il a établi l'existence et les lois de l'action de la terre sur un conducteur voltaïque, a été lu à l'Académie royale des sciences, le 30 octobre 1820.

en cherchant la cause de cette impossibilité dans la disposition de l'appareil dont M. Faraday s'était servi, s'assura qu'elle tenait uniquement à ce que la résultante de toutes les actions qu'exercent sur un aimant les diverses parties d'un circuit voltaïque complet, c'est-à-dire, dont les deux extrémités se réunissent dans la pile, n'a aucune action sur un aimant d'où il puisse résulter un mouvement continu de rotation autour de son axe; en sorte que, de quelque manière que l'on conçût ce circuit divisé en deux parties, l'une d'elles tend toujours à lui imprimer autour de son axe une rotation égale et opposée à celle que lui imprime l'autre partie du même circuit. Il était aisé de conclure de cette loi, qu'il suffit de détruire l'action d'une partie du circuit pour que l'aimant tourne autour de son axe par l'action de l'autre.

Or, lorsque tous les points matériels d'un système sont liés invariablement entre eux, l'action mutuelle de ces différens points ne peut, d'après un principe de dynamique qui ne souffre point d'exception, produire aucun mouvement dans le système; il fallait donc faire en sorte que l'aimant, ou une portion de fil conducteur, invariablement liée avec lui, fît partie du circuit, parce que, cette partie n'ayant plus d'action pour le faire tourner autour de son axe, celle du reste du circuit pour le faire tourner en sens contraire avec la même force n'est plus détruite, et détermine le mouvement. C'est ainsi que M. Ampère obtint ce mouvement, qu'on aurait continué de regarder comme impossible sans les considérations dont nous venons de parler.

M. Ampère termine ce mémoire par une observation qui s'applique également à tous les cas où l'action électro-dynamique produit un mouvement de rotation continu, soit dans un conducteur mobile, soit dans un aimant : cette observation a pour objet de signaler les caractères singuliers que présente alors la force dont les effets se manifestent lorsqu'on

fait agir l'un sur l'autre deux conducteurs voltaïques, ou un conducteur et un aimant. Il en conclut qu'elle ne peut pas être représentée par une simple fonction de la distance de deux particules matérielles entre lesquelles elle s'exerce, mais qu'il faut nécessairement admettre dans l'expression de cette force les angles qui déterminent la direction suivant laquelle le courant électrique traverse les deux particules.

Dès le commencement de ses recherches, M. Ampère s'était proposé de déterminer cette expression en se fondant uniquement sur les résultats d'expériences où l'on n'employait que des conducteurs voltaïques, afin qu'elle fût indépendante de toute hypothèse sur la nature des aimans, et il y était parvenu: mais la formule qu'il avait obtenue contenait deux constantes indéterminées dont il restait à trouver la valeur, pour que celle de la force fût complétement connue.

La première de ces constantes est l'exposant de la puissance de la distance de deux élémens de courans électriques, à laquelle leur action mutuelle est réciproquement proportionnelle, quand les angles qui déterminent les directions relatives de ces deux élémens restent les mêmes. La seconde est le rapport des actions exercées à une même distance par deux élémens parallèles dans les deux positions extrêmes où ils peuvent se trouver, selon qu'ils sont tous deux dirigés suivant la droite qui mesure leur distance, ou tous deux perpendiculaires à la même droite.

Dans le mémoire qu'il a lu à l'Académie le 10 juin, M. Ampère, après avoir donné à la valeur générale de l'action mutuelle de deux élémens de conducteurs voltaïques une forme qui facilite les calculs, rapporte d'abord une expérience par laquelle il s'est assuré qu'un conducteur circulaire n'a aucune action pour faire tourner autour de son axe un conducteur mobile de forme quelconque dont les deux extrémités sont dans cet axe, et par conséquent lorsque les deux

extrémités du conducteur mobile aboutissent à deux points extrêmement voisins : dans ce dernier cas, le conducteur forme un circuit presque fermé, et les effets produits sont les mêmes que si, ses deux extrémités se réunissant au même point, le conducteur formait un circuit complétement fermé. L'auteur déduit ensuite de cette expérience une relation entre les deux constantes, d'où il résulte que si la première, c'est-à-dire, la puissance de la distance à laquelle l'action est réciproquement proportionnelle quand cette distance varie seule, est égale au nombre 2, la valeur de l'autre constante est nécessairement $-\frac{1}{2}$. En substituant ces valeurs des deux constantes dans sa formule, M. Ampère trouve que l'action qu'il s'agit de déterminer est proportionnelle à la différentielle seconde de la racine carrée de la distance des deux élémens, prise en faisant varier successivement et alternativement les deux extrémités de cette distance dans les directions des deux élémens, et divisée par la même racine carrée, en observant que, quand cette différentielle seconde a une valeur positive, l'action est répulsive, et qu'elle est attractive dans le cas contraire.

M. Ampère lut à l'Académie, le 24 juin, un supplément à ce mémoire; il déduisait de l'expression mise sous la forme qu'il venait de lui donner, les deux conclusions suivantes:

1.° La résultante de toutes les actions exercées par un circuit fermé sur une portion finie ou infiniment petite d'un fil conducteur est toujours perpendiculaire à la direction de cette portion.

2.° Il y a répulsion entre toutes les parties d'un courant électrique rectiligne.

Cette dernière conséquence de sa formule a été vérifiée par une expérience qu'il a consignée dans un mémoire lu le 16 septembre à l'Académie et où se trouvent aussi annoncées deux autres expériences nouvelles : l'une sur la production du

courant électrique, dans un circuit métallique fermé, par l'influence d'un conducteur voltaïque placé très-près de ce circuit, mais sans communication avec lui; l'autre par laquelle il a constaté que non-seulement un conducteur circulaire formant une circonférence entière n'a aucune action pour faire tourner autour de son axe un conducteur fermé d'une forme quelconque, mais que la même propriété se retrouve dans un conducteur plié en arc de cercle, quel que soit le nombre des degrés de cet arc.

L'auteur examine ensuite dans ce mémoire toutes les circonstances du mouvement que produiraient sur des conducteurs, soit horizontaux, soit verticaux, des courans électriques situés dans le globe de la terre, allant de l'est à l'ouest, et d'autant plus intenses qu'ils seraient plus près de l'équateur magnétique, qu'on doit alors considérer comme une direction moyenne entre tous ces courans. Les résultats qu'il obtient sont conformes à ceux des nombreuses expériences qui ont été faites, les unes par lui, les autres par M. M. de la Rive, et qui ont pour objet de montrer l'action que la terre exerce sur les conducteurs voltaïques mobiles.

C'est ainsi que l'auteur de ces quatre mémoires a complété la théorie de l'action qu'il avait découverte entre deux conducteurs, et de l'action, qu'il a aussi observée le premier, entre le globe terrestre et un conducteur.

En effet, 1.° il a déterminé l'expression de la force élémentaire, et il suffit d'effectuer l'intégration dans chaque cas, d'après les circonstances qui le particularisent, pour avoir la valeur de l'action qu'exercent, dans ce cas, l'un sur l'autre deux conducteurs de forme quelconque.

2.° Il a montré que le globe terrestre agit sur un fil conducteur précisément comme le ferait un système de courans électriques disposés ainsi que nous l'avons dit plus haut.

Comme on ne peut savoir directement la loi suivant

laquelle ces courans doivent varier d'intensité à différentes latitudes magnétiques, s'ils sont plus énergiques près de la surface du globe ou à une grande profondeur, et quelles sont les causes locales qui doivent, en divers lieux, influer sur leur intensité et leur direction, on ne peut faire *à priori* aucun calcul sur l'action électro-dynamique de la terre. Ici le physicien doit adopter une marche tout opposée. Ce n'est qu'en recueillant le plus grand nombre possible d'observations faites en divers lieux sur la déclinaison et l'inclinaison de l'aiguille aimantée, sur leurs variations progressives et alternatives, qu'on peut poser les bases d'un travail dont le but serait de déterminer, par la comparaison des résultats de ces observations et de ceux du calcul, la distribution des courans électriques dans le globe, et de décider en même temps, autant que cela est possible dans l'état actuel de nos connaissances, la question même de l'existence de ces courans. Lorsqu'on l'admet, les variations diurnes, en montrant l'influence des changemens de température à la surface du globe sur les causes qui déterminent la direction de l'aiguille aimantée, annoncent que les courans terrestres doivent être situés, en partie, à une très-petite profondeur; mais, comme ces variations sont elles-mêmes très-petites, relativement à la portion constante de la déclinaison et de l'inclinaison qui n'en est point affectée, on doit admettre que ces effets dépendent beaucoup plus de courans situés à de grandes profondeurs. Il est, dans les recherches de M. Ampère, un autre point très-distinct des résultats dont nous venons de parler; c'est l'assimilation qu'il a faite des aimans et des assemblages de courans circulaires parallèles, auxquels il a donné le nom de *cylindres électro-dynamiques*. Cette assimilation peut être justifiée de deux manières, l'une purement expérimentale, l'autre fondée uniquement sur le calcul.

La première consiste à comparer les effets produits par

ces cylindres et par les aimans ; c'est ce que M. Ampère a fait depuis long-temps en montrant, par des expériences très-variées, que l'action exercée sur un cylindre électro-dynamique par un autre cylindre, par un conducteur rectiligne, par le globe terrestre ou par un aimant, est en effet identique avec celle qu'un aimant éprouve dans les mêmes circonstances, en prenant l'aimant d'une longueur telle, que la distance de ses pôles soit égale à la longueur du cylindre qu'il remplace.

La seconde consiste à partir de la formule par laquelle M. Ampère a représenté l'action mutuelle de deux élémens de courans électriques, à l'appliquer au calcul de l'action que doit exercer sur un cylindre composé de courans électriques situés dans des plans perpendiculaires à son axe, soit un conducteur rectiligne, soit un autre cylindre composé de la même manière ; et de trouver, dans le premier cas, la même valeur que M. Biot a obtenue pour l'action d'un conducteur rectiligne sur un aimant, et, dans le second, celle par laquelle Coulomb a représenté ses expériences sur l'action mutuelle de deux aimans. Mais on doit toujours assimiler aux extrémités du cylindre électro-dynamique, non pas les extrémités des barreaux aimantés, mais les points de ces barreaux auxquels on a donné le nom de *pôles*, puisque ce sont ces points qui, dans les expériences faites comparativement par M. Ampère sur les aimans et les cylindres électro-dynamiques, ont présenté les mêmes propriétés que les extrémités de ces cylindres. Ce second genre de preuve peut seul compléter les théories physiques, qu'il faut d'abord déduire des expériences, mais qu'on ne peut regarder, tant que le calcul ne vient pas leur prêter son appui, que comme des hypothèses plus ou moins incertaines.

Deux jeunes et habiles physiciens viennent de suppléer à ce qui manquait, à cet égard, au travail de M. Ampère sur

l'identité du magnétisme et de l'électricité. Les mémoires où ils ont consigné les résultats de leurs recherches, ont été lus à l'Académie dans la séance du 3 février dernier. Le mémoire de M. de Montferrand contient les calculs relatifs à l'action mutuelle d'un conducteur rectiligne et d'un assemblage de courans électriques circulaires situés dans des plans parallèles à la direction de ce conducteur. L'auteur détermine, d'après la valeur assignée par M. Ampère à l'action de deux élémens de courans électriques, l'expression de celle qu'exerce un conducteur rectiligne indéfini,

1.° Sur un élément de courant électrique;

2.° Sur un courant circulaire dont le plan est parallèle à celui du conducteur;

3.° Sur un assemblage de courans circulaires dont les plans, assujettis à la même condition, sont en même temps perpendiculaires à une ligne droite ou courbe passant par leurs centres.

Il examine en particulier le cas où cette ligne est droite, celui où elle est une circonférence de cercle, et enfin celui où elle est une courbe à deux branches égales et placées symétriquement des deux côtés d'un plan qui passe par le conducteur.

Il trouve, dans le premier cas, que le calcul reproduit la loi expérimentale donnée en 1820 par M. Biot, et confirmée par les expériences publiées cette année par M. Pouillet; et le second lui offre un résultat compris dans celui des expériences de MM. Gay-Lussac et Welter sur un anneau d'acier aimanté par le procédé dû à M. Arago. Le troisième lui fournit une nouvelle conséquence de la théorie des phénomènes électro-dynamiques, qui a depuis été vérifiée par l'expérience.

L'auteur est conduit par ses calculs à plusieurs autres conséquences de la même théorie, dont une des plus remarquables est que la force avec laquelle un conducteur rectiligne

indéfini tend à faire tourner une petite portion du courant électrique rectiligne, mobile autour d'une de ses extrémités, dans un plan parallèle au conducteur, reste la même dans toutes les positions que prend, pendant son mouvement, cette portion de courant électrique relativement à la direction du conducteur.

M. Savary a embrassé dans son mémoire tous les cas de l'action qui s'exerce entre un conducteur et un cylindre électro-dynamique et entre deux cylindres, en supposant toujours que le diamètre des courans circulaires dont ils se composent est très-petit; ce qui suffit au but qu'il s'était proposé.

La relation que M. Ampère avait établie entre les deux constantes dont nous avons parlé, ne peut en faire connaître les valeurs qu'en adoptant pour l'une d'elles le nombre 2; ce qu'indiquent, à la vérité, des analogies multipliées, mais ce qu'on n'avait encore déduit d'aucune expérience où l'on n'employât que des conducteurs voltaïques. M. Savary a d'abord cherché une seconde relation entre ces deux constantes, dont la combinaison avec la première conduisît à une détermination directe de leurs valeurs. Il y est parvenu en appliquant le calcul à une expérience où l'anneau aimanté de MM. Gay-Lussac et Welter fût remplacé par un assemblage de petits courans électriques circulaires disposés comme ceux que la théorie adoptée par l'auteur admet dans cet anneau. Au moyen de cette expérience, qui a été faite par M. Ampère, et de la seconde relation entre les deux constantes qu'en a déduite M. Savary, les valeurs de ces constantes se trouvent complétement déterminées.

Les principaux résultats obtenus par M. Savary, relativement aux cylindres électro-dynamiques d'un très-petit diamètre, sont les suivans:

1.° L'action d'un cylindre électro-dynamique sur un élément de courant électrique est représentée par la résultante de deux forces appliquées à cet élément dans des directions perpendiculaires à deux plans passant par cet élément et par les deux extrémités du cylindre; chaque force est en raison inverse du carré de la distance de l'élément à l'une des extrémités de l'axe du cylindre, et proportionnelle au sinus de l'angle que la droite qui joint l'élément et cette extrémité fait avec la direction du même élément.

2.° L'action d'un cylindre électro-dynamique sur un conducteur rectiligne indéfini se compose de la réunion de deux forces qui n'ont une résultante unique que si l'axe du cylindre est dans un plan perpendiculaire à la direction du conducteur. Chaque force est appliquée au point où cette direction est rencontrée par la perpendiculaire abaissée de l'extrémité correspondante de l'axe du cylindre; elle est en raison inverse de cette perpendiculaire, et dirigée suivant une droite perpendiculaire au plan qui passe par la même extrémité et par la direction du conducteur. Ce résultat du calcul devient celui que M. Biot a trouvé, et que M. Pouillet a confirmé par les expériences que nous avons citées tout-à-l'heure, lorsqu'on substitue un aimant au cylindre électro-dynamique, et les pôles de cet aimant aux extrémités de l'axe du cylindre.

3.° Quand cet axe est dans un plan perpendiculaire à la direction du conducteur rectiligne indéfini, la résultante des deux forces dont se compose l'action que le cylindre électro-dynamique exerce sur lui, est proportionnelle à la longueur du cylindre divisée par le produit des deux distances de ses extrémités au point où la direction du conducteur rencontre perpendiculairement le plan du triangle formé par ces deux distances et par l'axe du cylindre; elle passe par

ce point et par le centre de la circonférence circonscrite au même triangle.

4.° Pour avoir l'action exercée sur un cylindre électro-dynamique, soit par un élément de courant électrique, soit par un conducteur rectiligne indéfini, il faut concevoir des forces égales et opposées à celles dont l'auteur a ainsi déterminé les grandeurs et les directions, et les supposer appliquées à des points liés invariablement à l'aimant et situés sur ces directions.

5.° L'action mutuelle de deux cylindres électro-dynamiques se compose de quatre forces dirigées suivant les droites qui joignent chaque extrémité de l'axe d'un cylindre aux deux extrémités de l'autre; elles sont en raison inverse des carrés des longueurs de ces droites, et attractives ou répulsives, suivant des conditions que l'auteur définit.

Ce résultat est la loi par laquelle Coulomb a représenté ses expériences sur l'action mutuelle de deux aimans, pourvu qu'on substitue encore ici les pôles de ces aimans aux extrémités des cylindres.

6.° Si l'on considère l'action qu'exerce un cylindre électro-dynamique très-long sur un conducteur mobile de forme quelconque, ou sur un autre cylindre électro-dynamique, lorsque ceux-ci sont placés assez près d'une des extrémités du premier cylindre pour que la partie de son action qui est relative à l'autre extrémité, soit sensiblement nulle, on trouve que les effets produits ne dépendent que de la situation de l'extrémité la plus voisine du conducteur mobile ou de l'autre cylindre électro-dynamique, et restent les mêmes, quelle que soit la direction de l'axe du premier cylindre.

7.° Si un cylindre électro-dynamique très-long agit sur un conducteur mobile assujetti à tourner autour d'un axe vertical dans lequel se trouve son extrémité supérieure, et que l'extré-

mité du cylindre soit dans le même axe au niveau de l'extrémité inférieure du conducteur mobile, l'action exercée sur ce dernier par le cylindre pour le faire tourner, toujours dans le même sens, autour de l'axe vertical, ne dépend que du rayon du cercle décrit par l'extrémité inférieure du conducteur mobile; elle est en raison inverse de ce rayon.

8.° Concevons, pour fixer les idées, un cylindre électro-dynamique très-court, dont l'axe est horizontal, et qui peut se mouvoir librement autour d'une droite verticale passant par son milieu : si l'on place dans le plan mené par cette verticale et par l'axe du cylindre un conducteur rectiligne indéfini, son action pour faire tourner le petit cylindre autour de la verticale reste la même, quelle que soit l'inclinaison du conducteur sur le plan horizontal, et elle est en raison inverse de la perpendiculaire abaissée du milieu de l'aimant sur la direction de ce conducteur. On avait trouvé par l'expérience que cette action ne changeait point quand on changeait la direction du conducteur, en le laissant toujours à la même distance du milieu de l'aimant.

9.° On sait que, dans ce cas, le petit cylindre électro-dynamique est amené par l'action du conducteur dans une direction perpendiculaire au plan vertical qui passe par ce conducteur et par le milieu de l'aimant, du moins tant que leur plus courte distance n'est pas égale à la moitié de la longueur du plus petit cylindre. Cet effet a encore lieu quand on suppose qu'elle est plus grande, et qu'on plie le conducteur dans le même plan vertical, de manière qu'il forme un angle dont le sommet est dans un plan horizontal mené par l'axe de l'aimant, et dont les deux côtés s'inclinent également sur ce dernier plan. La situation où le petit cylindre est amené par l'action du conducteur, est toujours la même; mais, quand on le fait osciller autour de cette situation, la

force qui détermine le nombre des oscillations, va en diminuant avec l'angle formé par les deux branches du conducteur. M. Savary trouve, au moyen de la formule de M. Ampère, et en supposant la longueur du cylindre infiniment petite relativement à sa distance au conducteur, que cette force est proportionnelle à la tangente de la moitié de l'angle compris entre une des branches du conducteur et le plan horizontal.

Tels sont les principaux résultats de ce mémoire ; on peut les comprendre presque tous sous un énoncé général, savoir : qu'il y a dans tous les cas identité entre les effets produits par un aimant et ceux que le calcul donne pour un cylindre électro-dynamique, avec cette seule différence, reconnue depuis long-temps, que ce ne sont pas les extrémités de l'aimant, mais les points un peu plus rapprochés de son milieu, auxquels on a donné le nom de *pôles*, qui présentent toutes les propriétés des extrémités du cylindre qu'on lui substitue. Cette identité deviendrait complète si l'on assimilait, comme le fait M. Ampère, les cylindres électro-dynamiques, non aux aimans entiers, mais à chacune de leurs particules, et qu'on admît, avec Coulomb, qu'il y a contiguité entre les pôles de noms différens des particules qui se suivent immédiatement dans des directions parallèles à l'axe des aimans.

M. Fresnel a présenté divers mémoires d'optique, qui ont pour objet d'exprimer par une construction les lois générales de la double réfraction, de découvrir les propriétés d'un nouveau genre de polarisation auquel il a donné le nom de *circulaire*, de prouver directement que le verre comprimé fait subir à la lumière la double réfraction, enfin d'examiner la loi des modifications que la réflexion totale imprime à

la lumière polarisée. Toutes ces recherches sont liées aux notions théoriques que M. Fresnel et plusieurs autres physiciens ont adoptées sur la nature de la lumière; ils regardent son action comme due à des vibrations extrêmement rapides qui se propagent dans des milieux élastiques. L'Académie a principalement considéré ces questions sous le point de vue expérimental, en faisant abstraction jusqu'ici, et autant que le sujet le permet, des considérations théoriques. Toutefois on ne pourrait point donner ici une juste idée de l'ensemble des recherches de M. Fresnel sans employer les expressions propres aux notions physiques qui servent de fondement à ses recherches. Il serait impossible d'exprimer clairement l'objet et les résultats de ses derniers mémoires, si l'on ne considérait d'abord ces questions sous le même point de vue que l'auteur. On a pour but, dans l'extrait suivant, de donner une connaissance exacte, mais sommaire, des recherches les plus récentes.

M. Arago et M. Fresnel avaient observé depuis long-temps que les rayons polarisés, suivant des directions rectangulaires, donnent toujours par leur réunion la même quantité de lumière, quelle que soit la différence des chemins qu'ils ont parcourus à partir de leur commune origine. En cherchant à expliquer ce phénomène singulier qui semble une exception au principe général des interférences, M. Fresnel a été conduit à supposer que les vibrations des faisceaux polarisés, au lieu de faire osciller les molécules dans le sens même du rayon, comme on l'admet pour les ondes sonores, s'exécutent perpendiculairement aux rayons, c'est-à-dire, parallèlement à la surface des ondes. Suivant lui, la lumière polarisée est celle dont les vibrations restent constamment perpendiculaires à un même plan, qui est précisément celui qu'on appelle *plan de polarisation*; et la lumière ordinaire ou

directe est la réunion et la succession rapide d'une infinité d'ondes polarisées dans tous les sens. L'acte de la polarisation consiste alors dans la décomposition de toutes ces petites oscillations de direction variable suivant deux directions rectangulaires fixes, et dans la séparation des deux systèmes d'ondes, soit par l'effet de la réflexion, soit par celui de la double réfraction.

Cette définition des vibrations lumineuses donne un moyen facile d'expliquer les lois particulières de l'interférence des rayons polarisés, qui ont servi de base aux formules générales par lesquelles M. Fresnel a représenté les phénomènes des lames minces cristallisées : il suffit de faire usage du principe de la composition des petits mouvemens.

Il résulte aussi de cette hypothèse une manière simple de concevoir la double réfraction. Prenons, par exemple, le cas où un faisceau de lumière, parti d'un point infiniment éloigné, tombe perpendiculairement sur une plaque de cristal taillée parallèlement à son axe ; alors l'onde incidente étant parallèle à la surface du cristal, les vibrations qu'elle y excite sont aussi parallèles à la face d'entrée, et peuvent être regardées comme composées de vibrations parallèles et de vibrations perpendiculaires à l'axe du cristal ; or il suffit que l'élasticité mise en jeu dans le milieu cristallisé par les vibrations parallèles à l'axe soit un peu plus grande ou plus petite que l'élasticité mise en jeu par les vibrations perpendiculaires à l'axe, pour que les unes se propagent un peu plus vîte ou plus lentement que les autres. Si la seconde surface du cristal est parallèle à la première, il n'en résultera qu'une simple différence de marche entre les deux séries d'ondes ainsi propagées ; mais, si elle est oblique aux rayons, au lieu de leur être perpendiculaire comme la face d'entrée, la différence de vîtesse de deux faisceaux lumineux entraînera une différence

de réfraction qui les fera diverger, et produira ainsi deux images distinctes du même point de mire.

En suivant dans ses conséquences cette manière d'envisager la double réfraction, M. Fresnel a été conduit aux lois générales de la double réfraction des cristaux à deux axes, qu'il a ensuite vérifiées par l'expérience : ce travail a fait l'objet de trois mémoires successifs présentés à l'Institut à la fin de 1821 et dans les premiers mois de 1822. M. Arago a rendu compte de la partie expérimentale de ces recherches dans un rapport adopté par l'Académie, et publié dans les cahiers des *Annales de physique et de chimie* du mois d'août 1822. On trouvera un résumé des résultats théoriques dans le *Bulletin des sciences de la Société philomathique*, livraisons des mois d'avril et de mai 1822. Nous nous bornerons ici à énoncer la construction très-simple par laquelle M. Fresnel a représenté les lois générales de la double réfraction. La direction d'un rayon qui traverse le cristal étant donnée, si l'on veut connaître quelle vîtesse il affecte dans ce milieu, soit qu'il subisse la réfraction appelée *ordinaire* ou *extraordinaire*, il faut d'abord concevoir un ellipsoïde dont le centre soit placé en un point quelconque de la direction du rayon : les trois axes de cet ellipsoïde sont inégaux pour les substances cristallisées qu'on appelle *cristaux à deux axes*; deux des axes de l'ellipsoïde sont placés dans le plan de ces *axes optiques*, et divisent en deux parties égales, l'un l'angle aigu et l'autre l'angle obtus qu'ils forment entre eux; enfin le troisième axe est perpendiculaire à ce plan. Cela posé, l'ellipsoïde étant construit sur ces trois axes, dont les longueurs se déduisent de l'expérience, si on le coupe par un plan mené par son centre et perpendiculaire à la direction du rayon lumineux, le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse qui résulte de cette intersection représenteront les deux vîtesses avec

lesquelles la lumière se propage dans le cristal, suivant la direction donnée, selon qu'elle y subit la réfraction ordinaire ou extraordinaire. Cette construction détermine en même temps les plans de polarisation du rayon ordinaire et du rayon extraordinaire; qui sont perpendiculaires aux axes de la section elliptique. Les deux directions qu'on appelle *axes du cristal*, et que M. Fresnel nomme *axes optiques*, pour les distinguer des axes de l'ellipsoïde, sont celles suivant lesquelles la double réfraction est nulle, ou, en d'autres termes, la vîtesse des rayons ordinaires égale à celle des rayons extraordinaires. Un ellipsoïde dont les trois axes sont inégaux peut toujours être coupé suivant un cercle par deux plans diamétraux passant par un de ses axes et également inclinés sur chacun des deux autres. Les deux axes optiques du cristal doivent être perpendiculaires à ces plans, d'après la construction que nous venons d'énoncer, puisqu'alors, la section elliptique devenant circulaire, ses deux demi-axes, qui représentent les vîtesses des rayons ordinaire et extraordinaire, sont égaux entre eux.

Lorsque deux des axes de l'ellipsoïde sont égaux, c'est-à-dire, lorsque l'ellipsoïde est de révolution, les deux sections circulaires se confondent avec son équateur, et les deux axes optiques se réunissent en un seul, perpendiculaire à ce plan; c'est le cas des cristaux à un axe, tels que le carbonate de chaux. Alors, quelle que soit la direction du rayon lumineux dans le cristal, un des axes de la section elliptique perpendiculaire à ce rayon, étant situé dans l'équateur, conserve une longueur constante; ce qui fait qu'une des deux vîtesses de la lumière reste toujours la même. On a donné aux rayons qui affectent cette vîtesse constante le nom de *rayons ordinaires*. Mais, lorsque les trois axes de l'ellipsoïde sont inégaux, les deux axes de la section elliptique varient l'un et l'autre

avec la direction du rayon à laquelle elle est perpendiculaire; en sorte qu'il n'y a plus, à proprement parler, de rayon ordinaire. Néanmoins, pour ne pas changer les dénominations reçues, on peut encore appeler *ordinaire* un des deux faisceaux, en donnant ce nom à celui qui éprouve les moindres variations de vîtesse.

D'après la loi des vîtesses que nous venons d'énoncer, on peut calculer, dans tous les cas, la manière dont les rayons sont réfractés à leur entrée dans le cristal et à leur sortie, en considérant que la ligne brisée, formée par le rayon incident et le rayon réfracté, doit être le chemin par lequel la lumière arrive le plus promptement d'un point quelconque du rayon incident à un autre point quelconque du rayon réfracté.

M. Fresnel avait été conduit, par l'étude des propriétés optiques du verre comprimé, à supposer que la double réfraction résulte des élasticités différentes qu'un même milieu peut présenter en divers sens. M. le docteur Brewster a observé le premier, et depuis long-temps, que des plaques de verre pressées par deux tranches opposées modifient la lumière polarisée qui les traverse perpendiculairement au sens de la compression, de la même manière que les lames cristallisées parallèles à l'axe; il en avait conclu, par analogie, que cette compression constitue le verre dans un état de cristallisation qui lui donne toutes les propriétés optiques des cristaux doués de la double réfraction. Sans avoir pour but de prouver la première proposition, savoir, que la compression donne au verre une constitution cristalline, M. Fresnel n'examine que le second point. Il s'était assuré, par des procédés d'interférence, que le verre comprimé jouit effectivement de la double réfraction, c'est-à-dire, que la lumière s'y divise généralement en deux séries d'ondes qui le parcourent avec des vîtesses

différentes. Il a mis, depuis, cette double réfraction en évidence par une expérience directe communiquée à l'Académie. Dans cette expérience il a obtenu deux images distinctes et polarisées du même point de mire, en le regardant à travers une pile de prismes de verre comprimé. Les détails de cette expérience ont été publiés dans le cahier des *Annales de chimie et de physique* du mois d'août 1822.

A la fin de cette note, il annonce d'avance les caractères distinctifs de la double réfraction toute particulière que la lumière devait subir en traversant le cristal de roche parallèlement à son axe, et les a vérifiés depuis par des expériences qui font l'objet d'un mémoire présenté à l'Institut le 9 décembre 1822, et dont il a été publié un extrait dans le *Bulletin des sciences de la Société philomathique* du même mois. Selon M. Fresnel, une double réfraction semblable doit exister aussi, mais à un degré beaucoup plus faible, dans les liquides où M. Biot a découvert des phénomènes de polarisation colorée analogues à ceux que présentent les plaques de cristal de roche perpendiculaires à l'axe. M. Fresnel n'a jusqu'à présent vérifié l'existence de cette double réfraction dans ces liquides, que par des procédés d'interférence; tandis qu'il l'a démontrée dans le cristal de roche, en séparant en deux faisceaux distincts, au moyen d'un prisme très-obtus, les rayons qui traversent le cristal suivant des directions à peu près parallèles à l'axe. Ces deux faisceaux présentent toutes les apparences de la lumière ordinaire ou directe, quand on les fait passer au travers d'un rhomboïde de spath calcaire, c'est-à-dire qu'ils donnent toujours chacun deux images d'égale intensité, dans quelque sens qu'on tourne la section principale du rhomboïde, et n'offrent ainsi aucun indice du genre de polarisation qui accompagne toutes les doubles réfractions observées jusqu'à présent; ils ont reçu

cependant, par la double réfraction spéciale qui les a séparés, une modification particulière que M. Fresnel avait obtenue depuis long-temps par d'autres procédés, et à laquelle il a donné le nom de *polarisation circulaire*, en nommant *polarisation rectiligne* celle qui a été observée pour la première fois dans le spath d'Islande, et que M. Malus a reconnue dans l'acte de la réflexion de la lumière sur les corps transparens. Voici les principaux caractères de la polarisation circulaire :

1.° La lumière ainsi modifiée ressemble à la lumière directe, comme nous venons de le dire, quant à la manière dont elle se comporte lorsqu'on l'analyse avec un rhomboïde de spath calcaire. 2.° Elle diffère de la lumière ordinaire ou directe en ce qu'elle développe dans les lames minces cristallisées des couleurs aussi vives que celles qu'on obtient avec la lumière qui a reçu la polarisation rectiligne ; mais ce ne sont plus les mêmes teintes : elles répondent, sur le cercle chromatique de Newton, à des points également éloignés des deux couleurs complémentaires que la lumière qui a reçu la polarisation rectiligne développe dans les mêmes lames cristallisées. 3.° La lumière polarisée circulairement diffère encore de la lumière directe en ce qu'elle reprend tous les caractères de la polarisation rectiligne, quand on lui fait éprouver successivement deux réflexions totales dans l'intérieur du verre, sous l'incidence de 54 degrés et demi environ. Ces deux réflexions ne changent aucunement les propriétés apparentes de la lumière directe, et impriment tous les caractères de la polarisation circulaire à la lumière affectée de la polarisation rectiligne, qui les subit dans un azimut de 45 degrés relativement à son plan primitif de polarisation. C'est ainsi que M. Fresnel avait obtenu d'abord cette modification de la lumière, dont il a calculé tous les effets en la représentant

par la réunion de deux séries d'ondes polarisées suivant des directions rectangulaires et différant dans leur marche d'un quart d'ondulation. Les deux faisceaux distincts résultant de la double réfraction dont il s'agit, après avoir éprouvé les deux réflexions totales, sont polarisés à 45 degrés du plan de réflexion, l'un à droite et l'autre à gauche de ce plan; ces deux faisceaux jouissent donc des mêmes propriétés : mais l'un se comporte de droite à gauche, comme l'autre de gauche à droite; et l'on peut désigner les modifications qu'ils ont reçues dans le cristal, par les noms de *polarisations circulaires de gauche à droite*, ou *de droite à gauche*. Enfin chacun de ces deux faisceaux ne peut plus donner, dans un second prisme de cristal de roche qu'il traverse parallèlement à l'axe, que l'espèce de réfraction qu'il a déjà subie dans le premier : ainsi, lorsqu'on fait traverser à la lumière un nombre quelconque de prismes semblables, on n'obtient jamais que deux images; ce qui distingue encore cette double réfraction de celle qu'on avait étudiée jusqu'à présent.

Le dernier travail de M. Fresnel, dont les résultats ont été communiqués à l'Académie, a pour objet la recherche de la loi des modifications singulières que la réflexion totale imprime à la lumière polarisée.

Il a découvert suivant quelle loi variaient ces modifications, en raison de l'obliquité des rayons; il s'est servi pour cela des formules générales qu'il avait données pour calculer les intensités de la lumière réfléchie par les corps transparens sous toutes les incidences. Ces formules, dont il présente un nouveau calcul dans ce mémoire, et qu'il se réserve d'examiner de nouveau sous le point de vue théorique, s'accordent avec le petit nombre d'observations précises que l'on possède relativement aux intensités de lumière réfléchie sous diverses inclinaisons, et qui sont dues à M. Arago. Ces formules se

trouvent confirmées encore par des observations variées de M. Fresnel sur les déviations angulaires qu'éprouve le plan de polarisation de la lumière incidente, préalablement polarisée, qui est réfléchie à la surface extérieure de l'eau ou du verre; car on déduit immédiatement des mêmes formules les déviations dont il s'agit. Elles fournissent également le moyen de déterminer les proportions de lumière polarisée par réflexion ou par réfraction, quand on emploie la lumière directe: on peut donc calculer maintenant tous les phénomènes qui accompagnent la réflexion et la réfraction de la lumière dans les milieux diaphanes. L'extrait de ce mémoire a été publié dans le *Bulletin des sciences de la Société philomathique*, mois de février 1823.

Les recherches de plusieurs habiles physiciens avaient déjà perfectionné l'usage de l'aréomètre. S. Exc. le Ministre de l'intérieur a desiré que l'Académie examinât de nouveau cette question, et comparât entre elles les méthodes qui avaient été proposées pour déterminer avec précision, au moyen de cet instrument, les pesanteurs spécifiques des liquides. L'application de ces méthodes à la mesure des différens degrés de pureté des liqueurs alcooliques intéresse l'administration de l'impôt; l'intention du Gouvernement était de puiser dans les connaissances physiques récemment acquises des procédés propres à évaluer plus convenablement *le titre des eaux-de-vie et esprits en centième de prêt*.

L'Académie a nommé une commission spéciale chargée d'examiner sous ce point de vue les mémoires qui avaient été présentés au Gouvernement. M. Arago, rapporteur de la commission, a exposé les résultats de cet examen, et a montré que des expériences très-précises faites antérieurement par M. Gay-Lussac donnaient un moyen assuré de

satisfaire entièrement aux vues que l'administration publique se proposait. L'Académie a adopté ce rapport et les conclusions suivantes.

Les tables que M. Gay-Lussac a déduites d'un travail pénible de plus de six mois, seront pour l'industrie et pour la science une acquisition précieuse. L'autorité y trouvera, suivant son vœu, les moyens d'améliorer ou de simplifier la perception de l'impôt, et le guide le plus sûr qu'elle puisse suivre.

La commission exprime aussi, dans ce rapport, l'opinion favorable qu'elle a conçue d'un mémoire qui lui avait été remis, et qui, en traitant les diverses questions de l'aréométrie, présente l'histoire de tous les aréomètres nationaux et étrangers. On doit ce travail à M. Francœur, connu de tous les géomètres par les ouvrages importans qu'il a publiés sur les diverses parties des sciences mathématiques pures et appliquées.

Le même rapport fait mention d'un mémoire imprimé dans lequel M. le professeur Benoist traite de la théorie des aréomètres. Ce mémoire a paru à la commission très-clairement rédigé, et peut être considéré comme un excellent chapitre d'un traité de physique : mais l'auteur ne s'est point occupé de la partie expérimentale de la question.

On a déterminé depuis long-temps, et avec assez de précision, la capacité de chaleur d'un grand nombre de substances; il n'est pas moins important de connaître les autres qualités spécifiques des corps qui se rapportent à l'action de la chaleur. La théorie analytique que l'on a découverte dans ces dernières années, distingue et définit exactement ces qualités, et apprend à les mesurer. M. Despretz, connu depuis long-temps par des recherches importantes sur différens sujets de physique, s'est proposé de déterminer par l'expérience,



et au moyen des formules de la théorie, la conductibilité propre de diverses substances, c'est-à-dire, la faculté plus ou moins grande avec laquelle la chaleur les pénètre en passant d'une de leurs molécules à une molécule voisine.

Pour faire connaître le sujet et les principaux résultats de ces nouvelles expériences, on présente au lecteur, 1.° le premier article du mémoire, dans lequel l'auteur expose comme il suit l'objet de ses recherches; 2.° le rapport fait à l'Académie des sciences.

1.° Peu de branches de physique sont plus dignes de fixer l'attention des hommes éclairés que les phénomènes de la chaleur; peu de parties ont été cultivées avec plus de suite et de succès depuis un demi-siècle. La chaleur, en effet, a le double avantage de fournir matière à de hautes spéculations et de donner lieu à des applications nombreuses.

La nécessité de la détermination de la faculté qu'ont les divers corps de conduire plus ou moins facilement la chaleur, s'est fait sentir dès l'origine de la physique expérimentale; mais la notion de la conductibilité ne pouvait être puisée que dans une théorie exacte qui a été découverte récemment.

La connaissance des conductibilités est aussi précieuse pour les sciences et pour les arts, que celle des densités et des chaleurs spécifiques. Cette connaissance fournirait au géomètre des données nécessaires à la solution numérique des plus importantes questions de la distribution de la chaleur dans l'intérieur des corps; elle guiderait également le physicien expérimentateur et le manufacturier dans le choix des substances dont ils doivent faire usage. Cependant on ne possède aujourd'hui qu'une seule détermination de ce genre; c'est celle du fer forgé, que M. Fourier a déduite de ses expériences. Il est facile de voir que les essais d'Ingenhousz, de Meyer et de Buffon, n'étaient nullement propres à faire

connaître la conductibilité. Amontons et Lambert avaient aussi fait des recherches expérimentales et théoriques sur la propagation de la chaleur dans une barre métallique. M. Biot et le comte de Rumford observèrent par des expériences précises la loi des températures décroissantes dans un prisme dont une extrémité est entretenue à une température constante. Il n'est pas étonnant qu'on ne se soit pas occupé de la recherche des conductibilités, puisque les relations algébriques par lesquelles cet élément peut être déterminé n'étaient pas trouvées. Il fallait que l'analyse eût fait connaître les lois du mouvement de la chaleur dans l'intérieur des corps; découverte qui ne date que de quelques années, et qui est due à M. Fourier. MM. de Laplace et Poisson ont aussi appliqué l'analyse à plusieurs questions importantes de la théorie de la chaleur, qui forme désormais une des branches principales de la physique mathématique.

2.° *Rapport sur des expériences qui ont pour objet de mesurer dans plusieurs substances la faculté conductrice relative à la chaleur.*

L'auteur de ce mémoire est M. Despretz, qui a déjà communiqué à l'Académie des recherches importantes sur différens sujets. Il s'est proposé, dans ce nouveau travail, d'observer la faculté conductrice relative à la chaleur. Les matières soumises à ses expériences sont le fer, le cuivre, l'étain, le plomb, le marbre, la terre de brique et la porcelaine. Nous avons été chargés, M. Poisson et moi, d'examiner le mémoire de M. Despretz, et nous allons exposer le résultat de cet examen.

Les corps jouissent très-inégalement de la faculté de recevoir et de conduire la chaleur. Les uns, comme les métaux, sont plus facilement *perméables*, et la chaleur qui les a pénétrés passe assez promptement de chaque molécule intérieure

à celles qui l'environnent. D'autres substances, comme le marbre, la porcelaine, le bois, le verre, opposent beaucoup plus d'obstacle à la transmission.

Cette facilité plus ou moins grande de conduire la chaleur dans l'intérieur de la masse doit être soigneusement distinguée d'une propriété analogue qui subsiste à la superficie des corps. En effet, les différentes surfaces sont inégalement *pénétrables* à l'action de la chaleur; dans plusieurs cas, par exemple, lorsque la surface est polie et a reçu l'éclat métallique, la chaleur que le corps contient s'échappe difficilement par voie d'irradiation dans le milieu environnant. Si cette même surface vient à perdre le brillant métallique, et surtout si on la couvre d'un enduit noir et mat, la chaleur rayonnante émise est beaucoup plus intense qu'auparavant, et cette quantité peut devenir six fois ou sept fois plus grande qu'elle ne l'était d'abord.

Mais la chaleur rayonnante émise n'est qu'une assez petite partie de celle que le corps abandonne, lorsqu'il se refroidit dans l'air ou dans un milieu élastique; et la plus grande partie de cette chaleur perdue ne s'échappe point en rayons d'une longueur sensible : elle est communiquée à l'air par voie de contact; elle dépend principalement de l'espèce du milieu et de la pression.

Cette propriété de la surface s'exerce également en sens opposé, lorsque le corps s'échauffe en recevant la chaleur du milieu, ou celle des objets environnans. Une même cause oppose le même obstacle à la chaleur qui tend à s'introduire dans le solide, et à celle qui tend à se dissiper dans le milieu, soit que cette chaleur, qui se porte à travers la surface, provienne du rayonnement ou du contact.

La quantité totale de chaleur que le solide abandonne dans l'air, ou celle qu'il reçoit, est donc modifiée par la

nature et la pression du milieu, et par l'état de la superficie qui détermine la *pénétrabilité*. Mais il n'en est pas de même de la *perméabilité* intérieure. La facilité plus ou moins grande de conduire la chaleur et de la porter d'une molécule à une autre est une qualité propre, totalement indépendante de l'état de la superficie et des conditions extérieures. C'est cette qualité spécifique que l'auteur du mémoire s'est proposé d'observer. On peut facilement juger combien les recherches de ce genre intéressent la physique générale et les arts, et combien il serait utile de connaître avec quelle facilité la chaleur se propage dans les diverses substances.

Ces recherches tendent à perfectionner des arts très-importans, et tous les usages économiques qui exigent l'emploi et la distribution du feu. La faculté conductrice dont il s'agit est une qualité du même ordre que la capacité de la chaleur, et l'on a les mêmes motifs de mesurer avec précision l'une et l'autre propriété.

Nous ne rappellerons point les recherches analytiques qui servent de fondement à la mesure des conductibilités ; elles ont fait connaître divers moyens de déterminer le coefficient relatif à cette propriété. On en avait fait une première application à la matière du fer forgé, et l'on ne connaissait jusqu'ici la mesure de la conductibilité que pour cette seule substance.

Le travail de M. Despretz comprend plusieurs matières différentes, et l'on doit desirer qu'un grand nombre de corps soient soumis par la suite à des observations semblables, afin de composer une table des perméabilités, analogue à celle des capacités spécifiques et des pesanteurs.

Franklin et Ingenhousz ont tenté les premiers de comparer différens corps entre eux sous ce point de vue. Une théorie exacte, telle que nous la possédons aujourd'hui, pourrait

déduire de ces observations des conséquences utiles; mais il est préférable d'employer un autre procédé, que nous allons décrire sommairement.

On suspend horizontalement une barre prismatique, et l'on échauffe l'extrémité en plaçant au-dessous une lampe dont le foyer est constant; le prisme est percé, en divers endroits, de trous qui pénètrent jusqu'à plus de moitié de l'épaisseur; on les remplit d'un liquide, comme le mercure ou l'huile, et l'on y place autant de thermomètres destinés à mesurer les températures des différens points du prisme. Ces thermomètres s'élèvent successivement, à mesure que la chaleur sortie du foyer se propage et s'établit dans le solide. On règle continuellement l'intensité de la flamme, en sorte que le thermomètre le plus voisin du foyer marque une température fixe. On a appris, par l'expérience même, que l'on peut toujours satisfaire à cette condition. Il en résulte que les températures de tous les thermomètres deviennent sensiblement constantes; alors le prisme est dans cet état invariable que l'on se propose d'observer.

L'expérience doit durer environ cinq, six ou huit heures, lorsque la matière du prisme a une faible conductibilité; après ce temps, pendant lequel la température de la pièce où l'on observe doit demeurer sensiblement la même, on mesure avec précision les températures devenues stationnaires. On retranche de chacune des températures mesurées la température constante de l'air, et l'on écrit l'excès indiqué par chaque thermomètre. La théorie fait connaître comment on peut déduire de ces dernières quantités la valeur numérique propre à la matière du prisme.

L'auteur du mémoire, s'étant proposé seulement de connaître les rapports des conductibilités, a fait en sorte que l'état de la superficie fût le même pour tous les prismes de

différentes matières. Pour cela, il a enduit toutes les surfaces d'un même vernis noir. Des expériences précédentes sur le refroidissement des métaux lui ont servi à régler le nombre et l'épaisseur des couches, en sorte que toutes les barres eussent une même enveloppe également pénétrable à la chaleur. Cette condition, que l'auteur avait déjà observée dans d'autres recherches, lui a paru indispensable pour déterminer les conductibilités respectives. A la vérité, on ne connaît point ainsi les valeurs absolues; mais, celle du fer ayant été déterminée, comme nous avons dit, par d'autres expériences, il suffisait de connaître les rapports, en comparant au fer toutes les autres substances.

Les observations contenues dans le mémoire rendent très-sensibles plusieurs résultats que l'analyse avait fait connaître depuis long-temps, mais qu'on retrouve avec intérêt par la voie expérimentale. Ainsi la théorie avait appris que dans les corps dont la conductibilité a une assez grande valeur, comme le cuivre et même le fer, les thermomètres placés à distances égales dans l'axe du prisme indiquent des températures qui décroissent sensiblement comme les termes d'une série récurrente. Nous remarquons en effet cette loi dans le tableau des nombres observés; et si elle n'avait pas été donnée par la théorie, il est évident qu'on la déduirait aujourd'hui de l'observation.

Il nous reste à indiquer les valeurs numériques que ces dernières expériences ont procurées. L'usage commun suffirait pour montrer que le cuivre conduit plus facilement la chaleur que le fer ou l'étain, et que le marbre et la porcelaine jouissent de cette faculté à un degré très-inférieur à celui qui convient aux métaux; mais on n'avait point encore exprimé ces rapports par des nombres. Les valeurs numériques que l'on a déterminées d'abord ne peuvent encore avoir la précision qu'elles

acquerront un jour; mais on n'en avait jusqu'ici aucune connaissance, et elles étaient nécessaires pour préparer d'autres observations.

Si l'on compare entre eux les corps qui ont été l'objet des expériences de M. Despretz, et si on les écrit par ordre, en commençant par les substances dont la faculté conductrice est la plus grande, on les trouve rangées comme il suit: cuivre, fer, zinc, étain, plomb, marbre, porcelaine, terre de brique. La conductibilité du cuivre est plus grande que celle du fer, dans le rapport de 12 à 5.

Le fer, le zinc et l'étain ne diffèrent pas beaucoup par cette qualité. La conductibilité du plomb est moindre que la moitié de celle du fer; elle est cinq fois plus petite que celle du cuivre.

Le marbre est deux fois meilleur conducteur que la porcelaine; mais cette conductibilité du marbre n'est que la seizième partie de celle du fer.

Enfin la terre de brique et la porcelaine ont à peu près la même conductibilité; savoir, la moitié de celle du marbre. Il en résulte, par exemple, que le même foyer qui échaufferait une pièce close dont les murs seraient de marbre et auraient un pied d'épaisseur, procurerait le même degré de chaleur dans une seconde pièce dont les murs auraient seulement un demi-pied d'épaisseur, mais seraient formés de terre de brique, en supposant que l'étendue et l'état des surfaces fussent les mêmes de part et d'autre; car, pour produire le même échauffement final, il faut que les épaisseurs soient en raison inverse des conductibilités. C'est un des résultats de la théorie, qu'il est très-facile de démontrer.

Les valeurs numériques déduites de ces expériences nous paraissent encore sujettes à diverses causes d'incertitude, comme toutes celles de ce genre qui ont été déterminées pour

la première fois. En effet, l'observateur ne peut pas toujours assigner et choisir d'avance les conditions les plus favorables à la précision des résultats; souvent même ces conditions ne peuvent être connues qu'après des épreuves réitérées.

Pour la mesure des conductibilités, et sur-tout pour les substances métalliques qui jouissent de cette faculté à un assez haut degré, il pourrait être préférable de donner plus de longueur aux prismes.

D'ailleurs, la théorie elle-même n'est pas exempte de toute incertitude. On ne peut douter, par exemple, que le coefficient qui exprime la conductibilité propre, ne varie avec la température; et il peut se faire que ces changemens, qui sont presque insensibles dans différens corps, soient beaucoup plus grands pour d'autres substances. On serait éclairé sur ce point et sur divers autres par la comparaison des résultats du calcul avec un grand nombre d'observations très-précises.

En général, ceux des nombres qui concernent le fer, le cuivre, le zinc et l'étain, peuvent être regardés comme plus exactement connus que ceux qui se rapportent aux substances dont la conductibilité est très-faible, comme la brique, le marbre et la porcelaine.

De nouvelles observations serviront à confirmer ou à modifier ces résultats; on doit desirer aussi que ces expériences soient appliquées à d'autres substances, comme l'argent, la fonte, l'or, le platine, et aux matières qui ont très-peu de conductibilité, comme le verre, le charbon et le bois.

Il faut remarquer, à ce sujet, que la théorie fait connaître divers autres moyens de mesurer les valeurs numériques de la conductibilité, et qu'elle comprend aussi les cas où l'on doit avoir égard au décroissement des températures depuis l'axe du prisme jusqu'à la surface.

Personne n'est plus propre à entreprendre avec succès le

travail dont il s'agit que l'auteur même du mémoire, déjà connu par des observations intéressantes, toutes dirigées vers l'utilité publique. C'est d'après ces motifs que nous avons l'honneur de vous proposer d'accorder votre approbation aux recherches que M. Despretz vous a présentées. Nous pensons que ces premiers résultats, joints à ceux que l'auteur se propose d'obtenir par de nouvelles expériences, doivent être insérés dans la collection des *Mémoires des Savans étrangers;* que leur publication intéresse les progrès des sciences physiques, et que ce travail mérite, à tous égards, le suffrage et les encouragemens de l'Académie.

Ce rapport, fait au nom d'une commission par M. Fourier, a été approuvé par l'Académie, dans sa séance du 17 septembre 1821.

MM. Gay-Lussac et Welter s'occupent de recherches sur les changemens de température occasionnés par la compression ou la dilatation des gaz. M. Gay-Lussac a communiqué à l'Académie un des résultats de ces expériences; il consiste en ce que l'air qui s'échappe d'un vase par l'effet d'une pression constante conserve sa température, quoiqu'il se dilate en sortant du vase. Ce fait remarquable se lie à plusieurs autres qui avaient déjà été observés concernant les températures dues aux changemens de vîtesse ou de densité des substances aériformes. Ces questions sont comprises dans un travail général qui sera présenté à l'Académie et dont on rendra compte ultérieurement.

ASTRONOMIE.

Nous avons fait mention, dans le rapport général, de l'apparition de trois comètes pendant l'année 1822. La première a été découverte à Marseille, dans la constellation du cocher,

le 12 mai, par M. Gambart. Cet astronome a observé la comète quatorze fois depuis le 17 mai jusqu'au 17 juin, et a calculé les élémens que nous allons rapporter.

Passage au périhélie, mai 1822, 6 j. 1 h. 56′ 21″, temps moyen compté de minuit à Marseille.

Distance périhélie.............	0,504194.
Longitude du nœud...........	177° 25′ 4″
Longitude du périhélie.........	192. 47. 45.
Inclinaison..................	53. 35. 34.
Mouvement héliocentrique......	Rétrograde.

Seconde comète de 1822, découverte par M. Pons, à Marlia, le 31 mai. MM. Gambart et Caturégli sont les seuls astronomes qui aient observé cette comète.

Troisième comète de 1822, découverte par M. Pons le 13 juillet, et par M. Gambart le 16. M. Gambart l'a suivie avec la plus grande assiduité pendant toute la durée de son apparition. La première observation est du 20 juillet; la dernière, du 19 octobre : le nombre total est de 43.

Toutes les observations de M. Gambart sont très-bien représentées dans la supposition que l'astre parcourait une parabole dont voici les élémens calculés par le même astronome.

Passage au périhélie, octobre 1822, 24 j. 3 h. 27′ 0″, temps moyen compté de minuit à Marseille.

Distance périhélie............	1,146389.
Longitude du nœud ascendant...	92° 42′ 25″
Longitude du périhélie........	271. 47. 53.
Inclinaison..................	52. 39. 18.
Mouvement héliocentrique.....	Rétrograde.

Comète à courte période.

Cette comète fut découverte le 26 novembre 1818 par M. Pons. M. Bouvard présenta ses élémens paraboliques au bureau des longitudes le 13 janvier 1819. M. Arago fit alors remarquer qu'il y avait entre les nouveaux élémens et ceux de la première comète observée en 1805 une trop grande ressemblance pour qu'on ne dût pas supposer qu'ils appartenaient au même astre. Le 8 mars suivant, on apprit à Paris, par une lettre de M. Lindenau, que M. Enke avait représenté toutes les observations de cette apparition de 1818, à l'aide d'une orbite elliptique correspondant à une révolution de trois ans et demi. Ce même astronome, ayant soumis à une discussion approfondie la totalité des observations faites en 1805, en a déduit aussi des élémens elliptiques fort peu différens de ceux de la dernière apparition.

Plus tard, M. Enke calcula une éphéméride pour l'apparition future de 1822. C'est dans cette portion de son cours que M. Rumker a aperçu la comète le 2 juin dernier, très-près de la position calculée. Les observations de M. Rumker sont au nombre de quinze : elles comprennent l'arc que la comète a parcouru du 2 au 23 juin 1822. On a trouvé l'accord le plus satisfaisant entre l'observation et le calcul. Au sujet des apparitions de cette comète, on peut consulter les tomes X et XI des *Annales de physique et de chimie*, et le cahier de février 1823.

Les élémens elliptiques donnés par M. Enke, et l'éphéméride calculée sur ces élémens, sont rapportés dans la *Connaissance des temps*, année 1823.

M. Gambey a présenté à l'Académie deux nouveaux instrumens, savoir : 1.° une boussole de déclinaison à l'aide de laquelle on peut déterminer l'angle formé par le méridien

magnétique et le méridien terrestre jusqu'à la précision d'une seconde de degré; 2.° un héliostat construit sur des principes totalement différens de ceux que 'sGravesande avait suivis. Ces deux instrumens ont déjà été soumis à des épreuves multipliées. On peut annoncer, dès à présent, qu'ils font le plus grand honneur à M. Gambey, tant pour l'invention que pour l'exécution. Il n'y a pas maintenant en Europe d'artiste qui travaille mieux et avec plus d'intelligence que M. Gambey.

M. l'abbé Halma, traducteur de l'*Almageste*, publie aujourd'hui sa traduction française des *Tables manuelles* de Ptolémée ; jusqu'ici cet ouvrage n'avait été traduit dans aucune langue : il contient les tables les plus anciennes des mouvemens célestes. Leur époque est la première année du règne de Philippe Aridée. On trouve une analyse de ces Tables manuelles dans le tome II de l'*Histoire de l'astronomie ancienne* de M. Delambre.

Ptolémée a le premier construit ces tables : les astronomes ses successeurs dans l'école d'Alexandrie les ont continuées; et Théon, entre autres, y a fait un commentaire qu'il ne faut pas confondre avec le grand commentaire de Théon sur l'Almageste.

M. l'abbé Halma, à qui l'histoire de l'astronomie est redevable de travaux précieux, a rendu un nouveau service aux sciences en publiant cette traduction des Tables manuelles. Il s'est occupé récemment de recherches sur le zodiaque circulaire de Denderah, et il s'est attaché à prouver que ce monument ne remonte pas au-delà de l'an 364 de l'ère chrétienne. Il fonde cette conséquence sur le calcul d'une éclipse de soleil qui eut lieu le 16 juin de cette année. M. Halma trouve ce phénomène clairement exprimé sur le zodiaque de Denderah par des emblèmes égyptiens du soleil dans la constellation des gémeaux.

STATISTIQUE.

M. le baron Coquebert Montbret a fait, au nom de la commission de statistique, un rapport dont les conclusions ont été comprises dans l'annonce des prix décernés; elles étaient précédées de réflexions importantes sur plusieurs ouvrages qui ont été publiés récemment, et qui ont pour objet d'étendre les connaissances que nous possédions déjà sur le territoire de la France et des colonies.

Nous sommes informés, dit le savant rapporteur au nom de la commission, que plusieurs préfets s'occupent de la description de leurs départemens. L'Académie se souvient du beau travail dont M. le comte de Chabrol a réuni les matériaux nombreux et authentiques qu'il a publiés en 1821 sous le titre de *Recherches statistiques sur la ville de Paris et le département de la Seine*, et qui contient soixante-deux tableaux. Elle apprend avec intérêt que ce magistrat continue ces précieuses recherches, les seules jusqu'à présent dans leur genre, et que la suite en doit paraître incessamment. Grâces soient rendues aux administrateurs qui font servir l'influence et l'autorité de leurs importantes fonctions, ainsi que les secours de tout genre dont ils peuvent disposer, à résoudre des questions d'un égal intérêt pour le Gouvernement et pour les particuliers, pour les sciences exactes et pour les spéculations de l'économie politique! Proclamer les titres que de pareils travaux leur donnent à la reconnaissance, c'est acquitter envers eux une dette publique de la manière la plus convenable.

Le rapport fait ensuite mention des ouvrages relatifs aux colonies. M. Moreau de Jonnès, à qui l'Académie, dont il est correspondant, a décerné, pour un travail général sur les colonies occidentales de la France, le premier prix

de statistique qu'elle ait eu à sa disposition, a commencé à publier des mémoires fort importans sur l'histoire physique de nos Antilles. Il a paru l'année dernière une première partie de cette collection, qui est destinée à compléter l'histoire naturelle de la Martinique et de la Guadeloupe. D'autres ouvrages contiennent des recherches précieuses et intéressantes sur ces îles; et lorsqu'on aura de semblables renseignemens sur la Guiane française, sur l'île de Bourbon et sur nos établissemens de l'Inde, on pourra dire que les colonies sont mieux connues que plusieurs parties de l'intérieur de la France.

M. Benoiston de Châteauneuf, qui a déjà présenté à l'Académie et publié des recherches fort intéressantes sur l'industrie de la capitale, a donné un mémoire dans lequel il rapporte l'ordre de mortalité des femmes parvenues à l'âge de quarante à cinquante ans, et il examine avec beaucoup de soin s'il est vrai que la cessation du flux menstruel occasionne à cette époque de la vie une variation sensible dans la loi de mortalité. M. Fourier a fait, au nom d'une commission, un rapport sur ce mémoire. Il expose les conséquences que l'auteur a déduites de son travail. Elles consistent principalement en ce que cette époque de la vie des femmes que l'on a désignée sous le nom d'*âge critique*, n'est sujette à aucune variation sensible dans la loi de mortalité. Non-seulement la comparaison de toutes les tables où l'on a désigné les sexes n'indique point pour les femmes de cet âge une mortalité plus rapide que celle des hommes, il paraît au contraire qu'à ce même âge la mortalité des hommes est un peu plus accélérée que celle des femmes. Ces conséquences s'étendent à des climats très-divers ; on les observe dans l'ancienne Provence comme à Saint-Pétersbourg et dans les pays




intermédiaires. Conformément à la proposition de la commission, l'Académie a donné son approbation à ce nouveau travail, et l'extrait en sera inséré dans le recueil des *Mémoires des Savans étrangers.*

M. Moreau de Jonnès a lu, dans la séance du 2 juin 1821, un mémoire sur le territoire agricole des colonies françaises: nous ne pourrions pas rapporter ici, avec les détails nécessaires, tous les résultats du travail de l'auteur. Ces recherches intéressent une des branches les plus importantes de la statistique. La conclusion du mémoire, fondée sur des appréciations authentiques, est que, dans leur étendue actuelle, les cultures des colonies de la France sont plus vastes qu'il n'est nécessaire pour fournir tout ce que nous consommons annuellement de sucre, de café et d'indigo.

Si l'on voulait que ces cultures produisissent en outre pour le commerce d'exportation une quantité égale de ces denrées, et, de plus, qu'elles nous donnassent le coton que nous consommons chaque année, il faudrait seulement mettre en valeur le quart des terres en friche qui font partie des propriétés, à la Martinique et dans les îles de la Guadeloupe. Ainsi il n'y a aucun fondement à l'opinion commune, qu'il faut regarder nos colonies actuelles comme insuffisantes et incapables de fournir ce qu'exigent la consommation de la France et son commerce extérieur.

MM. Parent du Châtelet et Pavet de Courteille, docteurs en médecine de la faculté de Paris, ont publié des recherches sur la rivière de Bièvre, et M. Girard a exposé dans un rapport l'objet de cet ouvrage.

L'amélioration du cours de la Bièvre et l'assainissement de ses bords dans l'intérieur de Paris avaient été, dès l'année

1790, l'objet d'un important travail de M. Hallé. Les auteurs du mémoire ont, dans ces derniers temps, rappelé l'attention publique sur l'état actuel de ce cours d'eau. Ils en ont donné une description détaillée depuis sa source jusqu'à son embouchure, en indiquant les nombreuses usines dont il entretient l'activité. Une grande partie de la population du faubourg Saint-Marceau trouve journellement du travail dans ces établissemens; et l'on ne peut douter que leur importance ne s'accroisse dès qu'on aura mis à exécution les mesures de salubrité publique propres à préserver cette population laborieuse des dangers auxquels elle peut être exposée le long du cours de la Bièvre, depuis la barrière de l'Oursine jusqu'au port de l'Hôpital. Cette rivière n'est, en effet, entre ces deux limites, qu'un très-long égout découvert; les eaux que retiennent les barrages de plusieurs moulins consécutifs, mêlées à celles des rues adjacentes, sont corrompues par les débris des matières rejetées de diverses manufactures. Le rapporteur, que ses fonctions ont appelé depuis long-temps à faire une étude particulière de la topographie de la capitale et du cours des eaux, pense, avec les auteurs du mémoire, que, pour opérer sur la Bièvre les améliorations que réclament la salubrité publique et l'extension de notre industrie, il suffira, 1.° de procurer aux eaux de cette rivière un écoulement libre pendant huit ou dix heures sur vingt-quatre, en faisant disparaître les barrages qui y facilitent aujourd'hui le dépôt d'une quantité considérable de matières infectes; 2.° de paver le fond de cette rivière et d'en revêtir les bords de murs de maçonnerie; 3.° enfin de ménager, le long de ces murs de revêtement, jusqu'aux habitations voisines, une voie publique assez large pour que la circulation de l'air s'établisse toujours librement autour de ces habitations.

Dans un mémoire qui a pour objet l'agriculture, l'industrie et le commerce de l'Égypte, M. Girard a réuni plusieurs chapitres importans de la statistique d'une contrée célèbre dont la description exacte est due aux voyageurs français.

Tout le monde sait que l'Égypte doit sa fécondité au débordement du Nil. Mais par quels moyens parvient-on à couvrir de ses eaux les terres cultivables? Quel est le système général de ses irrigations? Ce sont les premières questions qu'il faut traiter quand on entreprend de faire connaître les procédés de l'agriculture chez les Égyptiens modernes. Leur pays est traversé par une multitude de digues qui s'étendent depuis le fleuve, ou les principaux canaux qui en sont dérivés, jusqu'à l'entrée des déserts qui limitent toutes les terres cultivables à l'orient et à l'occident du Nil. Lorsque ces eaux sont parvenues à leur plus grande hauteur, on les introduit dans les espaces compris entre ces digues successives; et les campagnes se trouvent ainsi transformées pendant quelque temps en une suite d'étangs dont le niveau s'abaisse par degrés; on en opère le desséchement en pratiquant à jour fixe une ouverture à travers leur digue inférieure; après quoi l'on procède à l'ensemencement des terres qu'on avait tenues submergées. Cet ensemencement, et les autres procédés de l'agriculture, parmi lesquels il faut comprendre les arrosemens artificiels, sont décrits par l'auteur du mémoire avec beaucoup de détails. Il rapporte les nombreuses observations qu'il a recueillies sur les produits des diverses cultures auxquelles les Égyptiens se livrent; enfin il compare quelques-uns de ces produits à ceux de cultures analogues faites sur notre territoire. Ce que les anciens ont écrit de la fertilité de l'Égypte, se trouve pleinement confirmé par les observations de M. Girard. Il croit avec raison que la richesse territoriale de cette contrée s'accroîtrait infailliblement, si l'on y

introduisait les procédés de culture perfectionnés par les modernes et qui seraient applicables à cette latitude.

Pendant long-temps encore, et peut-être toujours, le sol cultivable sera la matière première sur laquelle l'industrie des Égyptiens s'exercera avec plus d'avantage; il n'y a là ni courant d'eau ni combustible au moyen desquels on puisse faire mouvoir les roues hydrauliques ou les machines à vapeur dont l'industrie européenne tire aujourd'hui un si grand parti. La fabrication de vases d'argile, le tissage d'étoffes grossières de lin, de coton et de laine, l'extraction de l'huile de quelques plantes, occupent dans les villages de l'Égypte ceux de leurs habitans qui ne sont point employés constamment aux travaux de l'agriculture. A ces arts de première nécessité s'ajoutent, dans quelques endroits, ceux de fabriquer l'eau de rose, le sel ammoniac, le salpêtre, celui de faire éclore artificiellement des poulets, &c. Les métiers qui ont pour objet la construction et l'ameublement des habitations, la sellerie, les équipages de guerre, &c., sont exercés dans les villes, où l'on trouve aussi quelques orfévres et quelques lapidaires. Ce qui peut satisfaire le luxe des riches est, en général, fourni par les étrangers. L'Égypte, placée au centre de l'ancien continent, fut dans l'antiquité et pourra devenir encore l'entrepôt d'un commerce d'une grande importance : aujourd'hui c'est le seul pays qui ait des relations étendues avec l'intérieur de l'Afrique. Des caravanes plus ou moins nombreuses arrivent au Kaire, chaque année, des pays de Sennar et de Darfour. M. Girard donne sur ces caravanes et leur itinéraire des renseignemens d'un grand intérêt; il indique les marchandises qu'elles apportent et celles qu'elles prennent en retour. Le pélerinage de la Mecque est l'occasion d'un échange régulier de produits entre les nations barbaresques et les Égyptiens. Le commerce des productions de

l'Inde, de l'Arabie, et de l'occident de l'Europe, fait par la voie de ce pélerinage, se soutient avec avantage à l'aide des priviléges que lui accordent toutes les nations qui professent l'islamisme. Ces relations commerciales étaient la source des bénéfices que la France, l'Italie et l'Allemagne, tiraient autrefois de leurs importations en Égypte. Un autre ordre de choses peut s'établir : l'agriculture, l'industrie, le commerce de cette contrée peuvent changer de face par de rapides améliorations. Le mémoire dont nous venons d'indiquer l'objet, subsistera comme un document très-utile ; il fait connaître exactement l'état dans lequel nous avons trouvé ce pays à la fin du XVIII.e siècle.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences pendant l'année 1822.

PARTIE PHYSIQUE,

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

MÉTÉOROLOGIE ET PHYSIQUE GÉNÉRALE.

UNE pierre météorique est encore tombée cette année en France, aux environs d'Épinal, et plusieurs fragmens en ont été déposés au Muséum d'histoire naturelle. Sa chute a offert tous les phénomènes accoutumés.

Celle dont nous parlâmes l'année dernière, et qui tomba le 15 juin 1821 à Juvenas, département de l'Ardèche, a été analysée par M. Vauquelin et par M. Laugier. Elle diffère

des autres seulement en ce que le nickel y manque, et qu'elle contient une petite quantité de potasse qui vient d'un peu de feldspath disséminé dans sa masse. Les pierres de Jonzac et de Lontola lui ressemblent sous ce rapport et sous d'autres; elles manquent de nickel, mais contiennent du chrôme, peu de soufre, peu de magnésie, et au contraire beaucoup de chaux et d'alumine.

Un globe de feu vu à Sens et à quinze lieues aux environs avec une détonation qui ressemblait à un violent coup de canon, et dont M. Thénard a communiqué la relation à l'Académie, pouvait aussi faire croire à une chute d'aérolithe; mais, quelque recherche que l'on ait faite, il n'en a été recueilli aucun.

M. Moreau de Jonnès a rendu compte d'un météore lumineux vu à la Martinique le 1.er septembre à huit heures du soir, d'une grandeur considérable. Il se mouvait rapidement vers l'est, produisant un bruit semblable au roulement du tonnerre, et a éclaté avec une détonation violente. On peut croire que c'était un aérolithe; ce qui serait le premier phénomène de cette espèce dans l'archipel des Antilles: malheureusement il n'en a point été recueilli de produit; et, en fût-il tombé, il serait difficile qu'on espérât les découvrir dans une île profondément découpée par la mer, et plus qu'à moitié couverte de forêts.

Dans la même île il y a eu un tremblement de terre le 1.er août à huit heures du matin; c'était le premier depuis près de deux ans.

M. Moreau de Jonnès a réuni toutes les notices qu'il a présentées à l'Académie depuis plusieurs années, et, les enrichissant de grands développemens, en a composé une *Histoire physique des Antilles*, dont le premier volume a paru. L'auteur y traite de la structure géologique de ces îles, de

leur climat et des minéraux particuliers qu'elles renferment. On y pourra remarquer des chapitres pleins d'intérêt sur les variations locales de leur température, sur l'état hygrométrique de leur atmosphère, et sur les ouragans qui les dévastent si cruellement. L'auteur parlera dans un autre volume de leurs végétaux et de leurs animaux, et il a déjà préludé à ce travail par un Mémoire sur le nombre des plantes de la Flore caraïbe et sur la proportion numérique des familles qui la composent. La multitude et la diversité de ces plantes sont d'autant plus étonnantes qu'elles contrastent avec le petit nombre des animaux, et que les courans de ces mers, étant à peu près invariables, ont dû apporter toujours les mêmes graines; mais la force de la végétation est si grande, que tout ce qui arrive réussit et se propage. Elle oppose même de grands obstacles aux travaux des agriculteurs; et encore aujourd'hui, après deux siècles d'efforts, l'emplacement des villes et les champs cultivés n'occupent que l'intervalle pratiqué péniblement entre les grandes forêts des montagnes et les palétuviers des rivages. Le feu seul peut détruire momentanément ces forêts épaisses qui renaissent pour peu que le terrain soit négligé. Les sentiers peu fréquentés sont bientôt envahis par des arbustes; chaque année on est obligé d'extirper les végétaux qui couvrent les glacis des forteresses; pour peu qu'une habitation soit abandonnée, une forêt en occupe promptement les cours et les toits et en cache les murs. Souvent, pendant la saison des pluies, il sort des agarics et d'autres champignons des parois des appartemens. M. Moreau de Jonnès a observé jusqu'à dix-huit cent vingt-trois espèces de végétaux phanérogames dans l'archipel caraïbe, et il estime qu'il peut s'y trouver six cents cryptogames. Lui-même a reconnu plus de cent soixante espèces de fougères. L'auteur se livre à de grands développemens pour déterminer quelles proportions prennent dans ce nombre les principales familles

de végétaux, dans la vue d'étendre ainsi, en ce qui concerne ces îles, les belles recherches de M. de Humboldt sur la distribution géographique des familles végétales.

CHIMIE.

Lorsque l'on met en contact avec le chlore, soit de l'alcool, soit de l'éther sulfurique, soit de l'hydrogène percarboné, on obtient des composés liquides dont l'analyse n'a point encore été faite complétement.

Le produit du troisième de ces rapprochemens, découvert par les chimistes hollandais, et particulièrement étudié par MM. Robiquet et Colin, passait pour être composé de parties égales en volume de chlore et d'hydrogène percarboné, et cette détermination était fondée sur ce que la densité du liquide est égale à celle des deux gaz.

Quant au produit de l'action mutuelle du chlore et de l'alcool, on ne se faisait point d'idée arrêtée de sa composition.

M. Despretz a présenté à l'Académie des expériences qui prouvent qu'il doit être formé d'un volume de chlore et de deux volumes d'hydrogène percarboné.

L'éther sulfurique traité par le chlore donne deux liquides d'apparence huileuse et de densité différente, et l'un et l'autre moins volatils que le liquide produit par le chlore et l'alcool.

M. Despretz a aussi essayé d'en faire l'analyse; et, sans être encore entièrement satisfait de ses résultats, il conclut que l'un de ces deux liquides, au moins, est un nouveau composé de chlore et d'hydrogène percarboné : cette conclusion ne sera confirmée que par une analyse complète, lorsqu'elle aura pu être faite avec rigueur.

Dans cette recherche, M. Despretz a fait quelques obser-

vations intéressantes en mettant en contact de l'hydrogène percarboné avec les chlorures de soufre et d'iode.

Le chlorure d'iode ainsi traité lui a donné un liquide incolore, d'odeur et de saveur agréables, qui se congèle à zéro du thermomètre en lames cristallines; et lorsque la quantité du gaz percarboné a augmenté, il s'est formé un solide blanc et cristallin.

Le chlorure de soufre ne donne, avec le gaz en question, qu'une seule substance visqueuse, plus fixe que l'eau, difficilement combustible, et d'une odeur désagréable.

Ces observations mettent sur la voie de recherches ultérieures qui compléteront sans doute l'histoire de toutes ces transformations.

Depuis les travaux de Crawfurd et de Lavoisier, les physiologistes ont fait revivre les opinions avancées dès le XVII.e siècle par Mayow et par Willis, et ont attribué généralement la chaleur animale à la fixation de l'oxigène absorbé pendant la respiration, ou, en d'autres termes, à l'espèce de combustion qui a lieu dans cet acte. En effet, dans les belles expériences de Lavoisier et de M. de Laplace, le charbon faisait fondre, en se brûlant, plus de quatre-vingt-seize fois son poids de glace; et la liquéfaction de même genre que produisait un animal à sang chaud, répondait à la quantité d'acide carbonique que sa respiration produisait, ou plutôt à celle de l'oxigène que sa respiration combinait avec le carbone de son sang, sauf un léger excédant que les auteurs attribuaient à la combustion d'une partie de son hydrogène.

Cependant ces expériences avaient cette cause d'incertitude, qu'on avait mesuré l'effet calorifique sur un animal, et l'absorption de l'oxigène sur un autre; tandis que depuis l'on s'est assuré que l'état des animaux, le plus ou moins de pureté

ou de chaleur de l'air où ils respirent, produisent des différences très-considérables.

Pour donner à ces recherches toute la rigueur dont elles sont susceptibles, M. Dulong, que l'Académie vient récemment d'acquérir, s'est servi d'un appareil où l'on mesure tout-à-la-fois, et sur le même individu, la chaleur produite et l'oxigène absorbé. Il emploie le calorimètre à eau de l'invention de M. de Rumford, dont nous avons parlé en 1814, et où l'eau, en commençant l'opération, est autant au-dessous de la température atmosphérique qu'elle est au-dessus en finissant. Il enferme l'animal dans une boîte du calorimètre, mais où cette eau ne peut pénétrer, tandis que l'on y renouvelle l'air à volonté au moyen d'un gazomètre à pression constante; et cet air, dont on ménage le courant de façon que l'absorption ne passe pas cinq centièmes, ressort, après avoir été respiré, par des tuyaux qui transmettent sa chaleur à l'eau qu'ils traversent et qui le portent dans un autre gazomètre où une lame de liége, enveloppée de taffetas imperméable, le sépare de la surface de l'eau et empêche qu'elle n'absorbe son acide. On ménage à volonté la pression dans chacun des deux gazomètres, et l'on peut facilement, et à chaque instant, déterminer le volume, la température et la composition soit de l'air que l'on donne à respirer, soit de celui qui sort après avoir été respiré.

Quand l'eau du calorimètre a acquis autant de degrés au-dessus de l'atmosphère qu'elle en avait au-dessous en commençant à faire respirer l'animal, il ne reste qu'à analyser l'air expiré et à comparer la chaleur acquise par l'eau à la quantité d'oxigène qui a été absorbée.

M. Dulong a trouvé que le volume de l'acide carbonique produit était toujours moindre que celui de l'oxigène absorbé, d'un tiers dans les oiseaux et les quadrupèdes carnassiers, d'un dixième dans les herbivores.

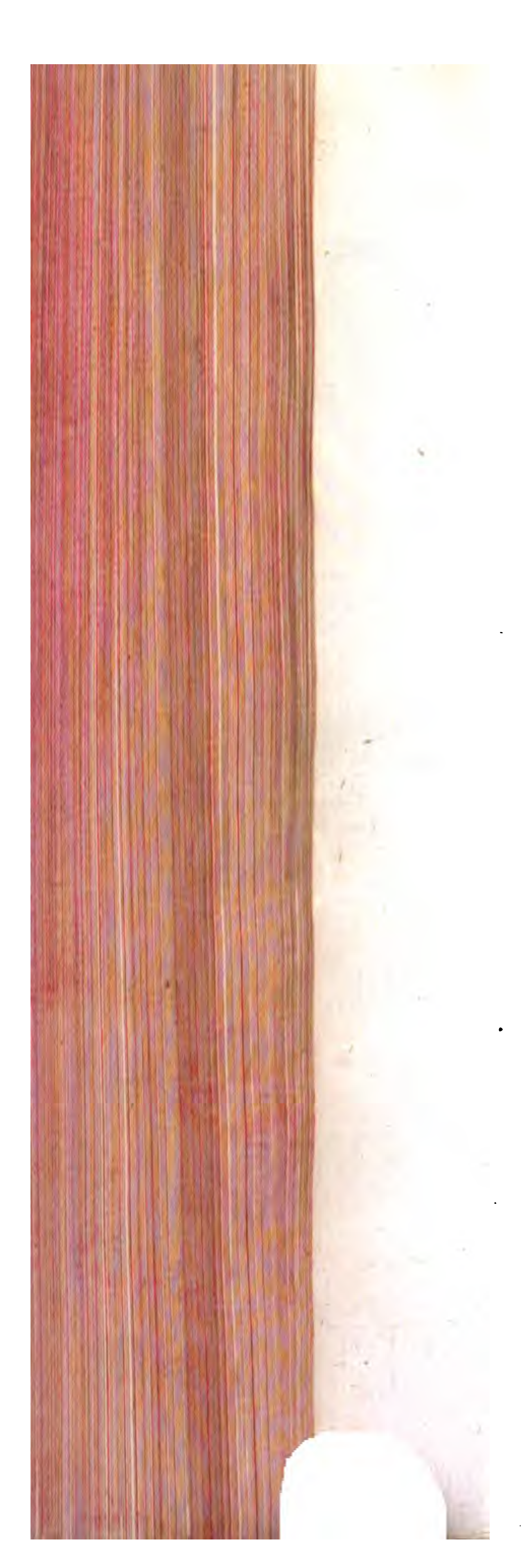
Il a observé encore qu'il y avait toujours exhalation d'azote, et si forte, que dans les herbivores le volume de l'air expiré surpassait celui de l'air inspiré, malgré la diminution de volume du gaz acide carbonique.

Enfin il a trouvé que la portion de chaleur correspondante à celle de l'acide produit ne fait guère que moitié de la chaleur totale donnée par l'animal dans les carnassiers, et va à peine aux trois quarts dans les herbivores ; que si l'on prend pour base la quantité d'oxigène absorbé, au lieu de la quantité d'acide carbonique produit, supposant qu'une partie de cet oxigène a été employée à former de l'eau, on trouve une différence en plus, mais qui n'équivaut jamais, à un cinquième près, à la chaleur produite par l'animal.

En supposant exactes les évaluations de MM. Lavoisier et de Laplace sur la chaleur donnée par le carbone et l'hydrogène, il ne reste, pour apprécier parfaitement les résultats de M. Dulong, qu'à s'assurer que la combustion de ces substances, lorsqu'elles font partie de certains composés, donne la même chaleur que lorsqu'on les brûle séparément et isolées ; mais l'incertitude qui pourrait subsister à cet égard n'irait pas jusqu'à la proportion que nous venons d'énoncer, et il n'est guère douteux qu'il n'y ait à chercher encore une autre cause que la fixation de l'oxigène pour expliquer la totalité de la chaleur animale.

MINÉRALOGIE ET GÉOLOGIE.

L'Académie a eu le malheur de perdre l'un de ses plus illustres membres, M. Haüy, au moment où il était occupé de publier une nouvelle édition de son célèbre ouvrage sur les minéraux : mais le public n'en sera pas privé ; tout le manuscrit était préparé, et l'impression s'achève sous les yeux de M. Delafosse, l'un des élèves les plus distingués de



M. Haüy, et celui qu'il avait choisi depuis long-temps pour le seconder dans les détails de cette grande entreprise.

On a déjà deux volumes qui embrassent toute la théorie mathématique de la cristallisation, et trois autres sur la minéralogie proprement dite ; le quatrième et dernier reste seul à paraître.

C'est en portant à ce degré de perfection un ouvrage depuis long-temps admiré du monde savant, que cet homme de génie a terminé une carrière si féconde pour le développement de l'une des branches les plus importantes et les plus difficiles des sciences naturelles.

Les matériaux les plus utiles à la géologie sont les descriptions spéciales et topographiques des divers pays où l'on note avec soin l'ordre dans lequel les bancs qui composent leur sol se succèdent, soit dans une superposition horizontale, soit en s'appuyant obliquement les uns sur les autres. Ce dernier genre de succession, propre aux bancs plus anciens, se voit plus facilement qu'ailleurs, le long des bords escarpés de la mer, où l'on en suit horizontalement un plus grand nombre que l'on ne pouvait faire par des percemens verticaux, puisque l'on y voit successivement sortir en quelque sorte de dessous terre des couches qui, dans d'autres lieux, sont enfoncées à une grande profondeur. Pénétré de cette vue, M. Constant Prévost, naturaliste habile, élève de M. Brongniart, a suivi *les falaises de la Picardie et de la Normandie*, depuis Calais jusqu'à Cherbourg.

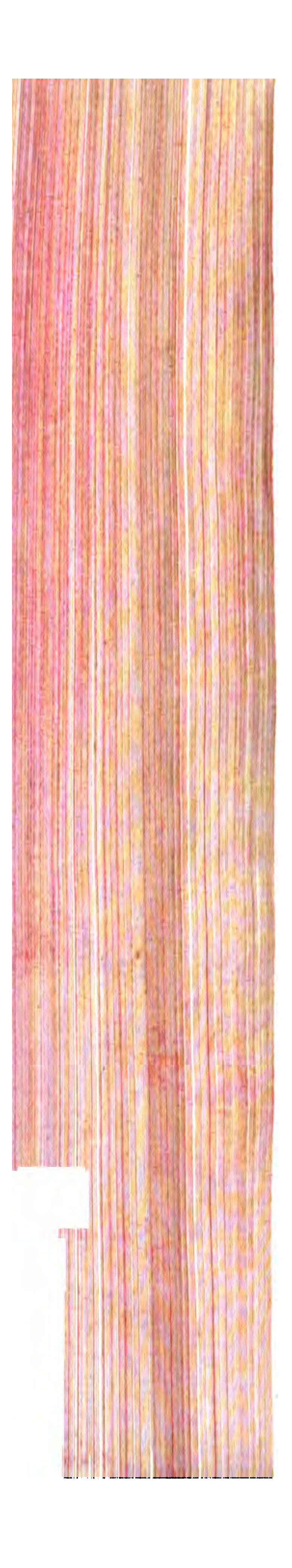
Aux deux extrémités de cette ligne, de près de quatre-vingts lieues, on reconnaît les mêmes roches, et des roches qui appartiennent aux terrains primordiaux, et forment comme les bords de l'immense bassin dans lequel se sont déposés les bancs des terrains postérieurs.

C'est vers Dieppe que paraît être le milieu de ce bassin, et

que l'on ne voit à jour que les bancs les plus superficiels, qui sont presque horizontaux. Des deux côtés se relèvent obliquement les bancs intermédiaires.

M. Prévost a présenté un tableau de cette coupe, où une enluminure ingénieuse montre les grandes divisions de terrain avec leurs caractères généraux et leurs dernières subdivisions, par conséquent tous les faits de détail qui en composent l'histoire.

Dans cette série, le calcaire coquillier le plus ancien est celui que caractérisent les huîtres dites *gryphées*, et que l'on retrouve identique au pied du Jura. Après lui vient le calcaire nommé *lias* par les Anglais, et ensuite le calcaire *oolithique*. C'est entre les bancs de ce dernier qu'est interposée cette marne argileuse qui contient une espèce remarquable et inconnue de fossile appelée *ichthyosaurus*, l'un des reptiles qui aient vécu le plus anciennement sur le globe. La pierre de Portland et les pierres de Caen, si connues par leur facilité à se tailler et leur emploi en architecture, appartiennent à ce calcaire oolithique : sur lui repose la craie avec ses bancs de silex. Mais un fait très-remarquable, et que M. Prévost paraît avoir constaté, c'est qu'on observe en abondance dans certains oolithes des coquilles nommées *cérites*, et d'autres, très-communes aussi dans le calcaire grossier, terrain supérieur à la craie, et qui est séparé par toute l'immense épaisseur de celle-ci du terrain oolithique, tandis que la craie elle-même n'en offre aucune trace. On trouve aussi dans l'oolithe des ossemens de poissons et de reptiles, et nommément d'un *crocodile* inconnu. Il y a encore une et même deux autres espèces de crocodiles dans les marnes bleuâtres, placées entre le calcaire oolithique et la craie, qu'il ne faut pas confondre avec celles que l'on voit entre l'oolithe et le calcaire à gryphées. Sur la craie se voient quelques lambeaux de nos terrains des environs de Paris, et sur-tout de notre terrain d'eau



douce inférieur, et des lignites qui en forment souvent une grande partie.

C'est ainsi que M. Prévost arrive à lier par une succession non interrompue les anciens terrains dits *primitifs*, ou antérieurs à la vie, avec nos terrains récens des environs de Paris, décrits avec tant de détails par MM. Brongniart et Cuvier; mais, sur ces derniers terrains eux-mêmes, M. Prévost a fait encore des observations intéressantes.

Ceux de transport, situés à l'est de la rivière de Dive, ne lui ont montré que des débris des silex de la craie et de ses couches les plus profondes, tandis qu'à l'ouest ils ne lui ont offert que des fragmens roulés de quartz et de grès appartenant aux couches de transition du Cotentin, qui sont encore de beaucoup inférieures à la craie. Ces divers débris ne viennent pas cependant de la profondeur; mais ils s'expliquent par la première observation de l'auteur, celle qu'à mesure qu'on se porte vers les extrémités du bassin on y rencontre les terrains plus anciens et plus profonds qui se relèvent et qui embrassent les terrains plus récens et plus superficiels. C'est des crêtes redressées de ces terrains anciens que leurs débris ont pu être roulés sur les terrains modernes qui forment des plaines moins élevées.

Ce résultat général des observations de M. Prévost est accompagné de plusieurs faits de détail dont les conséquences intéressent toute la géologie. Ainsi il a vu dans la craie des silex en couches continues et fort étendues, dont quelques parties paraissent avoir été rompues et déplacées, et d'autres fléchies et diversement courbées; ce qui annonce qu'à une certaine époque elles ont été dans un état de mollesse.

Il a constaté que les belles carrières de Caen, depuis si long-temps célèbres, appartiennent aux couches supérieures du calcaire oolithique. Il a vérifié à Valognes des dépôts que M. de Gerville avait déjà fait connaître, et qui contiennent

pêle-mêle des coquilles d'âges très-différens ; mais il a vu aussi que ces dépôts sont dans des vallées étroites ou de longues cavités, placées entre des bancs presque verticaux de roches primitives, et que les coquilles y sont dans un ordre inverse de leur ancienneté, et avec toutes les marques d'un transport violent et lointain, sans y être recouvertes par aucune roche.

M. Beudant, savant minéralogiste, dont nous avons eu plusieurs fois occasion de citer les travaux, et qui vient d'être nommé professeur à la faculté des sciences de Paris, a fait, par ordre du Roi, en 1818, *un voyage en Hongrie*, l'un des pays de l'Europe les plus intéressans par rapport aux nombreux produits du règne minéral qu'il recèle, aussi bien que par leur disposition géologique dont on n'avait point encore de connaissance suffisante. Il a présenté à l'Académie le résultat de ses observations, qu'il a fait imprimer depuis en trois volumes *in-4.°* Il importait sur-tout de tracer dans ce pays la limite encore incertaine entre les terrains *à mine d'or* et les terrains dits *de trachyte* et présumés de la plus ancienne origine volcanique. A cet effet, M. Beudant a fait de Schemnitz un centre d'excursions qu'il a dirigées en divers sens, et qu'il a même portées jusqu'aux mines de sel de Wieliczka en Gallicie. Des frontières de la Transylvanie il est revenu par Pesth et le sud-ouest du lac Balaton, où il a observé de vastes terrains basaltiques. Une grande carte de tout ce royaume, deux cartes particulières des environs de Schemnitz et de ceux du lac Balaton, et dix-sept planches de coupes, représentent ce qu'il a pu déterminer sur la disposition géologique des terrains. Quant à la Transylvanie et au Bannat, l'auteur n'a pu en parler que d'après d'autres minéralogistes.

Il fait voir que le terrain à mine d'or, formé d'une *syénite* ou *grünstein porphyritique*, appartient à la série des terrains

de transition, ou tout au plus aux derniers terrains primitifs; et il le juge, d'après les couches subordonnées qu'il renferme, d'une nature étrangère aux volcans, bien qu'il soit souvent recouvert par des terrains volcaniques. et qu'il contienne des pyroxènes et des feldspaths vitreux fort semblables à ceux des trachytes. Quant à ces derniers terrains, l'auteur en donne une description très-détaillée, et distingue avec le plus grand soin leurs différentes variétés, ainsi que toutes les substances qu'ils enveloppent, et les couches formées des amas de leurs débris.

Les variétés se succèdent ou plutôt se circonscrivent dans un ordre assez déterminé, et sont circonscrites à leur tour par les couches de leurs débris, de manière à former des groupes de montagnes qui ont chacune un centre et des irradiations; c'est dans les couches de débris ou les conglomérats que sont situées les roches d'où se tire l'alun, et que sont enchâssées en quelques endroits ces belles opales si célèbres en bijouterie. Dans ceux de ces conglomérats qui sont formés des débris des roches les plus poreuses, les plus semblables à la pierre ponce, se trouvent des bois changés en opale, des impressions végétales et des coquilles dont plusieurs ressemblent à celles de nos pierres calcaires.

Ce qui est plus extraordinaire, c'est que les roches trachytiques contiennent quelquefois en amas irréguliers de l'argent sulfuré contenant de l'or.

Ces terrains de trachytes ne sont jamais recouverts que par des terrains tertiaires analogues à ceux de nos environs: ainsi leur formation est relativement assez récente.

M. Beudant partage l'opinion de ceux qui attribuent à ces terrains trachytiques une origine ignée; mais il regarde comme assez probable qu'ils sont dus à des éruptions soumarines. En Hongrie, ils sont constamment séparés des basaltes.

Plusieurs autres observations et discussions, dans le détail

desquels il nous est impossible d'entrer, ajoutent un grand prix à cet ouvrage, qui a paru aux commissaires de l'Académie se distinguer d'une manière éminente de la plupart de ceux du même genre.

L'importance des débris fossiles de corps organisés, considérés comme des monumens des catastrophes du globe, s'étend aujourd'hui à toutes les classes.

M. Desmarest s'est occupé de celle des crustacés, et a présenté à l'Académie un ouvrage, imprimé depuis, où il traite des *écrevisses* et des *crabes* trouvés à l'état de pétrification. Comme tous ceux qui s'occupent des fossiles, M. Desmarets a été obligé de découvrir des caractères distinctifs qui pussent se retrouver dans des individus mutilés, et remplacer ceux que les naturalistes ont coutume de tirer et tirent aisément des individus entiers, mais qui par leur nature ont dû presque toujours disparaître dans les fossiles. Il a donc étudié le test de ces animaux, et a cherché à y distinguer par des dénominations précises les divers compartimens qui en occupent la surface, et les sillons qui les séparent, aussi bien qu'à déterminer les rapports du nombre et de la courbure de ces compartimens et de ces sillons, avec les genres et les sous-genres ou divisions et subdivisions naturelles de ces animaux; idée d'autant plus heureuse, que ces compartimens correspondent avec assez de constance à des viscères différens, dont les volumes relatifs influent sur l'étendue de ces compartimens, en sorte que le plus ou le moins de grandeur de ces derniers est dans un rapport intime avec la nature de chaque animal.

Un sillon en forme d'H majuscule placé sur le milieu du test des crabes et des écrevisses, et dont les branches se subdivisent dans diverses directions, partage ce test en trois régions médianes placées à la suite l'une de l'autre, et en

trois divisions latérales de chaque côté, auxquelles M. Desmarets donne des noms d'après les organes qu'elles recouvrent; et c'est d'après leurs proportions et leurs positions relatives, jointes à la forme générale, qu'il reconnaît ses genres et ses sous-genres.

Il a décrit ainsi jusqu'à trente-quatre espèces de crustacés fossiles, appartenant à des subdivisions zoologiques différentes, et enfouis dans des terrains de différentes formations. Les plus anciens se trouvent dans les schistes de calcaire argileux de la vallée de l'Altmühl, et nommément dans les carrières de Pappenheim. Il y en a même une espèce à longue queue qu'on ne peut rapporter à aucun des sous-genres connus aujourd'hui, et l'on y en voit une de *limule* ou crabe des Moluques, genre maintenant étranger à l'Europe : mais on n'y a encore découvert aucun crabe proprement dit, ou à queue courte et repliée; ces crabes deviennent au contraire fort communs dans les couches supérieures. La série de ces animaux commence en quelque sorte où finit celle des trilobites, dont nous avons parlé, d'après M. Brongniart, dans notre analyse de 1819.

Elle se continue ensuite dans les terrains plus récens; car il existe des crustacés fossiles dans les couches argileuses inférieures à la craie, dans le calcaire grossier, et jusque dans les terrains d'eau douce.

A cet ouvrage, qui est imprimé avec celui de M. Brongniart sur les trilobites, sont jointes de belles planches lithographiées, où l'auteur a eu l'attention de compléter chaque figure par le rapprochement d'individus mutilés différemment, mais dont l'identité d'espèce ne restait pas douteuse.

Le travail de M. Adolphe Brongniart sur les végétaux fossiles, dont nous avons parlé l'année dernière, a aussi été publié avec des lithographies très-délicates. Cet art, en se perfectionnant, devient chaque jour plus utile aux sciences

naturelles, qui ont tant de besoin de moyens peu dispendieux de représenter les formes, objet principal de leur étude.

M. Latreille a communiqué un mémoire de M. Germar sur un de ces crustacés fossiles. C'est une espèce de *cymothoa* (genre voisin des cloportes), qui devait vivre dans des cavités de roche à la manière de quelques espèces vivantes découvertes depuis peu sur les côtes d'Angleterre. On l'a trouvé dans un schiste bitumineux de Saxe.

M. Brongniart a découvert auprès de Coulommiers une pierre analogue à celle que l'on nomme vulgairement *écume de mer*, et composée de vingt-quatre parties de magnésie, cinquante-quatre de silice, vingt d'eau, et une ou deux d'alumine. Un examen attentif des couches entre lesquelles elle était placée, et des coquilles qui s'y rencontraient, lui a fait reconnaître que son gisement est dans ce terrain d'eau douce, mélangé de calcaire et de silice, qui, dans nos environs, est interposé entre deux formations marines. D'après cette indication, il l'a retrouvée en plusieurs autres points du bassin de Paris, et il s'est assuré que dans plusieurs pays éloignés, près de Madrid, en Piémont et ailleurs, des pierres de même nature se trouvent dans des gisemens très-analogues.

C'est ainsi que les lois géologiques prennent chaque jour plus de généralité.

On le voit plus que jamais dans l'immense travail dont M. Brongniart vient d'enrichir la description géologique des environs de Paris, qui lui est commune avec M. Cuvier. Dans ce travail additionnel, entièrement propre à M. Brongniart, ce savant géologiste suit les terrains analogues à ceux de Paris dans tous les pays où il a été possible de les observer, et fait voir qu'ils s'étendent sans modification bien importante à de très-grandes distances.

Il a communiqué à l'Académie l'article qui regarde les terrains d'eau douce, et principalement ceux de la Suisse et de l'Italie. L'auteur y rapporte ces schistes d'Œningen, près du lac de Constance, si célèbres par les innombrables poissons dont ils recèlent les restes, et qui appartiennent en effet tous à des genres de lacs ou de rivières. Ce gîte de pétrifications se rapporte d'ailleurs à cet immense dépôt de psammites, ou de cailloux et sables roulés, connu en Suisse sous le nom de *nagelflue*, et M. Brongniart le regarde comme d'une époque à peu près contemporaine, peut-être même postérieure à celle des gypses de nos environs.

Les carrières de *travertin*, pierre si utile en Italie pour les constructions, appartiennent également aux terrains d'eau douce; et il n'est en général, dans ce pays, presque aucune petite vallée où l'on n'en découvre quelque dépôt; en sorte que cet ordre de formation, qui était à peine soupçonné il y a vingt ans, bien que son influence sur les hypothèses géologiques dût être si puissante, se trouvera, grâce aux travaux de M. Brongniart, l'un des plus répandus à la surface actuelle du globe.

Les découvertes d'animaux terrestres détruits par les révolutions du globe et qui ne peuvent être connus que par leurs débris, se multiplient chaque jour.

M. Cuvier, qui vient de publier le quatrième volume de son grand ouvrage sur ce sujet, en a communiqué quelques articles à l'Académie avant leur impression.

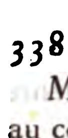
Il lui a fait voir, par exemple, des os et des dents d'un quadrupède de genre inconnu, découvert par M. Lafin, de Turin, dans les lignites de *Cadibona*, près de Savone, et qui était voisin des sangliers et des hippopotames. On en trouve de deux espèces différentes par la grandeur, et l'on vient aussi d'en découvrir, dans quelques endroits de la

France, des espèces analogues. M. Cuvier a nommé ce genre *anthracotherium*.

Le même naturaliste, ayant constaté que des os fossiles d'une espèce voisine du *renne* se déterrent en divers endroits de France, a dû s'occuper de savoir sur quoi repose l'opinion assez répandue qu'il existait des rennes dans les Pyrénées au XIIe siècle. Il a reconnu que cette opinion, mise en avant par Buffon, ne venait que d'une citation tronquée d'un passage du *Traité sur la chasse*, du comte de Foix, Gaston III, surnommé *Phœbus*; et, ayant vérifié dans les manuscrits du temps ce passage, que les imprimés rendent d'une manière inintelligible, il s'est assuré que Gaston n'y parle que des rennes qu'il avait vus dans ses voyages en Norvége et en Suède.

Depuis long-temps on connaissait différentes espèces fossiles de crocodiles. On en a découvert encore une nouvelle l'année dernière dans ce calcaire oolithique des environs de Caen, dont nous venons de parler d'après M. Prévost. Un savant naturaliste de cette ville, M. Lamouroux, en a adressé une notice et plusieurs fragmens intéressans, et, par les soins de l'Académie des sciences et belles-lettres de Caen, il en a été envoyé des modèles en plâtre au Muséum d'histoire naturelle, d'après lesquels M. Cuvier sera en état d'en donner une histoire complète dans le cinquième volume de son ouvrage.

Des missionnaires ont rapporté d'Afrique à Londres une tête de rhinocéros à deux cornes, d'une très-grande taille, et remarquable par la forme grêle et excessivement allongée de sa défense antérieure : d'après un examen superficiel on l'avait crue semblable à ces têtes de rhinocéros fossiles communes en Sibérie, en Allemagne et en Angleterre; ce qui, en prouvant que ces dernières n'étaient pas d'une espèce éteinte, aurait donné des motifs de douter de l'extinction de plusieurs autres animaux fossiles.



M. Cuvier, par une comparaison plus soignée, a montré au contraire que cette tête africaine ressemble, à la grandeur près, qui venait sans doute de l'âge, à toutes celles de l'espèce bicorne d'Afrique, et qu'elle diffère des rhinocéros fossiles autant qu'aucune autre tête de rhinocéros vivans.

PHYSIQUE VÉGÉTALE ET BOTANIQUE.

Depuis long-temps les physiciens recherchent quelle est la cause qui dirige toujours la racine des plantes vers la terre, et leur tige vers le ciel, dans quelque position que leur semence ait été placée; et nous avons fait connaître, dans notre analyse de l'année dernière, des expériences très-ingénieuses de M. Dutrochet, qui tendent à prouver que c'est une force intérieure qui leur imprime cette direction. Il vient d'en faire de nouvelles sur la direction de ces parties, quand la semence que l'on fait germer est en mouvement.

Si l'on fixe des graines en germination sur les rayons d'une roue que l'eau fait mouvoir continuellement, les deux caudex séminaux se dirigent dans le sens du rayon de la roue; la plumule se porte vers le centre, et la radicule vers la circonférence. Cette expérience, qui, comme on le sait, est due à M. Knight, a été répétée par M. Dutrochet, en employant un procédé particulier, qui lui a donné le moyen d'arriver à de nouveaux résultats. Il place des graines, avec suffisante quantité d'eau, dans des ballons de verre, au centre desquels ces graines sont fixées par des fils métalliques. Ces ballons de verre sont ensuite attachés sur une roue qui est mue par un mouvement d'horlogerie avec une vîtesse que l'observateur peut régler à volonté. M. Dutrochet est parvenu par ce moyen aux résultats suivans.

Lorsque les graines, dans leur mouvement de rotation, parcourent plus de trois mètres par minute, les deux caudex

séminaux prennent toujours la direction du rayon; la plumule se dirige vers le centre, et la radicule vers la circonférence. Lorsque les graines parcourent moins de trois mètres par minute, les deux caudex séminaux prennent toujours la direction de la tangente; la plumule se dirige en arrière, et la radicule en avant. Dans le premier cas, les deux caudex séminaux affectent une direction perpendiculaire à celle du mouvement; dans le second cas, la direction de ces mêmes caudex est parallèle à celle du mouvement.

Lorsqu'on fait tourner des graines sur elles-mêmes, et que l'axe de leur rotation est incliné, même fort légèrement, par rapport à l'horizon, les deux caudex séminaux prennent la direction de cet axe; la plumule se porte vers la partie ascendante, et la radicule vers la partie déclive. Lorsque l'axe est parfaitement horizontal, les deux caudex séminaux prennent la direction de la tangente au très-petit cercle décrit par l'embryon.

M. Dutrochet ayant fait tourner sur lui-même un ballon de verre, au centre duquel des graines en germination étaient fixées, fit en sorte que ce ballon recevait, en tournant, de petits coups de marteau sur un point toujours le même de la périphérie. Toutes les plumules se dirigèrent vers le point frappé; toutes les radicules se portèrent vers le point diamétralement opposé. Ici les deux caudex séminaux étaient dirigés parallèlement à la direction du mouvement de secousse. Ayant augmenté, dans une proportion déterminée, le nombre et la force des coups du marteau, les deux caudex séminaux prirent une nouvelle direction; ils se placèrent perpendiculairement à la direction précédente, c'est-à-dire qu'ils affectèrent une direction perpendiculaire à celle du mouvement de secousse.

Ainsi la ligne suivant laquelle se disposent les deux caudex séminaux considérés dans leur ensemble, est parallèle à la



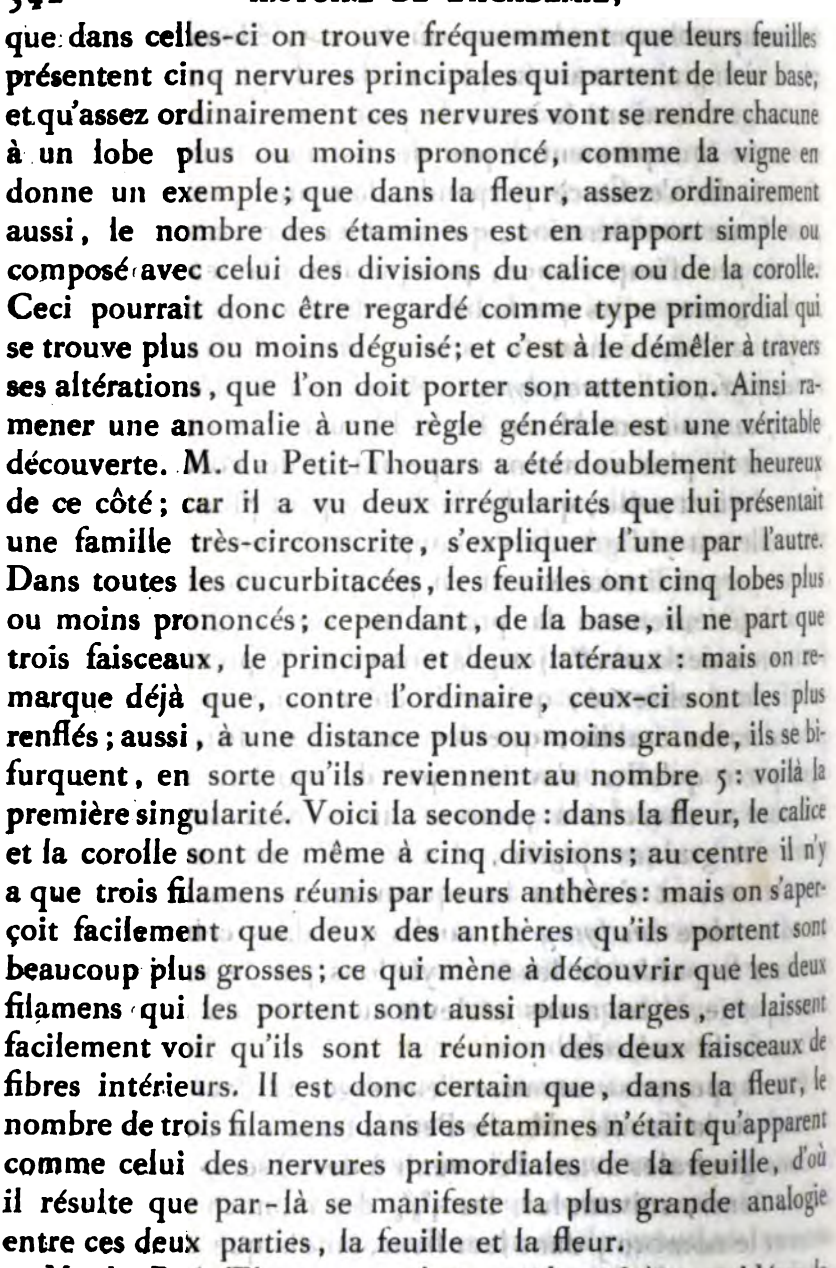
direction du mouvement, lorsque la force de ce mouvement est inférieure à un certain degré moyen, déterminé par l'observation; cette ligne est perpendiculaire à la direction du mouvement, lorsque la force de ce mouvement est supérieure à ce même degré moyen. Dans chacune de ces deux circonstances, la radicule se dirige dans le sens diamétralement opposé à celui de cette tendance.

M. Dutrochet a également soumis à la rotation des tiges garnies de feuilles, et renfermées dans des ballons de verre avec un peu d'eau. Les feuilles soumises à cette expérience ont dirigé leur face supérieure vers le centre de la rotation, et par conséquent leur face inférieure vers la circonférence. Cela s'est opéré au moyen de la torsion des pétioles, c'est-à-dire, de la même manière que s'opère le retournement des feuilles dans l'état naturel.

M. du Petit-Thouars, en continuant à donner la solution des huit problèmes dans lesquels il a résumé sa manière de considérer la fleur comme une transmutation de la feuille et du bourgeon qui en dépend, a présenté plusieurs observations qui lui paraissent importantes pour la physiologie végétale. Il a cherché à prouver, par des exemples faciles à se procurer, que la partie qu'on nommait, depuis Grew, *radicule*, dans les embryons dicotylédons, est une véritable *tige* ou *tigelle*; vérité déjà annoncée par M. Knight en 1819. Cela est évident, selon M. du Petit-Thouars, pour le plus grand nombre de ces plantes, puisque, lors de la germination, les cotylédons sont soulevés depuis le point où reposait la graine jusqu'à une distance plus ou moins grande au-dessus du sol; ce qui ne peut avoir lieu que par l'élongation ascendante de la prétendue radicule qui s'exécutait tout en montant. On distingue par l'épithète d'*épigée* ce mode de germination, par opposition au nom d'*hypogée* qu'on donne aux germinations

beaucoup moins nombreuses où les cotylédons restent à la place où la graine avait été placée : dans le plus grand nombre de ces germinations la radicule prend une direction oblique et s'arrête brusquement à peu de distance, tandis que dans d'autres elle s'enfonce perpendiculairement en formant un *pivot*. Cette considération, qui semblerait majeure, est pourtant de peu d'importance, puisque des plantes rapprochées comme genre, telles que le hêtre et le châtaignier, ou comme simple variété, comme le haricot *commun* et l'*écarlate*, sont, l'une, *épigée*, et l'autre, *hypogée*. Aussi cela tient-il à une légère cause; car, suivant M. du Petit-Thouars, cela provient uniquement du plus ou moins de pesanteur des cotylédons. Leur masse devient telle, que la tigelle ne peut plus les soulever : alors elle est obligée de s'échapper latéralement ou de s'enfoncer perpendiculairement en pivot, et celui-ci porte toujours intérieurement la preuve de son origine aérienne, l'existence de la *moëlle* jusqu'à une certaine profondeur. C'est ce fait, mal observé, qui avait été allégué contre l'opinion généralement établie, que les racines se distinguaient des tiges parce qu'elles n'avaient pas de moelle. M. du Petit-Thouars a cherché à prouver directement son assertion : fixant des graines *épigées*, il a vu leur radicule se diriger latéralement et s'arrêter brusquement comme dans le plus grand nombre des *hypogées*; tandis que dans celles-ci, en diminuant le poids de leurs cotylédons par le retranchement d'une partie, il les a vus soulevés au-dessus du sol par l'élongation de la radicule.

Pour appuyer sa manière d'envisager la fleur comme provenant de la feuille, M. du Petit-Thouars a cité des observations générales avant d'en venir à des observations particulières. Ainsi, suivant lui, les $\frac{99}{100}$ des monocotylédones présentent le nombre 3 dans leur fleur, tandis que dans les dicotylédones les $\frac{9}{10}$ dépendent du nombre 5 ; il a fait remarquer



que dans celles-ci on trouve fréquemment que leurs feuilles présentent cinq nervures principales qui partent de leur base, et qu'assez ordinairement ces nervures vont se rendre chacune à un lobe plus ou moins prononcé, comme la vigne en donne un exemple; que dans la fleur, assez ordinairement aussi, le nombre des étamines est en rapport simple ou composé avec celui des divisions du calice ou de la corolle. Ceci pourrait donc être regardé comme type primordial qui se trouve plus ou moins déguisé; et c'est à le démêler à travers ses altérations, que l'on doit porter son attention. Ainsi ramener une anomalie à une règle générale est une véritable découverte. M. du Petit-Thouars a été doublement heureux de ce côté; car il a vu deux irrégularités que lui présentait une famille très-circonscrite, s'expliquer l'une par l'autre. Dans toutes les cucurbitacées, les feuilles ont cinq lobes plus ou moins prononcés; cependant, de la base, il ne part que trois faisceaux, le principal et deux latéraux : mais on remarque déjà que, contre l'ordinaire, ceux-ci sont les plus renflés; aussi, à une distance plus ou moins grande, ils se bifurquent, en sorte qu'ils reviennent au nombre 5 : voilà la première singularité. Voici la seconde : dans la fleur, le calice et la corolle sont de même à cinq divisions; au centre il n'y a que trois filamens réunis par leurs anthères : mais on s'aperçoit facilement que deux des anthères qu'ils portent sont beaucoup plus grosses; ce qui mène à découvrir que les deux filamens qui les portent sont aussi plus larges, et laissent facilement voir qu'ils sont la réunion des deux faisceaux de fibres intérieurs. Il est donc certain que, dans la fleur, le nombre de trois filamens dans les étamines n'était qu'apparent comme celui des nervures primordiales de la feuille, d'où il résulte que par-là se manifeste la plus grande analogie entre ces deux parties, la feuille et la fleur.

M. du Petit-Thouars ne s'est pas borné à considérer la

moelle des plantes comme partie essentielle de la végétation, il a voulu l'observer intrinsèquement : il lui a reconnu des propriétés physiques qui lui ont paru très-remarquables, et il a découvert, entre autres, qu'elle est douée d'un genre particulier d'*élasticité.* Si l'on détache, sur une branche plus ou moins ancienne, l'espace qui se trouve entre deux feuilles, ce que l'auteur nomme *mérithalle;* qu'on prenne le sureau pour exemple, attendu que c'est l'arbuste de nos climats dont la moelle est la plus ample; qu'elle ait six pouces de long; que, par le moyen d'une broche tenue du même calibre que la moelle, on presse celle-ci, elle cédera facilement en se tassant jusqu'à ce qu'elle soit réduite au sixième de sa longueur, d'un pouce, par conséquent : parvenue là, elle résiste davantage à la pression ; mais, avec un peu d'effort, elle cède tout-à-coup, et on la voit sortir, par une sorte d'explosion, en un cylindre de cinq pouces. Continuant la pression, elle sort tout entière, et se retrouve juste de sa longueur primitive, celle de six pouces. Dans cet état, quoique déjà très-légère, on s'aperçoit qu'elle contient encore une certaine quantité d'humidité; elle ne tarde pas à la perdre, et parvient à un *maximum* de siccité : alors, si on la soumet de nouveau à la pression, soit sur sa hauteur, soit sur sa largeur, elle y obéit facilement jusqu'à un certain point; c'est à peu près le même que celui qu'on avait trouvé lorsqu'on l'a chassée de son mérithalle. Lorsqu'on l'abandonne à elle-même, elle reste dans cet état de dépression : mais, si on la plonge dans l'eau, elle revient plus ou moins promptement, suivant le degré de chaleur de cette eau, à son premier volume; si on la soumet de nouveau à la pression, elle revient tout de suite à son volume primitif, comme la première fois. On voit facilement que c'est parce qu'elle a repris de l'humidité : aussi redevient-elle susceptible de conserver la compression, lorsqu'elle l'a perdue.



Le plus grand nombre des autres moelles, assez larges pour être soumises à ces épreuves, présentent les mêmes effets, notamment celles de vigne, d'*hippocastane*, d'*hydrange*, &c.

Mais celle de figuier se comporte différemment. D'abord, elle est susceptible de pression : car ce n'est que lorsqu'elle est réduite au douzième de son volume, qu'elle s'échappe du mérithalle; mais elle reste dans cet état de compression: on peut la ramener à son volume primitif en la tirant légèrement avec le doigt; mais, dans l'eau, elle revient plus facilement, et toujours d'autant plus promptement que l'eau est plus chaude. C'est en se gorgeant du liquide qu'elle reprend son premier volume, à tel point qu'elle devient plus lourde que l'eau, puisqu'elle y plonge.

Ici se trouve un point de recherche important pour la physique : le volume de cette moelle, dans cet état, ne devait être que de l'eau, plus la petite rondelle provenant de la compression du cylindre; mais celle-ci, quoique réduite au douzième de sa masse, était encore plus légère que l'eau. D'où provient donc le lest qui fait plonger le total?

Dans les derniers jours de gelée de cet hiver, M. du Petit-Thouars, ayant coupé de jeunes branches de figuier pour voir si elles n'avaient pas souffert, après les avoir examinées sous ce point de vue, et s'être tranquillisé pour la future récolte, a voulu en tirer parti pour renouveler ses expériences précédentes sur la moelle; mais, à sa grande surprise, celle-ci est sortie, quoiqu'elle fût à peine réduite au tiers de son volume : en l'examinant, il s'est aperçu que c'était parce qu'elle contenait une plus grande quantité d'humidité; placée dans l'eau, elle a repris son premier volume, et a plongé comme les précédentes.

Ayant placé ensuite dans l'eau le mérithalle ou la portion de branche d'où il avait retiré la moelle, il l'a vu plonger, en sorte qu'il était plus lourd que l'eau; ce qui l'a surpris.

Le dégel étant survenu, il n'a pu réitérer ces épreuves ni les étendre à d'autres plantes; mais cela lui a donné les moyens de constater que, par l'adoucissement de température, la moelle de figuier était redevenue telle qu'il l'avait observée précédemment, c'est-à-dire, ne se dégageant par la pression que lorsqu'elle était réduite au douzième de son volume, et qu'elle revenait de même à son premier point de dilatation. Quant au mérithalle privé de moelle, il ne plongeait plus, et restait en équilibre à la surface de l'eau. Il suit de là que, pendant la gelée, il y avait dans les branches de figuier soumises à l'examen une plus grande quantité de liquide, soit lymphe, soit séve, qu'il n'y en a lorsque le thermomètre est au-dessus de zéro.

M. du Petit-Thouars a trouvé que cela s'accordait avec quelques-unes des observations qu'il a consignées dans son mémoire sur les effets de la gelée dans les plantes, où il dit positivement que toutes les circonstances qu'il avait exposées, semblaient prouver qu'il y a plus de liquide dans les plantes pendant la gelée qu'avant ou après.

M. du Petit-Thouars a déjà annoncé plusieurs fois à l'Académie que, par un procédé aussi simple qu'expéditif, il a fait un examen approximatif du rapport de pesanteur spécifique des différentes parties qui composent le corps ligneux des arbres, suivant qu'il est plus près de la circonférence ou du centre, c'est-à-dire, qu'il fait partie de l'*aubier* ou du *cœur*. Il a trouvé, hors quelques cas extraordinaires, que la couche était d'autant plus lourde qu'elle approchait davantage de l'écorce, en sorte que très-souvent la seule couche annuelle plongeait et que les autres étaient en équilibre ou surnageaient plus ou moins. Ce fait se trouve d'accord avec ses principes, puisque, suivant lui, cette couche extérieure est la réunion des racines des nouveaux bourgeons, et la seule qui soit en pleine végétation; mais il est contraire à l'opinion

générale, qui, regardant le cœur comme le bois dans son état de perfection, le considère comme le plus lourd.

Il a profité de l'occasion d'une palissade de thuias d'Orient qu'on a été obligé d'abattre, pour multiplier ses recherches à ce sujet; mais il a trouvé que dans cet arbre, où le cœur était bien distingué par une couleur fauve, de l'aubier qui était blanc, celui-ci plongeait comme étant gorgé de sucs, tandis que le cœur non-seulement surnageait de plus d'un tiers de sa longueur, mais était tellement sec, qu'il brûlait rapidement en flambant et répandant une odeur très-agréable, en sorte qu'il était à l'état de *bois mort*. Il a constaté que cela avait lieu dans toutes les saisons de l'année, été comme hiver. Ces observations l'ont conduit à expliquer comment un de ces thuias, à qui l'on avait enlevé une ceinture complète d'écorce, a pu végéter pendant dix ans; la couleur blanche de l'aubier, maintenue sous une couche fauve de bois mort, indiquait la route de la séve.

Malgré les exemples nombreux recueillis par tous ceux qui ont écrit sur la *physiologie végétale*, beaucoup de personnes répugnent à croire que non-seulement les arbres écorcés peuvent, comme ce thuia, vivre plusieurs années, mais que, dans des circonstances particulières, ils peuvent réparer complétement leur écorce. On avait rangé parmi les fables ce que Frisch racontait dans les *Miscellanea* de Berlin, an 1723, qu'un seigneur qui aimait à soigner lui-même les arbres fruitiers, n'hésitait pas à leur enlever totalement leur écorce, quand elle devenait trop raboteuse, depuis l'origine des branches jusqu'à celle des racines, sûr que, sans mettre aucun enduit, elle se réparerait, pourvu qu'il prît une saison favorable, le milieu de l'été : cette assertion avait été peu répandue à cause de la répugnance qu'on avait à y croire; en sorte que ce n'est qu'après avoir réussi que M. du Petit-Thouars a appris qu'il ne faisait que confirmer cette décou-

verte : mais il a multiplié les expériences à ce sujet. Il y a des arbres qu'il a écorcés trois années de suite sans qu'ils en paraissent souffrir. Jusqu'à présent ce fait n'est qu'un objet de curiosité ; mais il deviendrait très-important si le chêne était du nombre de ceux qui renouvellent leur écorce. Malheureusement c'est jusqu'à présent presque le seul sur lequel M. du Petit-Thouars ait tenté cette expérience iuutilement. L'auteur a multiplié ses recherches pour expliquer cette réparation de l'écorce. Il a vu d'abord que le premier travail de la nature, pour effectuer la réparation, était de dessécher la superficie du nouveau bois, en formant un épiderme à l'abri duquel il se reformera une nouvelle couche de liber et d'aubier; et, conséquent à ses principes, il a regardé ces deux couches comme étant produites par les bourgeons du sommet. Pour s'en assurer, non content d'écorcer totalement plusieurs espèces d'arbres, il les a étêtés, en sorte que ce n'étaient plus que des bâtons enracinés. Sur tous il a vu paraître l'affluence du parenchymateux devenant vert et se recouvrant d'un nouvel épiderme ; mais c'était une sorte d'effervescence locale qui n'a pas duré long-temps, et tous les arbres ont péri, excepté un seul. C'était un orme. Ayant été préparé comme les autres, il se manifesta des protubérances qui prirent une teinte verdâtre; bientôt on put les reconnaître comme des bourgeons *adventifs:* l'hiver survenant, ils disparurent presque tous ; mais, au printemps suivant, il en reparut un assez grand nombre pour recommencer un nouvel arbre. Il aura pour souche un chicot desséché, et voilà la troisième année qu'il continue de végéter. M. du Petit-Thouars n'a pas été surpris de voir que ce fût un orme qui eût réussi, parce que c'est l'espèce qui produit le plus habituellement des bourgeons adventifs. Cependant l'hippocastane, qui est à peu près dans le même cas, a succombé dans cette opération.

M. Fodera a fait des expériences sur l'extension des effets que l'attouchement produit sur les feuilles de la sensitive. Si l'on en touche légèrement un foliole, il se fermera seul; si l'on en touche plusieurs, ensemble ou successivement, ils se fermeront encore, sans que le mouvement se communique aux autres : mais, si l'on pique un foliole, ou si on le brûle au moyen des rayons du soleil concentrés par une lentille, non-seulement le foliole, mais tous ceux du même rameau de la feuille se fermeront très-promptement, et bientôt ceux des autres rameaux se fermeront aussi, et la feuille tout entière s'abaissera. Si l'on porte la piqûre ou la brûlure sur la tige de la plante, si l'on en coupe une branche avec des ciseaux, sans en agiter les feuilles, celles-ci ne se se ferment point : mais, si l'on applique à cette tige une goutte d'acide nitrique ou vitriolique, toutes les feuilles s'abaissent et se ferment promptement, ainsi que M. Desfontaines l'avait déjà observé il y a nombre d'années.

A propos de ces faits, M. Fodera en rappelle d'autres, que M. Decandolle a constatés autrefois; c'est que la sensitive a, en quelque sorte, des habitudes qu'elle ne perd qu'avec le temps. Si on l'enferme, par exemple, dans un lieu obscur, elle continuera, pendant quelque temps, de fermer ses feuilles seulement quand le soleil est au-dessous de l'horizon, même si on l'éclaire dans ces momens-là par une lumière artificielle; mais, avec de la persévérance, on parvient à lui faire prendre des habitudes contraires, et elle finit par s'épanouir, même pendant la nuit, si on lui fournit une lumière artificielle très-vive.

M. Desfontaines a constaté aussi qu'une sensitive, transportée dans une voiture rapide, se contracte d'abord; mais que peu à peu elle se fait à ce mouvement, et reprend son épanouissement ordinaire comme dans l'état tranquille.

M. Fodera cherche à se rendre compte de ces faits, en

les comparant à ces mouvemens que, dans les animaux, on a nommés sympathiques, et dans lesquels, selon son opinion particulière, le cerveau ni les centres du système nerveux n'interviennent point. Cette dernière thèse deviendrait, en effet, très-facile à prouver, s'il était prouvé que les mouvemens de la sensitive sont de même nature, puisque la sensitive, ainsi que les autres végétaux, manque entièrement de système nerveux.

Tout le monde connaît la cannelle, et depuis bien des siècles : l'arbre qui la produit, espèce particulière de laurier (*laurus cinnamomum*, L.), a été décrit aussi, depuis bien des années, par les botanistes; mais ses variétés et les détails de sa culture avaient besoin de recherches nouvelles, devenues d'autant plus nécessaires, que, grâce aux efforts suivis de l'administration, nous avons aujourd'hui dans nos colonies des plantations de cannelliers, et qu'il importe de ne rien négliger pour les faire prospérer.

M. Leschenault de la Tour, dans son voyage à Ceylan, a soigneusement étudié cette partie de l'agriculture indienne.

Il n'existe qu'une espèce de cannellier : mais son écorce varie selon l'âge de l'arbre, son exposition, sa culture, et la nature du sol; ce qui lui a fait donner plusieurs noms relatifs aux propriétés que les circonstances lui impriment.

Dans un bon terrain, cet arbre s'élève à vingt-cinq ou trente pieds, et son tronc prend de quinze à dix-huit pouces de diamètre; mais l'écorce en est alors trop épaisse pour entrer dans le commerce.

Les corbeaux et les pigeons sauvages, très-friands de son fruit, contribuent beaucoup à en disséminer les graines; mais on en fait aussi des semis et des plantations. C'est à l'âge de six à sept ans que l'on commence à couper, pour les écorcer, les jets les plus forts, parvenus à huit pieds de

hauteur. Il faut les prendre entre dix-huit lignes et deux pouces de diamètre : on choisit, pour cela, le temps des pluies, et l'on s'assure d'abord par une petite entaille que l'écorce se détache aisément. On l'enlève sur le plus de longueur qu'il est possible, et on la met, pour vingt-quatre heures, en paquets, où elle éprouve une légère fermentation qui en détache l'épiderme; elle se roule sur elle-même, et, après un jour de dessiccation à l'ombre, et un autre au soleil, elle est bonne à mettre en vente. Les débris se distillent dans de l'eau salée, et donnent deux sortes d'huiles fort recherchées: l'une légère; l'autre pesante, et qui brûle avec un parfum agréable. On tire aussi de l'huile des feuilles; mais elle est de beaucoup moins précieuse. Les racines donnent beaucoup de camphre; et le bois en contient en si grande quantité, qu'à quinze ou dix-huit ans on en tirerait un meilleur parti pour le camphre que pour la cannelle.

Une partie de ces détails s'accorde avec ce que van Rheede et Burman avaient déjà publié sur le même sujet.

M. Leschenault a envoyé à l'île de Bourbon plusieurs pieds de cannellier, qui y réussissent fort bien, et qui, traités d'après les procédés qu'il indique, seront plus productifs que ceux qui y avaient été transportés en 1772. Les rejetons de ces derniers, multipliés à Caïenne, y donnent depuis long-temps de la cannelle; mais il paraît que l'humidité du climat lui a fait perdre beaucoup de ses qualités.

M. Rafeneau-Delile, professeur de botanique à Montpellier et correspondant de l'Académie, a décrit une plante singulière de la famille des courges. Elle diffère des genres voisins qui ont en général deux sexes séparés, parce qu'elle porte des fleurs hermaphrodites sur les mêmes tiges que les fleurs mâles. Son fruit, long de près de deux pieds, et gros à proportion, se couvre d'une poussière résineuse et inflam-

mable assez abondante pour se laisser recueillir en la raclant, et que l'auteur suppose analogue aux diverses sortes de cires qu'exhalent des végétaux d'autres familles, tels que le *myrica cerifera* de l'Amérique septentrionale, et le *ceroxylum andicola* découvert dans les Cordillières par MM. de Humboldt et Bonpland.

Cette plante, dont les graines ont été adressées à M. Delile par M. Jacquin, est nommée, par ce savant botaniste, *beninaza cerifera*.

Les grands ouvrages de botanique se continuent avec une courageuse persévérance. M. de Humboldt, qu'aucune difficulté n'arrête dans la vaste entreprise à laquelle il consacre depuis vingt-cinq ans ses talens et sa fortune, a conduit pendant cette anné à la dixième livraison sa superbe collection des *mimoses*, et à la vingt-deuxième celle des genres et des espèces nouvelles de la zone torride; qu'il publie avec M. Kunth.

M. Kunth a donné en un volume *in-8.º* le *Synopsis* ou tableau général où l'on voit d'un coup-d'œil tous les genres et toutes les espècés, produits des immenses recherches de M. de Humboldt.

M. du Petit-Thouars a fait paraître cent planches et le commencement d'une histoire des plantes de la famille des *orchis*, qui doit faire partie de la *Flore* des îles de France et de Bourbon, à laquelle ce savant botaniste travaille depuis long-temps.

M. Kunth a publié le premier volume d'un traité où il reprend et examine de nouveau les caractères des genres de la famille des *mauves*, et de celles des *buttuères* et des *tiliacées*; et feu M. Richard, que l'Académie a perdu dans le courant de cette année, avait laissé un écrit sur la famille des *balanophorées*, qui n'a pu nous être présenté que par son fils,

M. Achille Richard, jeune botaniste digne héritier d'une famille qui, depuis près d'un siècle, a rendu de si grands services à la science des végétaux.

Ce serait avec grand plaisir que nous entretiendrions avec plus de détails nos lecteurs du contenu de ces ouvrages importans; mais ils sont à-la-fois si riches et si concis, qu'il faudrait, pour en rendre un compte utile, les copier presque entièrement. Nous ne pouvons donc qu'y renvoyer les amis de la botanique.

PHYSIOLOGIE.

La faculté d'absorber, que plusieurs physiologistes attribuent exclusivement aux vaisseaux lymphatiques, est considérée depuis long-temps par d'autres comme appartenant non moins certainement aux veines pour tout ce qui n'est pas le chyle. Cette question a été traitée de nouveau dans ces derniers temps.

Nous avons parlé, à diverses reprises, des expériences de M. Magendie à ce sujet, et nous avons annoncé aussi, dans notre analyse de 1820, l'ouvrage où MM. Tiedeman et Gmelin ont établi que les veines du mésentère absorbent plusieurs des substances contenues dans les intestins. M. Ségalas vient de communiquer à l'Académie, et de répéter devant ses commissaires, des expériences qui non-seulement confirment en général la faculté absorbante des veines, mais qui prouvent que certaines substances ne peuvent être absorbées que par ces vaisseaux, ou du moins que leur absorption par les vaisseaux lactés est plus lente et plus difficile. Tel est l'extrait alcoolique de noix vomique. Si l'on en remplit une anse d'intestin liée aux deux bouts, et dont les veines sont liées ou coupées, il ne se manifeste, pendant plus d'une heure, aucun signe d'empoisonnement, bien que les vaisseaux

du chyle et les artères soient restés intacts; mais, à l'instant où le cours du sang dans les veines redevient libre, les convulsions commencent, et l'animal périt promptement. Au bout de plusieurs heures cependant, l'animal, préparé comme il a été dit, ne laisse pas d'éprouver les effets du poison; mais M. Ségalas imagine que cela n'arrive qu'en vertu d'une transsudation au travers des membranes de l'intestin.

M. Fodera, jeune médecin sicilien, a présenté un mémoire dans lequel il considère l'absorption et l'exhalation comme une simple imbibition et une simple transsudation au travers des pores du tissu organique et des vaisseaux, lesquelles ne dépendent que de la capillarité de ce tissu. Non-seulement il a vu dans ses expériences des poisons agir au travers de portions de vaisseaux et d'intestins détachés de tout ce qui les environnait; mais même, en introduisant dans un intestin une portion de vaisseau ou d'intestin d'un autre animal, liée aux deux bouts, et où du poison avait été placé, il l'a vu exercer son action sur l'animal au bout d'un temps plus ou moins long. Les gaz délétères ont été absorbés de la même manière. Des vaisseaux liés lui ont montré un suintement au travers de leurs parois. Il pense même que cette imbibition et cette transsudation par le simple tissu poreux des organes peuvent avoir lieu à-la-fois aux mêmes surfaces: ainsi, une anse d'intestin liée et remplie d'une certaine solution ayant été plongée dans une solution différente, il y a eu mélange réciproque; introduction de la solution extérieure, mise au-dehors de l'intérieure. Cette communication mutuelle a lieu aussi pour les gaz. Le diaphragme, le tissu de la vessie, laissent passer dans les deux sens les liquides injectés dans les cavités qu'ils tapissent. Si l'on injecte de la solution de noix de galle dans l'abdomen, et de la solution de sulfate de fer dans la vessie, il se fait de l'encre dans l'une et dans l'autre cavité; il s'en fait des veines à la trachée-artère: c'est du



bleu de Prusse qui se forme, quand, au lieu de noix de galle, on injecte du prussiate de potasse.

C'est par cette manière de voir qu'il explique l'augmentation de l'exhalation dans les inflammations. Le tissu des vaisseaux dilatés est plus perméable.

Toutefois l'auteur est loin de priver les vaisseaux lymphatiques de la faculté d'absorber; leurs parois sont perméables comme toutes les autres, et les liquides en rencontrent toujours quand ils ont à traverser une membrane quelconque.

Aussi M. Fodera réduit-il les résultats de M. Ségalas à une différence de rapidité dans l'absorption, à ce que celle des veines est infiniment plus rapide, et celle des lymphatiques beaucoup plus lente.

Il pense même que si l'on trouve dans le canal thorachique des substances absorbées par les veines, ce n'est pas qu'il ait été nécessaire qu'elles passassent des veines dans les artères, et de celles-ci dans les vaisseaux lymphatiques, mais il croit que ces derniers ont pu les prendre dans les veines immédiatement.

M. Fodera a répété d'une manière extrêmement précise les expériences de MM. Wollaston, Brande et Marcet, qui tendaient à prouver que certaines matières passent directement de l'estomac dans les reins et la vessie, sans avoir besoin d'être entraînées dans le torrent de la circulation. Injectant dans l'œsophage ouvert au-dessous de la gorge du prussiate de potasse, et recueillant de temps en temps le liquide de la vessie au moyen d'une sonde, il a vu ce liquide produire du bleu avec le sulfate de fer, au bout de dix et même de cinq minutes; mais il a trouvé aussi à produire ce bleu avec le sang de tous les vaisseaux qui vont du cœur aux reins, et de ceux qui vont de l'estomac au cœur, ainsi que dans les cavités du cœur : d'où il conclut qu'à la vérité la sécrétion des reins se fait avec une rapidité bien remarquable, mais que

c'est cependant la circulation ordinaire qui en est le conducteur.

Au reste, M. Fodera explique plusieurs des variétés dans la rapidité ou la quantité des imbibitions et des transsudations qui ont lieu dans le corps animal, par les expériences de M. Porret, dans lesquelles on voit que le passage d'un liquide au travers d'une membrane est puissamment favorisé par le courant galvanique.

Nous devons faire remarquer cependant que M. Fohman, professeur de Berne, cherche à atténuer beaucoup les résultats de toutes ces expériences au moyen des anastomoses qu'il a observées entre les vaisseaux lymphatiques et un grand nombre de points des veines : ce serait là, selon lui, ce qui aurait fait illusion et donné lieu à tant de conclusions prématurées en faveur de l'absorption veineuse.

Des observations pleines d'intérêt sur les fonctions des parties centrales du système nerveux ont été présentées à l'Académie par M. Flourens, jeune docteur en médecine. Son objet était principalement de déterminer quelles sont les parties du système nerveux jusqu'où les impressions extérieures doivent se propager pour produire une sensation dans l'animal, et dans quelles parties de ce même système il peut s'opérer une irritation assez efficace pour faire naître des contractions dans les muscles. Il a constaté, par de nouvelles expériences, que l'irritation descend dans tous les muscles dans lesquels le nerf irrité répand des rameaux; que si on la porte sur un point de la moelle épinière, elle se répand sur tous les muscles dont les nerfs naissent au-dessous de ce point; que l'on peut remonter ainsi jusqu'à l'origine de la moelle, dont l'irritation occasionne des contractions universelles. Réciproquement, l'animal éprouve de la douleur par l'irritation de tous les nerfs qui sont en communication avec

sa moelle épinière et avec son cerveau. A mesure qu'on les coupe, à mesure que l'on coupe à différentes hauteurs la moelle épinière, toutes les parties qui reçoivent leurs nerfs au-dessous de la troncature, perdent la faculté de donner de la douleur ou un sentiment quelconque à l'animal. Si l'on opère d'une manière inverse, et si l'on commence les piqûres par la surface des hémisphères du cerveau, si on les fait pénétrer jusque dans l'intérieur de ces hémisphères, on ne produit au contraire ni convulsions ni douleur, jusqu'à ce que l'on soit arrivé au même endroit où s'arrêtent les excitations, c'est-à-dire, à l'origine de la moelle allongée. On peut même enlever par couches successives les hémisphères, les corps cannelés, les couches optiques, le cervelet, sans produire de contraction ni de douleur, sans même contracter l'iris ni le paralyser. Ainsi le cerveau, quand on le pique ou qu'on l'entame, ne donne pas de sensations; mais ce n'en est pas moins à lui que toutes les sensations du reste du corps doivent arriver pour prendre une forme distincte, pour être nettement perçues par l'animal, et pour laisser des traces et des souvenirs durables. M. Flourens le prouve particulièrement par rapport aux sens de la vue et de l'ouïe. Lorsqu'on enlève l'hémisphère d'un côté à un animal, il ne voit plus de l'œil du côté opposé, bien que l'iris de cet œil conserve sa mobilité; si on enlève les deux hémisphères, il devient aveugle et n'entend plus. Un animal ainsi privé de ses hémisphères prend l'air d'être assoupi, il n'a plus de volonté par lui-même; il ne se livre à aucun mouvement spontané : mais, quand on le frappe, quand on le pique, il affecte encore les allures d'un animal qui se réveille; dans quelque position qu'on le place, il reprend l'équilibre; si on le couche sur le dos, il se relève; quand c'est une grenouille, elle saute si on la touche; quand c'est un oiseau, il vole si on le jette en l'air; si on lui verse de l'eau dans le bec, il l'avale : mais c'est sans but que l'animal fait tous ces mouve-

mens; il n'a plus de mémoire, et va se choquer à plusieurs reprises contre un même obstacle. En un mot, il se trouve dans l'état d'un homme qui dort, mais qui ne laisse pas en dormant que de pouvoir se remuer, prendre un position plus commode, &c.

Ce que les expériences de M. Flourens ont de plus curieux, c'est ce qui concerne les fonctions du cervelet. Quand on enlève les premières couches, il ne paraît qu'un peu de faiblesse et de manque d'harmonie dans les mouvemens : aux couches moyennes, il se montre une agitation presque générale; l'animal, tout en continuant de voir et d'entendre, n'exécute que des mouvemens brusques et déréglés; sa faculté de marcher, de se tenir debout, se perd par degrés. Si le cervelet est retranché totalement, tout mouvement régulier devient impossible : alors l'animal mis sur le dos ne se relève plus; il voit cependant le coup qui le menace, il entend les cris, il cherche à éviter le danger et fait mille efforts pour cela sans y parvenir; il a conservé sa faculté de sentir, mais il a perdu celle de faire obéir ses muscles à sa volonté. En le privant de son cerveau, on l'avait mis dans un état de sommeil; en le privant de son cervelet, on le met dans un état d'ivresse; et le cervelet se trouve ainsi le balancier et le régulateur des mouvemens de translation de l'animal.

Les expériences de M. Flourens donnent des résultats en grande partie conformes à ceux que M. Rolando, aujourd'hui professeur à Turin, avait obtenus et publiés, en Sardaigne, en 1809 : mais l'ouvrage de ce médecin, imprimé à Sassari pendant la guerre, ne nous était point parvenu; il a réclamé une possession incontestable, et nous nous faisons un devoir de lui rendre la justice qui lui est due. Cependant nous devons ajouter que M. Rolando, ayant seulement pratiqué des trous au crâne, et enlevé les parties avec un cuilleron, n'a pu obtenir la même précision que M. Flourens, qui, après

avoir mis l'encéphale à nu, en a successivement détaché les parties par couches régulières, et en s'assurant toujours par une inspection immédiate des limites dans lesquelles il renfermait chacune de ses opérations.

C'est à ces travaux physiologiques de MM. Flourens et Fodera que l'Académie a cru devoir décerner cette année le prix fondé par feu M. de Monthyon pour l'encouragement de la physiologie expérimentale.

Les nerfs sont à-la-fois les organes du sentiment et du mouvement volontaire : mais on sait aussi que ces deux fonctions ne sont pas entièrement dépendantes l'une de l'autre ; que la première peut être anéantie sans qu'il y ait de diminution dans la seconde, et réciproquement ; et l'on vient de voir qu'en effet elles ont des siéges différens dans les masses qui composent le cerveau.

Depuis long-temps, les anatomistes ont cherché à savoir si elles ont aussi, dans le tissu même des cordons nerveux, des filets qui leur soient privativement affectés; mais on peut dire que jusqu'à présent ils avaient avancé, à cet égard, plus d'hypothèses qu'ils n'avaient donné de preuves et de faits positifs. M. Magendie vient de faire des expériences qui paraissent résoudre entièrement cet important problème. Les nerfs qui sortent de la moelle épinière y prennent leur origine par deux ordres de filets ou de racines, les unes postérieures, les autres antérieures, qui se réunissent au sortir de l'épine pour former le tronc de chaque paire de nerfs. M. Magendie, ayant réussi à ouvrir l'épine du dos d'un jeune chien, sans endommager ses nerfs ni sa moelle, imagina de couper à quelques nerfs leurs racines postérieures seulement, et il observa aussitôt que le membre correspondant était insensible aux piqûres et aux pressions les plus fortes ; il le crut d'abord entièrement paralysé; mais bientôt, à sa grande surprise, il le vit

se mouvoir d'une manière très-apparente. Une seconde, une troisième expérience ayant donné le même résultat, il conjectura que les racines postérieures des nerfs pourraient bien être particulièrement destinées à la sensibilité, et qu'alors les antérieures le seraient au mouvement. Pour confirmer sa pensée, il chercha à couper séparément les racines antérieures, opération bien plus difficile que l'autre, et qu'après plusieurs tentatives il parvint cependant à effectuer. Le résultat ne fut pas douteux : le membre devint immobile et flasque, en conservant des indices non équivoques de sensibilité. Des épreuves faites avec la noix vomique ont donné lieu aux mêmes conclusions : ce poison n'a pas produit de convulsions dans les membres dont les nerfs avaient perdu leurs racines antérieures; mais ceux où ils n'avaient conservé que leurs racines postérieures, les ont éprouvées aussi violemment que si toutes les racines fussent demeurées intactes. Les résultats de l'irritation ne sont pas tout-à-fait aussi nets; il y a alors un mélange de contractions et de signes de sensibilité : mais les contractions excitées par la piqûre ou le pincement des racines antérieures sont infiniment plus marquées. Il n'y avait de traces d'expériences de ce genre que dans une petite brochure imprimée, mais non publiée, de M. Charles Bell, anatomiste anglais, célèbre par ses observations sur le cerveau, lequel avait remarqué que la piqûre des racines antérieures donne seule des convulsions aux muscles.

ANATOMIE COMPARÉE.

Nous avons rendu compte, en 1820 et en 1821, des observations de M. Geoffroy-Saint-Hilaire sur la constance du nombre des os dans les fœtus monstrueux, de la classification qu'il a donnée de ces productions anomales de la nature, et des causes d'après lesquelles il a cru pouvoir en expliquer

les déviations. Il s'est occupé, cette année, de leurs parties molles. Dans un monstre de l'espèce qu'il a nommée *podencéphale*, où le cerveau était sorti du crâne, et se trouvait suspendu par un pédicule, l'examen des parties diverses de cet organe a fait voir qu'il était demeuré, apparemment par défaut de nutrition suffisante, à peu près à l'état de développement qu'il aurait eu dans un fœtus de cinq mois, bien que l'enfant monstrueux auquel il appartenait fût né à terme. Ce même monstre avait l'estomac et la partie du canal intestinal située en avant du cœcum, plus raccourcis qu'un enfant nouveau-né; mais le gros intestin était, au contraire, beaucoup plus volumineux qu'à l'ordinaire, sur-tout vers le cœcum, où il se renflait en une poche très-dilatée, et un peu plus près du rectum, où un second renflement formait une seconde poche, laquelle répondait à cette dernière partie du colon qui est une espèce de réservoir stercoral. Ces réservoirs étaient remplis de mucus et de matières excrémentielles assez abondantes, d'où M. Geoffroy conclut que les intestins du fœtus sont plus actifs, et qu'il s'y exerce une digestion plus réelle et plus complète que ne s'imaginent le grand nombre des physiologistes.

Il suppose que le mucus versé par les artères dans les intestins y devient un objet de leur activité : ses idées le conduisent même à croire qu'en général c'est le mucus des intestins qui est la matière du chyle, et que les alimens ne fournissent immédiatement des matériaux qu'aux veines, et ce n'est, selon lui, qu'après avoir passé une première fois par les organes de la circulation et de la respiration, que ces matériaux rendent le sang artériel apte à produire ce mucus, qui, selon l'expresion de M. Geoffroy, serait un composé nouveau, une matière alibile quintessenciée. C'est ainsi que l'auteur croit pouvoir expliquer les expériences récentes dont nous avons rendu compte depuis deux ou trois ans, et dans

lesquelles, soit MM. Tiedeman et Gmelin, soit M. Magendie, ont vu passer dans les veines les substances colorantes ou odorantes portées dans les premières voies, tandis que ces substances n'avaient nullement pénétré dans les vaisseaux lactés. D'un autre côté, M. Geoffroy pense que le mucus, à un deuxième ou troisième degré d'organisation, fait une base essentielle de la composition du cerveau, en sorte que c'est par le peu de développement de l'encéphale de son monstre qu'il cherche à rendre raison de la grande dilatation de ses poches intestinales.

Ce monstre podencéphale n'avait point d'anus, et son rectum s'ouvrait, près du col de la vessie, dans l'urètre, qui devenait par-là une sorte de cloaque comme celui qui existe dans les oiseaux. Aussi M. Geoffroy a-t-il jugé que la dilatation du cloaque, dans laquelle les oiseaux retiennent leur urine, est le véritable analogue de la vessie des mammifères.

Cette vue l'a conduit à des recherches comparatives sur les organes de la déjection et sur ceux de la génération dans les oiseaux, et enfin à une comparaison et un rapprochement des organes génitaux dans les deux sexes.

Nous ne pouvons le suivre dans l'infinité de détails où son sujet l'a obligé d'entrer, et que les anatomistes verront avec intérêt dans le deuxième volume de sa *Philosophie anatomique.*

Qu'il nous suffise de dire, relativement aux rapports des deux sexes, que M. Geoffroy considère les ovaires comme analogues des testicules, les trompes de Fallope comme analogues des épididymes, les cornes de la matrice comme analogues des canaux déférens, la matrice elle-même comme analogue des vésicules séminales, enfin le clitoris comme l'analogue du pénis, et le vagin comme celui du fourreau du pénis.

Quant aux rapports des oiseaux et des mammifères, les

idées de M. Geoffroy ont besoin d'un peu plus de développement.

Il rappelle d'abord l'observation faite par M. Emmert, que les oiseaux ont un double ovaire, et qu'au côté opposé à leur grand oviductus, il existe chez eux le vestige ou premier rudiment d'un autre; et partant de là, il a considéré d'abord l'oviductus comme formé de la réunion d'une trompe de Fallope dans le haut, et d'une corne de matrice dans le bas : mais, plus récemment, il y voit plutôt la réunion d'une trompe de Fallope, d'un utérus et d'un vagin. L'oviductus débouche dans la zone la plus extérieure du cloaque commun, dans celle que M. Geoffroy a nommée *la bourse de la copulation*, et qu'il a considérée dans les femelles comme le vagin, mais que maintenant il nomme simplement *la bourse du prépuce :* effectivement, elle contient le clitoris et reçoit la vessie, et dans les mâles c'est elle aussi qui contient les replis de la verge à l'état de repos. Dans sa première manière de voir, il ne lui restait que la poche appelée *bursa Fabricii*, pour représenter la matrice. A la vérité, elle existe aussi dans les mâles; mais ce n'était, aux yeux de l'auteur, qu'une confirmation de plus de tout son système analogique : dans les mâles elle représentait les vésicules séminales. Aujourd'hui que M. Geoffroy place la matrice et le vagin dans l'oviductus même, il nomme simplement la bourse de Fabricius *bourse accessoire* (1).

Ici M. Geoffroy passe à l'examen des organes génitaux des monotrèmes, ou de ces quadrupèdes extraordinaires de la Nouvelle-Hollande, qui réunissent à un bec d'oiseau, à une épaule de reptile, à un bassin de didelphe, une structure tellement paradoxale d'organes génitaux, que, bien qu'ils aient le sang chaud, et le corps couvert de poils comme des

(1) Nous anticipons ici, avec la permission de l'auteur, sur les mémoires qu'il a lus cette année 1823.

quadrupèdes, on doute encore s'ils ne sont pas ovipares comme les reptiles. M. Geoffroy croit pouvoir l'affirmer sur le témoignage d'un voyageur qui, dit-on, a non-seulement observé le fait, mais a rapporté récemment en Europe des œufs d'ornithorynque; il dit même que, suivant les récits des naturels du pays, la femelle de cette espèce prépare un nid où elle dépose deux œufs.

Voulant ramener ces monotrèmes à sa théorie des organes des oiseaux, M. Geoffroy est obligé de considérer dans ces animaux, comme l'utérus, ce qui a été jusqu'à présent regardé comme la vessie par tous les anatomistes.

Du reste, M. Geoffroy continue à penser que les adhérences du fœtus avec ses enveloppes sont l'unique cause, ou, selon son expression, l'ordonnée de la monstruosité. Il a même essayé de faire des monstres : en enduisant ou revêtant plus ou moins les coquilles des œufs qu'il faisait couver, il a obtenu des fœtus retardés où disproportionnés dans leur développement.

Il a essayé aussi de retenir des œufs dans l'oviductus, pour voir s'il y aurait une incubation utérine et enfantement d'un animal vivant. Cette expérience réussit avec les couleuvres, dont le petit, comme on sait, est déjà tout formé dans l'œuf au moment où il est pondu. Le moyen à employer pour cela, d'après les observations de M. Florent Prévost, est de ne leur point donner d'eau où elles puissent se plonger; alors elles ne se dépouillent pas de leur épiderme, et leur ponte est retardée. Dans les poules, il faut lier l'oviductus. Parmi plusieurs expériences qui ont produit dans l'œuf et dans l'oviductus des altérations très-diverses, M. Geoffroy croit avoir remarqué un commencement d'incubation dans un œuf qui avait été ainsi retenu pendant cinq jours.

M. Geoffroy-Saint-Hilaire a communiqué une description faite par un Anglais dans l'intérieur de l'Indoustan, d'une

sorte de taureau nommé *gaour* qui aurait sur le dos une série d'épines ou d'aiguillons élevés de six pouces au-dessus de l'épine du dos, mais qui par tout le reste de ses formes et de ses couleurs paraît avoir beaucoup ressemblé au *bos frontalis* (le *gial* ou *jongli gaur* du Bengale).

M. Geoffroy, adoptant cette description, suppose que ces épines répondent aux épiphyses des apophyses épineuses des vertèbres dorsales. Passant ensuite à des considérations plus générales, il juge que ces apophyses elles-mêmes sont représentées dans les poissons par les rayons de leurs nageoires dorsales. Pour établir ce point de théorie, il fait connaître la composition générale de toute vertèbre, telle qu'on l'observe dans les fœtus de mammifères, et même dans les adultes de la classe des poissons.

Il la trouve fondamentalement divisible en neuf pièces primitives, savoir : une partie centrale, d'abord tubuleuse, qui en fait le corps, et qu'il nomme *cycléal;* des branches supérieures au nombre de quatre, enveloppant le canal médullaire, et dont il nomme celles qui forment les côtés de l'anneau, *périal*, et celles qui s'élèvent au-dessus en forme d'apophyse, *épial;* des branches inférieures, également au nombre de quatre, et enveloppant d'une manière à peu près pareille les vaisseaux sanguins, qu'il nomme *paraal* et *cataal:* mais ces pièces ne sont pas toujours disposées en forme d'anneaux; elles prennent, selon l'auteur, des positions diverses au gré des circonstances. Dans les parties où le système nerveux et le sanguin ne forment plus que des filets grêles, une paire d'os suffit pour le contenir; et les deux branches de l'autre paire, de la paire externe, se trouvant alors inutiles à leurs fonctions ordinaires, sont prêtes, dit-il, à prendre toute sorte de services ailleurs. Pour servir, par exemple, de baguettes aux nageoires dorsale et anale, elles montent l'une sur l'autre; l'une se maintient au-dedans; l'autre s'élance au-

dehors. Lorsqu'elles sont ainsi placées bout à bout, M. Geoffroy leur donne des noms particuliers : *énépial*, *proépial*, pour les supérieures ; *encataal*, *procataal*, pour les inférieures. Il y a aussi des noms analogues pour les *périaux* et les *paraaux*, quand ils viennent à s'aligner.

Ainsi ce que nous appellions tout-à-l'heure dans les quadrupèdes l'épiphyse de l'apophyse épineuse, est pour M. Geoffroy leur *proépial*.

Au contraire, si le volume des parties contenues augmente, comme il arrive dans l'abdomen pour les pièces inférieures, elles s'écartent pour embrasser plus d'espace.

Ainsi M. Geoffroy considère la partie osseuse ou vertébrale des côtes comme le paraal des vertèbres abdominales ; et la partie sternale ou cartilagineuse comme leur cataal. Dans les poissons, cette partie sternale, ou ce *cataal*, est d'une position incertaine, et s'attache tantôt sur le côté de la vertèbre, tantôt sur la côte même, ou sur le *paraal*, et forme alors ces arêtes latérales qui lardent les chairs des poissons.

Les os en forme de V, qui s'articulent sous les vertèbres de la queue d'un grand nombre de quadrupèdes, résultent de la confusion des paraaux et des cataaux en une seule pièce.

Quant aux plaques osseuses interposées chez les jeunes sujets entre les corps des vertèbres et formant les épiphyses de leurs corps, M. Geoffroy ne les comprend pas dans les neuf pièces essentielles à toute vertèbre ; il les regarde comme des corps vertébraux avortés.

Il était naturel que ces idées ramenassent M. Geoffroy à celles qu'il a mises en avant, il y a trois ans, et dont nous avons rendu compte dans notre analyse de 1820, sur les rapports des crustacés et des insectes avec les animaux vertébrés.

On se rappelle qu'il regardait les anneaux des insectes comme des vertèbres qui se seraient ouvertes pour laisser la

moelle épinière flotter dans la grande cavité des viscères, et les pieds de ces mêmes animaux comme des côtes désormais dévouées au mouvement progressif. Aujourd'hui il a un peu modifié ce point de vue : les anneaux du corps ne sont que la partie centrale de la vertèbre, ou le cycléal qui a conservé sa forme tubuleuse, et qui loge toutes les parties molles, en sorte que les autres pièces deviennent libres. Ce sont elles qui, sous la queue des écrevisses, forment les deux séries de membres appelés du nom assez mal fait de *fausses pattes :* mais ce ne sont pas les pièces de droite et de gauche qui forment les fausses pattes de droite et de gauche; au contraire, ce sont les périaux et les épiaux, ou les pièces supérieures, qui forment celles d'un côté, et les paraaux et cataaux, ou les inférieures, qui forment celles de l'autre : par conséquent, dans ce système, l'écrevisse est posée sur le flanc comme les pleuronectes.

Quant aux viscères, M. Geoffroy paraît admettre qu'ils ont subi une sorte de torsion, comme il y en a une pour les yeux dans les pleuronectes, de manière qu'en prenant, comme nous venons de le dire, les membres pour les parties supérieures et inférieures de l'épine, les viscères supérieurs se trouvent d'un côté, et les inférieurs, de l'autre; mais, ce point une fois admis, ajoute M. Geoffroy, tous les systèmes organiques sont dans le même ordre que dans les mammifères. Sur les côtés de la moelle épinière, on voit (ce sont ses termes) tous et chacun des muscles dorsaux; au-dessous, les appareils de la digestion et les organes thorachiques; plus bas encore, le cœur et tout le système sanguin; et plus bas enfin, formant la dernière couche, tous et chacun des muscles abdominaux.

M. Geoffroy promet de revenir prochainement sur ces considérations, et d'en donner le développement et les preuves.

Dans la manière commune de voir, le cœur des écrevisses est en haut, et le système nerveux en bas; dans celle de

M. Geoffroy, c'est l'inverse qui a lieu, et l'écrevisse, en ce qui concerne ses viscères, marche sur le dos, et en ce qui concerne son squelette, sur le côté.

Parmi les nombreuses singularités qu'offre la lamproie dans son organisation, était celle que l'on ne pouvait y distinguer de sexe, et que tous les individus que l'on avait observés ne montraient que des ovaires à différens degrés de développement. MM. Magendie et Desmoulins ont observé par hasard un individu de cette espèce qui avait un organe placé comme l'ovaire des autres, mais formé de lames plus obliques, plus minces et d'un rouge uniforme, comme les testicules des aloses, et dont l'intérieur offrait une pulpe homogène. Comme on avait pris en même temps et dans la même rivière une autre lamproie plus petite et dont les ovaires étaient fort avancés et remplis d'œufs distincts, ces observateurs supposent que la première était un de ces mâles que l'on cherche depuis si long-temps. Elle avait le foie d'un vert foncé. La femelle l'avait au contraire d'un jaune rougeâtre

Ces messieurs ont remarqué, de plus, que les valvules intestinales qui s'étendent du pylore à l'anus, deviennent plus saillantes, plus épaisses, plus rouges et plus papilleuses dans le dernier quart de l'intestin; ce qui tient à ce que cet intestin, entièrement dépourvu de mésentère, ne reçoit de vaisseaux sanguins que vers sa partie postérieure, où ils se rendent isolément et comme autant de brides. Ils tirent de cette conformation un nouvel argument en faveur de l'absorption des matières alimentaires par les veines.

ZOOLOGIE.

C'est par leurs classes les moins développées, par leurs espèces les plus imparfaites, que le règne animal et le règne

végétal se rapprochent le plus. Long-temps on a considéré les polypiers comme des plantes; plus long-temps encore on a regardé le polype comme un être intermédiaire entre les deux règnes : mais il existe plusieurs autres corps qui paraissent encore devoir passer dans le règne animal, bien que pendant une partie de leur vie ils offrent tous les phénomènes des végétaux. On les a presque généralement compris jusqu'à ce jour dans la famille des conferves, bien que déjà Adanson ait observé sur l'un d'eux des mouvemens volontaires, et que M. Girod-Chantrans ait vu sortir de quelques autres des corpuscules qui avaient toutes les apparences et toutes les propriétés des animalcules infusoires. Mais il était nécessaire, pour se former des idées justes sur ce groupe considérable d'êtres organisés, de les soumettre tous à un examen approfondi; c'est ce qu'a fait M. Bory de Saint-Vincent. Plaçant sous un microscope tous les filamens qu'il découvrait dans les eaux douces, suivant avec attention leurs développemens et leurs métamorphoses, il y a reconnu des organisations très-variées, et des degrés d'animalité très-distincts.

Dans un premier groupe qu'il nomme *fragillariées*, et dont l'animalité est encore peu sensible, l'être se compose de segmens linéaires, ou de lames juxta-posées, qui se détachent aisément et ensuite se fixent les uns aux autres, suivant diverses dispositions, formant des angles, ou demeurant parallèles, ou se répartissant en paquets. Dans un deuxième groupe, les *oscillariées*, les filamens sont doués de mouvemens spontanés très-vifs et très-variés. Les uns oscillent dans une mucosité commune, les autres rampent et cherchent à s'unir quand ils se rencontrent; il y en a qui, après s'être rencontrés et réunis, composent ainsi des membranes serrées, fines et inertes, que l'on a souvent confondues avec les ulves. Le groupe des *conjuguées*, qui est le troisième, semble offrir une espèce d'accouplement; d'abord, sans apparence de vie, il

arrive une époque où les filets se recherchent, se placent l'un à côté de l'autre, s'abouchent par de petits trous latéraux qui laissent s'unir les matières colorantes dont leurs articulations sont remplies; une des articulations se vide, tandis que l'autre se change en un ou plusieurs globules qui paraissent être les moyens de reproduction.

Dans les *zoocarpées*, qui forment le quatrième groupe, ces globules prennent tous les caractères de véritables animaux. L'être se compose d'abord de filamens simples, fixés, articulés à l'intérieur, dont la matière colorante se condense à certaines époques en corpuscules qui brisent le tube où ils sont renfermés, et, aussitôt qu'ils deviennent libres, prennent le mouvement volontaire, et nagent avec rapidité dans tous les sens comme les animalcules auxquels on a donné le nom de *volvox*. A une autre époque, ces globules se fixent de nouveau; ils s'allongent par la naissance successive de plusieurs articles qui forment un autre filament, lequel demeure immobile jusqu'à ce qu'il produise à son tour une génération de corpuscules. Un assez grand nombre de petits animaux infusoires que l'on a placés jusqu'à présent dans les genres des *cercaires*, des *monades*, des *enchélides* et des *volvox*, ne sont autre chose que ces corpuscules nés dans l'intérieur des zoocarpées.

Chacun de ces groupes est divisé en plusieurs genres d'après des circonstances de détail observées avec beaucoup de soin par M. Bory-Saint-Vincent, mais qu'il ne nous est pas possible d'exposer dans cette rapide analyse. Les quatre groupes forment ensemble une grande famille que M. Bory-Saint-Vincent nomme les *arthrodiées*, et dont le caractère général est d'avoir ses filets composés d'un tube transparent dans lequel est un filament articulé rempli d'une matière colorante généralement verte.

A cette famille M. Bory-Saint-Vincent en fait succéder

une qu'il nomme *bacillariées*, parce que le corps des êtres qu'il y fait entrer est simple et non flexueux, ou, en d'autres termes, comparable à un petit bâton. Parmi les genres qui la composent on peut remarquer sur-tout l'animalcule qui, d'après l'observation de M. Gaillon, est la véritable cause de la couleur verte de certaines huîtres. On trouvera, au reste, plus de détails sur ces êtres d'une nature ambiguë dans le *Dictionnaire classique d'histoire naturelle*, que plusieurs jeunes naturalistes publient en ce moment sous la direction de l'auteur du mémoire dont nous venons de rendre compte.

M. Guyon a envoyé de la Martinique la description d'une sangsue dont il a trouvé jusqu'à vingt individus dans les fosses nasales d'un héron de cette île (*Ardea virescens*).

Si c'était là le séjour naturel de ce ver, le fait serait fort remarquable, attendu qu'on ne connaît encore aucune espèce de sangsue qui vive constamment dans l'intérieur des autres animaux.

Il existe dans la mer des Indes un corail remarquable que l'on a nommé *le jeu d'orgue* (*Tubipora musica*, L.), parce qu'il se compose de nombreux tubes d'un beau rouge, placés parallèlement les uns aux autres, et réunis par des lames transversales. Dans chacun de ces tubes loge un polype d'un vert clair, que Péron avait déjà eu occasion d'observer vivant, mais que M. Lamouroux vient de décrire d'après des individus bien conservés qu'il a reçus de l'un des médecins qui ont suivi le capitaine Freycinet.

Ce polype a huit tentacules garnis chacun de deux ou trois rangs de petites papilles. Sous la bouche est un petit sac autour duquel sont huit filamens ou tubes minces, qui portent dans les vieux individus de petits œufs ou au moins des globules qui en ont l'apparence. Une membrane en forme

d'entonnoir attache l'animal aux bords de son tube calcaire, ou plutôt c'est dans cette membrane que la matière de ce tube se dépose et se durcit graduellement, et non par couches comme dans les coquilles. C'est elle aussi qui, en s'épanouissant, produit ces espèces de planchers qui unissent les tubes entre eux. Ces détails, et d'autres encore où est entré M. Lamouroux, font voir que ce polype du *Tubipore* ressemble beaucoup à celui de l'*Alcyon main-de-mer.*

M. de Lamarck a mis fin à sa grande entreprise d'une *Histoire des animaux non vertébrés*, par la publication de son septième volume, qui comprend les mollusques les plus élevés en organisation.

M. de Latreille publie avec M. le baron Dejean une *Histoire naturelle des insectes coléoptères d'Europe*, dont il a déjà paru un cahier *in-8.°*, qui contient la famille des *Cicindèles*, et qui ne sera pas moins remarquable par la beauté des figures que par l'exactitude des descriptions.

L'*Histoire des quadrupèdes de la ménagerie*, par MM. Geoffroy-Saint-Hilaire et Frédéric Cuvier, est arrivée à sa trente-sixième livraison. Les derniers numéros contiennent plusieurs animaux entièrement inconnus auparavant, dont quelques-uns ont été décrits et dessinés dans l'Inde, à la ménagerie du gouverneur général, marquis de Hastings, par M. Duvaucel, dont les travaux continuent aussi d'enrichir le Cabinet du Roi d'une multitude d'objets rares et précieux.

Ce vaste dépôt des productions de la nature vient encore de recevoir de superbes accroissemens par les collections que MM. Leschenault de la Tour et Auguste de Saint-Hilaire ont rapportées, le premier du continent de l'Inde, et le second du Brésil. Ils ont fait dans ces contrées de grandes excursions, dont ils viennent l'un et l'autre de présenter une relation très-abrégée. Ces tableaux rapides nous promettent deux

ouvrages pleins d'intérêt pour la connaissance des peuples et de la nature, et propres à faire un grand honneur à la France, dont ces savans voyageurs tenaient leur mission. L'Académie a exprimé le vœu qu'il leur soit donné les moyens de terminer leurs entreprises par la prompte publication de leurs résultats.

On attend aussi d'heureux fruits de l'expédition commandée par M. le capitaine Duperré, lequel a pris dans M. Durville un second déjà éprouvé par les belles et utiles recherches qu'il a faites dans la mer Noire et dans l'Archipel, et vient d'envoyer, de sa première relâche, des observations et des dessins qui annoncent tout ce qu'il fera par la suite.

M. de Latreille a donné un mémoire sur les habitudes de cette araignée d'Amérique à qui sa grosseur permet de s'attaquer aux petits oiseaux, et qui porte par cette raison le nom d'*araignée aviculaire*.

M. Daudebart de Férussac, qui s'occupe sans relâche de son grand ouvrage sur les mollusques de terre et d'eau douce, l'a continué jusqu'à la dix-neuvième livraison.

Il a donné une nouvelle description des genres et des espèces qui composent la famille des limaces : il l'a portée jusqu'à onze genres, dont plusieurs, décrits par lui pour la première fois, se font remarquer par une organisation singulière; tels sont les vaginules, qui remplacent au Brésil et aux Antilles nos limaces de l'Europe.

Il a commencé à donner les coquilles d'eau douce qui se trouvent à l'état fossile, afin d'offrir une détermination précise de ces espèces si importantes pour la géologie.

Il a fait une comparaison des espèces vivantes et fossiles du genre peu connu de coquilles d'eau douce qu'il a appelées *mélanopsides*, et dont il a décrit onze espèces; et il a cherché à prouver que les espèces de ce genre et de plusieurs

autres qui remplissent la formation dite d'argile plastique et de lignites, dans les parties basses de plusieurs pays de l'Europe, sont les mêmes que celles qui vivent aujourd'hui dans des contrées plus méridionales; ce qui le conduit à de grandes conclusions géologiques, et notamment à celle qu'il n'y a point eu de cataclysme général, mais seulement des cataclysmes locaux et des irruptions partielles de la mer.

Ce sont les mêmes idées dont nous avons rendu compte dans notre analyse de 1821.

Une entreprise de cet estimable zoologiste, qui n'est point étrangère à l'objet de notre présente notice, c'est un bulletin général des nouvelles scientifiques, dont il a déjà fait paraître plusieurs cahiers. Son plan est neuf. Il se propose d'y rendre compte en abrégé de tous les faits nouveaux, de toutes les vues utiles, qui seront publiés dans les pays où l'on cultive les sciences; et il n'est pas douteux que s'il continue à remplir ce plan avec le soin nécessaire, cet ouvrage ne puisse devenir un lien utile de correspondance entre tous les hommes qui se livrent aux recherches scientifiques.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

M. Portal a lu un mémoire sur des *fièvres typhoïdes ou pernicieuses, rémittentes ou intermittentes*, survenues, contre toute attente, pendant ou après plusieurs maladies, et qui ont été guéries par le quinquina en substance; pour ajouter à l'histoire d'autres fièvres typhoïdes déjà observées par de grands médecins.

L'auteur a prescrit avec succès le quinquina en substance et à haute dose à des malades très-connus qui éprouvaient des fièvres rémittentes dont les accès, allant toujours en croissant, annonçaient une mort prochaine, quoiqu'ils fussent compliqués d'accidens que de très-habiles gens dans l'art de

guérir considèrent comme des motifs de ne point donner ce remède, tels que la jaunisse, l'hydropisie, des gouttes irrégulières, des épuisemens des forces par des hémorragies considérables, par le vomissement ou par d'autres causes.

M. Portal, après avoir exposé ses heureuses observations, en conclut qu'il faut se garder d'abandonner un remède dont les succès sont assurés, pour recourir à un autre dont l'efficacité n'est pas si bien reconnue dans les cas ordinaires, encore moins dans ceux dont il vient de faire part à l'Académie. Attendons, dit-il, que le temps ait répandu de nouvelles lumières sur cet important objet.

Le second mémoire de M. Portal, lu à l'Académie, a pour titre : *Considérations sur le siége de l'épilepsie et sur ses accès.* L'auteur y établit, d'après de nombreuses observations avec ouverture des corps, 1.° que l'épilepsie a son siége dans le cerveau lors même qu'elle est réputée sympathique; 2.° que son siége immédiat est toujours dans la moelle allongée ou dans la partie supérieure de la moelle épinière; 3.° qu'au défaut des signes qui indiquent la nature de ces lésions organiques immédiates, on doit, pour traiter cette maladie avec succès, prendre en considération les causes éloignées pour prescrire son vrai traitement. L'auteur prouve les avantages de cette méthode par les succès qu'il en a obtenus et dont il expose le résultat. Ce n'est, dit-il, que lorsque nous ne pouvons nous conduire ainsi, qu'il est permis de se livrer à un empirisme plus souvent funeste qu'utile.

M. Pinel, fils du célèbre médecin que l'Académie a l'avantage de posséder, et qui se livre lui-même avec succès à l'art qui a dû tant de progrès à son père, a présenté à l'Académie un mémoire sur une altération du cerveau, dans laquelle la matière médullaire de ce viscère perd sa mollesse et ses autres caractères physiques, pour devenir dure, élas-

tique, fibreuse, et pour prendre enfin à peu près l'apparence du blanc d'œuf durci par la chaleur.

L'auteur a observé, pour la première fois, cette altération sur une fille idiote de naissance, paralysée du bras et de la jambe gauches, tellement bornée dans ses facultés, qu'elle ne comprenait que les questions relatives à ses besoins animaux, et qu'à peine elle pouvait répondre oui et non. Cette malheureuse avait de plus, tous les mois, de violens accès d'épilepsie. On trouva l'hémisphère droit de son cerveau dans l'état que nous venons de décrire; sa moelle épinière était ramollie au niveau de la première vertèbre du dos, et le nerf sciatique correspondant au membre paralysé était plus gros qu'à l'ordinaire.

Une femme tombée en démence à quarante-neuf ans, et morte à cinquante-deux, offrit un endurcissement considérable du même genre dans l'épaisseur de l'hémisphère gauche, au-dessous du ventricule, et un autre encore plus prononcé au bord postérieur du cervelet.

M. Pinel a observé plusieurs autres individus où cet endurcissement accompagnait l'idiotisme. Dans cet état, le tissu médullaire ressemble à une masse compacte, inorganique; la substance du cerveau est affaissée; on n'y voit aucune trace de vaisseaux; au lieu de se dilater à la chaleur en laissant un résidu brunâtre et léger, elle se racornit avec une odeur forte, et laisse un résidu noirâtre et luisant.

L'auteur se propose de continuer ses observations; et il n'est pas douteux qu'elles ne puissent devenir de la plus grande importance pour la physiologie et même pour la psychologie, s'il a soin d'établir un parallèle exact entre le lieu et l'espace occupé par cette altération, et les affections mentales qu'éprouveraient les individus dans lesquels il l'observera.

Nous avons entretenu nos lecteurs, dans notre analyse de

1820, des nouveaux alcalis extraits du quinquina, et dans lesquels il y avait lieu de croire que résidait la vertu fébrifuge de cette écorce; et dans celle de 1821, nous avons rendu compte des essais pratiques sur l'emploi de ces alcalis, combinés avec l'acide sulfurique.

Ces médicamens et tous ceux que la chimie a découverts dans ces dernières années, en enseignant l'art d'extraire des végétaux leurs véritables principes médicinaux dans l'état de pureté, réclamaient un formulaire qui pût guider sûrement dans leur emploi et dans leur préparation. M. Magendie s'est acquitté de cette tâche en faisant usage de tout ce que les médecins ont constaté de plus exact à cet égard dans leur pratique, et en indiquant les procédés que les chimistes ont reconnus comme les plus sûrs et les plus directs.

M. Double, habile médecin de Paris, qui l'un des premiers a constaté la vertu éminemment fébrifuge du sulfate de quinine, l'a employé aussi avec un succès marqué dans les fièvres continues rémittentes et dans les rhumatismes aigus, où les douleurs s'exaspèrent par intervalles plus ou moins réguliers. Combiné avec le prochlorure de mercure, ce sel s'est montré utile dans des engorgemens lymphatiques; il a même fait quelque bien à une personne attaquée d'une maladie fort singulière, qui, au milieu du discours, au moment où elle s'y attend le moins, est prise subitement d'un accès de sommeil profond, mais pour quelques secondes seulement, au bout desquelles elle continue de parler et d'agir comme si rien ne lui était arrivé. Le sulfate de quinine a réduit du moins le nombre de ces crises, de trente ou quarante, à trois ou quatre dans les vingt-quatre heures.

MM. Bonneau et Sulpicy, médecins, ont présenté des *recherches sur la contagion de la fièvre jaune,* où ils ont recueilli avec une grande impartialité tous les faits qui peuvent aider

à juger cette grande question, soit dans un sens, soit dans un autre. Cette histoire de la fièvre jaune, écrite avec ordre et clarté, commence par une énumération chronologique de ses principales épidémies, un extrait des descriptions qui en ont été données sous ses différens noms, les causes probables auxquelles elle a dû son origine à chaque époque et dans chaque lieu. Elle se termine par une sorte de balance des faits qui peuvent faire considérer cette maladie comme contagieuse, et de ceux qui peuvent favoriser une conclusion contraire. Les auteurs ne prennent point encore sur eux de donner une décision; ils se bornent à exposer avec candeur tout ce qui peut y conduire : mais il semble que dans leur ouvrage ce serait l'opinion de la non contagion qui serait le plus près d'obtenir gain de cause.

M. Moreau de Jonnès a recueilli dans les documens officiels les principales circonstances de l'apparition de la fièvre jaune à bord des navires mouillés dans le port de Pomègue, et par suite dans le lazaret de Marseille. Les faits établissent que la maladie fut apportée de Barcelone, qu'elle se communiqua d'un navire à l'autre, mais qu'elle ne se propagea point dans le lazaret, où plusieurs malades furent transportés.

Les anatomistes ont appelé *trompe d'Eustache*, d'après celui qui l'a découvert, un petit canal qui établit une communication entre l'arrière-bouche et cette partie de l'oreille que l'on nomme *la caisse du tympan*. Sans que l'on sache bien en quoi cette communication peut être nécessaire à l'exercice du sens de l'ouïe, il est certain que plusieurs surdités ne sont dues qu'à son obstruction, ou à celle de la caisse dans laquelle elle donne; et quand cette obstruction est produite par des substances qui peuvent se dissoudre ou se délayer, on réussit quelquefois à y porter remède, en injectant dans

la trompe quelque liqueur convenable. On prétend que c'est un maître de poste de Versailles, nommé *Guyot*, qui imagina pour lui-même ce moyen curatif que de fort habiles chirurgins ne parvinrent pas d'abord à imiter. Il est devenu fort général depuis que Dessault a indiqué les narines comme la voie la plus sûre pour porter l'instrument à l'embouchure du canal. Ce procédé, déjà fort perfectionné par M. de Saissy, de Lyon, et par M. Itard, médecin des sourds-muets, vient de l'être encore beaucoup par M. Deleau, médecin, qui s'est particulièrement consacré à la curation des maladies de l'oreille. Il emploie à cet effet une sonde de gomme élastique, enduite d'huile, qui traverse la narine, et dont il cherche à engager la pointe dans l'orifice de la trompe, par des manœuvres auxquelles il s'est exercé. A l'autre bout de cette sonde s'adapte une petite seringue.

Quand la maladie ne vient pas de l'état de la trompe, ou lorsque la trompe est fermée sans remède, il arrive encore quelquefois que l'on peut remédier à la surdité en perforant le tympan, et M. Deleau a encore beaucoup perfectionné ce genre d'opération. Une simple fente se refermerait aussitôt; il est nécessaire d'enlever un petit disque de la même membrane, et, pour cet effet, l'auteur a imaginé un petit emporte-pièce à ressort, qui produit d'un seul coup l'orifice desiré. Les commissaires de l'Académie ont vu une petite fille de neuf ans, sourde et muette depuis l'âge de treize mois, qui, immédiatement après la perforation du tympan de l'oreille droite, a entendu avec une sorte d'extase l'air d'une tabatière à serinette, et a répété les sons non articulés qu'on a fait retentir doucement à son oreille. On lui a aussi débouché et injecté la trompe du même côté, et l'on a été étonné de la quantité de matières diversement épaissies et colorées que les injections ont fait sortir par l'ouverture artificielle du tympan. Je n'ai pas besoin de dire qu'aucun de ces moyens ne

réussirait dans les cas où la surdité viendrait de paralysie du nerf de l'ouïe; car alors elle est incurable : mais on a des moyens de savoir si elle provient de cette cause, et l'on épargne alors les opérations au malade.

M. Ducamp a présenté à l'Académie un traité fort étendu sur les rétrécissemens de l'urètre, maladie funeste et malheureusement trop commune aujourd'hui. Après en avoir exposé la nature, le siége, les effets, et avoir rendu compte des moyens curatifs employés jusqu'à lui, il fait connaître une méthode nouvelle qui a paru aux hommes de l'art ingénieuse et propre à produire de meilleurs effets que les précédentes, en même temps qu'elle n'aura pas leurs inconvéniens.

Il emploie divers procédés, et principalement une bougie enduite de cire, pour acquérir une notion précise de la position de l'obstacle, de son étendue et de sa forme. Un autre instrument en platine, en forme de tube, contient un cylindre du même métal, dans une rainure duquel est le caustique, que l'on peut appliquer ainsi sur l'obstacle, et sur la portion de cet obstacle que l'on juge convenable d'attaquer, sans qu'il puisser toucher les parties saines du canal. L'obstacle, au contraire, est détruit d'avant en arrière et par degrés. On peut connaître les changemens de forme et d'étendue que l'opération lui fait subir, et y proportionner la face libre du caustique.

Une seule application, quelquefois deux ou trois, mais fort rarement quatre, ont été nécessaires pour rendre à l'urètre ses dimensions; et cependant l'auteur n'a employé chaque fois qu'un dixième de grain de nitrate d'argent, ou de ce que l'on appelle communément *la pierre infernale*.

Il s'agit alors d'avoir une cicatrice qui ne forme pas elle-même un rétrécissement. M. Ducamp emploie à cet effet une bougie renflée dans le point qui doit répondre à la plaie, et qui distend cette partie seulement, sans trop gêner le canal.

Les nombreuses guérisons obtenues par l'auteur ont confirmé les espérances que donnaient la nature de ses procédés et les raisonnemens ingénieux d'après lesquels il les avait conçus.

Il a été rendu à l'Académie un compte avantageux des planches lithographiées où M. Maingault, chirurgien, dont nous avons déjà eu plusieurs fois occasion de parler, a fait représenter en grand et fort exactement les diverses amputations des membres, avec le manuel propre à chacune d'elles. Rien ne serait plus capable d'éclaircir pour les commençans les doctrines chirurgicales, que ces figures, qui les rendent sensibles à l'œil, et sont plus claires pour l'esprit que toutes les descriptions.

AGRICULTURE ET TECHNOLOGIE.

M. Yvard continue ses importans travaux sur la jachère. Après l'essai historique qu'il a donné l'année dernière, il a publié, cette année, des considérations générales sur ce sujet. On ne peut envisager sous trop de faces une question d'où dépend la source la plus certaine et la plus prochaine de la richesse des nations.

M. François Théran, qui a soigné long-temps à Cadix un troupeau de lamas et de vigognes que le gouvernement espagnol desirait acclimater dans ses états d'Europe, a présenté un mémoire sur les avantages que ces animaux utiles pourraient aussi offrir à la France. Ils se nourriraient aisément de nos fourrages; la température du pays ne leur serait point contraire, et l'auteur juge que s'ils se multipliaient dans les régions incultes des Pyrénées, par exemple, leur laine donnerait un produit avantageux.

M. de Humboldt pense que, pour réussir dans un pareil projet, relativement à la vigogne, qui est la plus précieuse

de ces espèces, il serait d'abord nécessaire de la rendre domestique, mais que l'essai devrait en être fait dans son pays natal. Il y a des cantons, dans les Cordillières, où le nombre en est prodigieux, et où l'on se borne à les chasser pour en avoir la toison. On en exporte, dans certaines années, plus de deux cent mille peaux. Il ne serait pas impossible de les contraindre d'entrer dans des enclos où on les tondrait sans les tuer. Le fait attesté par M. Théran, que le troupeau qu'il a soigné près de Cadix, avait vécu auparavant pendant plusieurs années dans les environs de Buénos-Ayres et loin de ses montagnes natales, donne déjà de grandes probabilités pour la réussite d'une entreprise conduite avec plus de persévérance.

On a d'ailleurs plus d'un exemple d'individus qui ont très-bien supporté notre climat; et en ce moment même la ménagerie du Jardin du Roi possède un alpaca qui n'y a point souffert depuis deux ans qu'il a été donné à cet établissement par M. Pouydebat, négociant de Bordeaux.

Les membres de la section d'agriculture ont continué et porté jusqu'au XII.e volume le nouveau Cours complet de cette science, à la rédaction duquel ils ont consacré leurs connaissances et leurs talens.

M. Lémare a présenté à l'Académie un appareil qu'il nomme *caléfacteur*, et qui peut être employé avec un grand avantage dans l'économie domestique pour la cuisson des alimens. Sa structure consiste essentiellement en ce que le vase cylindrique placé au milieu est entouré de toutes parts par le charbon qui doit l'échauffer, et que ce charbon est entouré lui-même par un autre vase en forme d'anneau ou plutôt de couronne de la même hauteur que celui du milieu. L'eau contenue dans les deux vases s'échauffe à-la-fois, et celle du vase extérieur contribue à conserver la chaleur dans le vase

intérieur. Le vide circulaire qui est entre deux et qui sert de foyer, a son fond percé de plusieurs trous pour donner de l'air au charbon qu'il contient, et dont on peut boucher une partie quand on veut modérer la combustion. Quelques autres détails dans la structure de cet instrument le rendent aussi commode que profitable, et les essais que l'on en a faits ne permettent pas de douter que son usage ne devienne bientôt général.

Une encre indélébile devient d'autant plus nécessaire, mais en même temps ce problème devient d'autant plus difficile, que les faussaires acquièrent plus d'habileté.

L'Académie avait reconnu cette qualité à un très-haut degré dans une encre qui lui fut soumise il y a quelques années; mais les marchands ont eu le tort d'en vendre sous cette approbation, après que la recette en était altérée et ne répondait plus à son objet.

Un fabricant de Paris, M. de la Renaudière, vient d'en présenter une qui approche encore plus de la perfection, et qui résiste à tous les agens employés d'ordinaire pour l'altération des écritures. L'Académie lui a aussi accordé son approbation; mais, afin de pouvoir constater en toute occasion que l'encre qui sera vendue à l'avenir sera réellement celle qu'elle aura approuvée, elle a exigé que la recette en fût déposée cachetée au secrétariat, où l'on pourrait la consulter si l'encre en question, fabriquée avec plus de négligence, venait à ne plus offrir les mêmes propriétés.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

MÉMOIRE

Sur l'Écoulement de l'Air atmosphérique et du Gaz hydrogène carboné dans des tuyaux de conduite;

PAR M. P. S. GIRARD.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 12 Juillet 1819.

IL a été publié en 1817, dans le *Journal des sciences et des arts de l'institution royale de Londres*, quelques expériences sur l'écoulement de plusieurs fluides aériformes par des tubes capillaires de verre.

M. Faraday, à qui ces expériences sont dues, rapporte qu'il condensa successivement différens gaz dans un réservoir de cuivre et sous la même pression de quatre atmosphères; que les

ayant ensuite laissés s'écouler librement au moyen d'un tube de thermomètre de 508 millimètres de longueur qui était adapté à ce réservoir, il observa que la quantité de chacun de ces gaz qui s'écoulait jusqu'à ce que celui du réservoir passât de son premier état de pression à la pression d'une atmosphère un quart, était dépensée en des temps différens, qui lui parurent augmenter à proportion de la pesanteur spécifique du gaz que l'on avait soumis à l'épreuve.

Ainsi, par exemple, la durée de l'écoulement du gaz acide carbonique fut de 156 secondes et demie;

Celle de l'air atmosphérique, de 128 secondes;

Et celle du gaz hydrogène carboné, de 100 secondes.

M. Faraday conclut de ces expériences, et des différens degrés de résistance que les aubes d'une petite roue éprouvent à se mouvoir dans différens fluides aériformes, que les mobilités relatives de ces gaz sont en raison inverse de leurs pesanteurs spécifiques : il ajoute cependant que ce rapport cesse de se manifester quand l'écoulement des gaz n'a lieu qu'en vertu de faibles pressions, ou qu'on diminue le diamètre du tube par lequel ils s'écoulent; de sorte qu'alors le gaz acide carbonique, par exemple, s'échappe plus promptement que des gaz beaucoup plus légers.

M. Faraday, dans un mémoire plus récent (1), a rendu compte de quelques autres observations, d'où il a de nouveau conclu que la pesanteur spécifique des gaz n'exerçait aucune influence constante sur les phénomènes de leur écoulement par des tubes capillaires. Ainsi, sous une même pression, 7 pouces cubiques de gaz oxide de carbone se sont écoulés en 4 minutes $\frac{6}{10}$; tandis que le même volume de gaz oléfiant, dont la pesanteur est à très-peu près la même, s'est écoulé à travers le même tube en 3 minutes $\frac{3}{10}$ seulement,

(1) Voyez les *Annales de chimie et de physique*, tom. X, pag. 388.

et qu'un même volume de gaz oxigène, dans les mêmes circonstances, a exigé pour son écoulement 5 minutes $\frac{45}{100}$.

Quelque attention qu'on apporte à l'examen des expériences de M. Faraday, il est impossible d'en déduire la loi de l'écoulement des différens gaz par des tubes capillaires, parce que ce physicien n'indique ni le diamètre des tubes dont il s'est servi, ni leur longueur, ni la charge constante en vertu de laquelle s'y est opéré l'écoulement.

Ces expériences, néanmoins, présentent des faits assez curieux pour mériter d'être répétées, en tenant compte de toutes les circonstances qui ont été omises, particulièrement de la température, laquelle peut influer plus ou moins sur les produits de l'écoulement des fluides aériformes, comme elle influe sur les produits de l'écoulement des liquides incompressibles par les tubes capillaires.

De nouvelles expériences sur le mouvement linéaire des différens gaz serviront enfin à faire reconnaître la cohésion de leurs parties les unes aux autres, et la force avec laquelle ces substances adhèrent, suivant leur nature, à la matière des tubes dans lesquels ils se meuvent.

En attendant que les recherches des physiciens se portent sur cette importante matière, j'ai cru devoir profiter d'une occasion qui s'est présentée, de faire quelques expériences sur l'écoulement de l'air atmosphérique et du gaz hydrogène carboné par des tuyaux de conduite d'un diamètre assez fort et d'une longueur considérable.

Ce n'est que par de telles expériences qu'on peut être conduit à connaître les principes d'après lesquels on procédera avec certitude à la meilleure distribution du gaz propre à l'éclairage, dans les différens quartiers d'une ville. Ainsi ces expériences nous promettaient des résultats d'une utilité immédiate, et cette considération seule devait nous porter à les entreprendre.

L'appareil établi par les ordres de M. le préfet de la Seine pour l'éclairage de l'hôpital Saint-Louis, au moyen du gaz extrait de la houille, nous offrait pour ces expériences toutes les facilités desirables : il a été mis à notre disposition avec beaucoup de bienveillance; et, M. Cagniard de Latour, l'un des membres de la commission chargée de diriger l'établissement de cet appareil, et qui est depuis long-temps connu avantageusement de l'Académie par les travaux intéressans qu'il lui a présentés, ayant bien voulu concourir à ces expériences, nous les avons commencées ensemble au mois de mai dernier, et nous en avons recueilli, jusqu'à ce jour, les résultats dont je vais rendre compte.

Le gaz extrait de la houille dans l'établissement de l'hôpital Saint-Louis passe, après avoir été lavé, sous un gazomètre dont la section transversale est de $9^{m},4968$ superficiels : il y est entretenu à un état de pression équivalent au poids de l'atmosphère, augmenté de celui d'une colonne d'eau de $0^{m},03383$ de hauteur; ce qui est indiqué par un manomètre implanté dans la partie supérieure de la cloche.

Le gaz, en vertu de cette pression, passe du réservoir qui le contient dans un tuyau de conduite de 3 pouces ou de 81 millimètres de diamètre, lequel, posé à peu près horizontalement à 70 centimètres au-dessous du sol, contourne extérieurement le principal corps de bâtiment de l'hôpital, sur 623 mètres de développement.

Le gazomètre étant mis en charge et ne recevant plus de nouveau gaz, si l'on ouvre la communication établie avec le tuyau de conduite, l'écoulement du fluide commence aussitôt et continue par ce tuyau en vertu de la pression qu'indique le manomètre, pression que l'on a rendue constante en compensant, au moyen d'une chaîne appropriée, la perte de poids que le gazomètre éprouve à mesure qu'il s'enfonce dans l'eau de la citerne où il est plongé.

La marche du gazomètre, pendant qu'il descend ou qu'il monte, est indiquée par un index sur une échelle graduée tracée sur l'un des murs du bâtiment.

Le tuyau de conduite qui sert à la distribution du gaz, peut être ouvert à différens points de sa longueur pour le laisser échapper; de sorte que la même conduite représente successivement des tuyaux de même diamètre et de longueur différente.

L'appareil étant ainsi disposé, et toutes les préparations convenables étant achevées, le 11 mai, nous fîmes les trois expériences suivantes, pendant lesquelles la force élastique du gaz hydrogène carboné renfermé sous la cloche, et tel qu'on l'emploie pour l'éclairage, soutenait dans le tube du manomètre une colonne d'eau de $0^{m},03383$ de hauteur.

1.re EXPÉRIENCE.

La conduite ayant été ouverte à $128^{m},80$ de son origine, le gazomètre est descendu uniformément de $0^{m},1218$ en une minute, résultat moyen de trois observations.

2.e EXPÉRIENCE.

La conduite ayant été ouverte à $375^{m},80$ de son origine, deux observations consécutives donnèrent également pour résultat un abaissement du gazomètre de $0^{m},07103$ par minute.

3.e EXPÉRIENCE.

L'écoulement du gaz ayant lieu dans toute la longueur de la conduite, qui est de $622^{m},80$, le gazomètre descendit de $0^{m},05414$ en une minute, résultat moyen de deux observations.

Ainsi, par ces trois premières expériences sur l'écoulement du gaz hydrogène carboné sous une pression constante, les longueurs de la conduite étant comme les nombres 1288,

3758 et 6228, les quantités de gaz dépensées sont comme les nombres 1281, 710 et 541 : d'où l'on conclut d'abord que, toutes les circonstances de l'écoulement étant égales d'ailleurs, ses produits diminuent à mesure que la longueur du tuyau par lequel il s'opère devient plus considérable; ce qui ne peut avoir lieu, à moins que ce gaz n'éprouve à se mouvoir certaines résistances disséminées sur toute l'étendue de la paroi intérieure de la conduite, comme on sait que cela arrive en pareil cas dans le mouvement des liquides incompressibles.

Après avoir fait les trois expériences que nous venons de rapporter, nous en entreprîmes de semblables sur l'écoulement de l'air atmosphérique.

En conséquence, le 15 mai, le même gazomètre dont nous avions fait usage, en fut rempli et convenablement chargé, pour que la force élastique de cet air fût exactement mesurée par le poids d'une colonne d'eau de $0^{m},3381$ de hauteur.

Nous obtînmes les résultats suivans :

4.e EXPÉRIENCE.

La longueur de la conduite étant, comme la première fois, de $128^{m},80$, trois observations consécutives, qui ont duré ensemble 6 minutes, ont donné pour terme moyen $0^{m},09023$ d'abaissement du gazomètre par minute.

5.e EXPÉRIENCE.

Le tuyau ayant $375^{m},80$ de longueur, le gazomètre est descendu de $0^{m},05414$ en une minute, terme moyen de trois observations.

6.e EXPÉRIENCE.

L'écoulement du gaz ayant lieu par la conduite entière

de 622^m,80 de long, le gazomètre est descendu de 0^m,3947 en une minute, terme moyen de trois observations consécutives, qui ont duré 2 minutes chacune.

Par conséquent, les longueurs des tuyaux par lesquels s'est écoulé l'air atmosphérique étant entre elles comme les nombres 1288, 3758 et 6228, les produits de l'écoulement ont été comme les nombres 902, 541 et 394; tandis que, par les mêmes tuyaux et sous la même pression, les produits de l'écoulement du gaz hydrogène avaient été comme les nombres 1218, 710 et 541.

En considérant séparément les résultats de nos expériences sur l'air atmosphérique, on reconnaît encore le décroissement des dépenses à mesure que les longueurs de la conduite s'accroissent; ce qui prouve que les deux gaz éprouvent dans leur mouvement une résistance de la même nature.

Comparant ensuite les produits de l'écoulement des deux gaz sous les mêmes pressions, on voit que les dépenses du gaz hydrogène sont beaucoup plus considérables que les dépenses de l'air atmosphérique, mais non point dans le rapport de leurs densités respectives.

Car, en représentant par 1000 la pesanteur spécifique de l'air atmosphérique, celle du gaz hydrogène carboné est, comme on sait, représentée par 555, c'est-à-dire qu'elle est à peu près sous-double; tandis qu'à longueurs de conduite égales, les produits de l'écoulement des deux gaz sont entre eux dans les rapports approximatifs de 135 à 90, de 71 à 57, et de 54 à 37, lesquels diffèrent beaucoup de celui du double au simple.

Il s'agissait maintenant de faire varier le diamètre de la conduite par laquelle l'écoulement du gaz devait avoir lieu.

La plupart des distributions de détail du gaz hydrogène dans les diverses parties de l'hôpital Saint-Louis se font au moyen de canons de fusils de réforme, lesquels ont tous

le même diamètre de 7 lignes ou de $0^m,01579$, et dont les extrémités, qui ont été taraudées à cet effet, s'ajustent exactement entre elles : on a pu disposer d'un assez grand nombre de ces canons de fusil pour en former différens tuyaux dont la longueur pouvait s'étendre jusqu'à 127 mètres.

Et comme la dépense de gaz par cette petite conduite devait être beaucoup moindre que la dépense observée dans les expériences précédentes, on s'est servi pour réservoir d'un gazomètre cylindrique beaucoup plus petit, et dont le rayon de la base est de 34 centimètres seulement. La charge en ayant été convenablement réglée pour que la force élastique du fluide aériforme qui y était renfermé fût toujours exactement mesurée par le poids d'une colonne d'eau de $0^m,03383$ de hauteur, nous avons fait, le 31 mai, sur l'écoulement de l'air atmosphérique, les expériences suivantes :

7.e EXPÉRIENCE.

L'écoulement s'opérant par un tuyau de $36^m,91$ de longueur, à partir de l'origine de la conduite sous le gazomètre, il est descendu, dans la cuve qui le contenait, de $0^m,09585$ en une minute, résultat moyen de trois observations.

8.e EXPÉRIENCE.

On a ajouté à cette conduite assez de canons de fusil pour en porter la longueur à $55^m,91$; et la descente moyenne du gazomètre, déduite de trois observations, a été trouvée de $0^m,08459$ par minute.

9.e EXPÉRIENCE.

La longueur du tuyau d'écoulement ayant été portée à $88^m,06$, un pareil nombre d'observations a donné pour

résultat moyen $0^m,06541$ d'affaissement du gazomètre par minute.

10.e EXPÉRIENCE.

Enfin, la longueur de la conduite étant de $111^m,124$, le gazomètre est descendu de $0^m,05526$ en une minute; ce qui a été déduit comme résultat moyen de quatre observations qui ont duré 2 minutes chacune.

Le 7 juin, les mêmes expériences, au nombre de quatre, ont été répétées avec les mêmes circonstances, sauf de légères variations dans les longueurs successives du tuyau; ces expériences ont donné des résultats qui s'accordent parfaitement avec ceux que nous venons de rapporter : ainsi nous croyons devoir nous borner à indiquer ici ceux des deux expériences suivantes, dans lesquelles la longueur du tuyau a été augmentée et diminuée d'une manière notable.

15.e EXPÉRIENCE.

A $126^m,58$ de longueur, l'écoulement de l'air du gazomètre l'a fait descendre de $0^m,05075$ en une minute.

16.e EXPÉRIENCE.

Enfin, la longueur du tuyau ayant été réduite à $6^m,58$, le gazomètre est descendu, dans une minute, de $0^m,2380$.

On voit, en comparant entre eux tous les résultats que nous venons de présenter, des expériences faites sur l'écoulement de l'air atmosphérique par des tuyaux de $0^m,01579$ de diamètre, que, les longueurs de ces tuyaux étant entre elles comme les nombres $6\frac{58}{100}$, 37, 56, 81, 111 et 127, les dépenses du réservoir sont proportionnelles aux nombres 238, 95, 84, 65, 55 et 50; ce qui confirme ce que nous avions déjà observé.

Après avoir terminé ces expériences sur l'écoulement de l'air atmosphérique, le gazomètre fut rempli de gaz hydrogène carboné; et, en faisant varier seulement la longueur du tube par lequel l'écoulement s'opérait, nous obtînmes les résultats suivans :

17.e EXPÉRIENCE.

La longueur du tuyau d'écoulement étant de 37m,53, la descente du gazomètre fut de 0m,12858 en une minute.

18.e EXPÉRIENCE.

Sous une longueur de tuyau de 56m,84, le gazomètre descendit, pendant le même intervalle de temps, de 0m,10828.

19.e EXPÉRIENCE.

La longueur de ce tube ayant été portée à 85m,06, l'affaissement du gazomètre fut, en une minute, de 0m,09587.

20.e EXPÉRIENCE.

Le tuyau ayant 109m,04 de longueur, le gazomètre descendit de 0m,07444.

21.e EXPÉRIENCE.

Enfin, sous une longueur de 126m,58, l'affaissement du gazomètre en une minute fut observé de 0m,069402.

Les résultats que nous venons d'indiquer, sont, comme tous les précédens, des résultats moyens entre trois ou quatre observations faites sur chacune des longueurs de tuyau auxquelles elles se rapportent.

On en conclut encore que, ces longueurs variant entre elles comme les nombres 37, 57, 85, 109 et 127, les dépenses du gaz hydrogène sous la même pression varient

comme les nombres 128, 108, 95, 74 et 69; tandis que, sous les mêmes longueurs de tuyau, les dépenses du gaz atmosphérique sont comme les nombres 95, 84, 65, 55 et 50 : d'où l'on tire encore cette conséquence, que, dans des circonstances tout-à-fait semblables, l'écoulement du gaz hydrogène par des tuyaux de conduite d'un petit diamètre est plus rapide que l'écoulement de l'air atmosphérique, et cela dans un rapport plus grand que celui de leurs densités spécifiques.

Nous résumons par ordre, dans les tables suivantes, les résultats des expériences que nous venons de rapporter.

TABLE N.° I.

Expériences faites sur le Gaz hydrogène carboné, le 11 mai 1819.

Diamètre de la conduite, 3 pouces = 0m,08121;

Hauteur de la colonne d'eau dans le manomètre, 15 lignes = 0m,03383;

Section transversale du gazomètre, 9m,4968;

Température, 16 degrés du thermomètre centigrade.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	LONGUEUR DU TUYAU.	DESCENTE du GAZOMÈTRE par minute.
1.	128m,80.	0m,1218.
2.	475m,80.	0m,07103.
3.	622m,80.	0m,05414.

TABLE N.° 2.

Expériences faites sur l'Air atmosphérique, le 15 mai.

Diamètre de la conduite, 3 pouces$=0^m,08121$;
Hauteur de la colonne d'eau dans le manomètre, $0^m,03383$;
Section transversale du gazomètre, $9^m,4968$;
Température, 16 degrés.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	LONGUEUR DU TUYAU.	DESCENTE du GAZOMÈTRE par minute.
4.	$128^m,80$.	$0^m,09023$.
5.	$375^m,80$.	$0^m,05414$.
6.	$622^m,80$.	$0^m,03947$.

TABLE N.° 3.

Expériences faites sur l'Air atmosphérique, le 31 mai.

Diamètre de la conduite, 1° 3'$=0^m,01579$;
Hauteur de la colonne d'eau dans le manomètre, $0^m,03373$;
Section transversale du gazomètre, 0,36331;
Température, 15 degrés du thermomètre centigrade.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	LONGUEUR DU TUYAU.	DESCENTE du GAZOMÈTRE par minute.
7.	$36^m,91$.	$0^m,09585$.
8.	$55^m,91$.	$0^m,08459$.
9.	$88^m,06$.	$0^m,06541$.
10.	$111^m,24$.	$0^m,05526$.

TABLE N.° 4.

Expériences faites sur l'Air atmosphérique, le 7 juin.

Diamètre de la conduite, 1° 3′ = 0m,01579;
Hauteur de la colonne d'eau dans le manomètre, 0m,03383;
Section transversale du gazomètre, 0,3631;
Température, 19 degrés.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	LONGUEUR DU TUYAU.	DESCENTE du GAZOMÈTRE par minute.
11.	37m,53.	0m,094745.
12.	56m,84.	0m,08121.
13.	85m,06.	0m,06767.
14.	109m,04.	0m,05414.
15.	126m,58.	0m,05075.
16.	6m,58.	0m,23800.

TABLE N.° 5.

Expériences faites sur le Gaz hydrogène carboné, le 7 juin.

Diamètre de la conduite, 1° 3′ = 0m,01579;
Hauteur de la colonne d'eau dans le manomètre, 0m,03383;
Section transversale du gazomètre, 0,3631;
Température, 19 degrés.

NUMÉROS des EXPÉRIENCES.	LONGUEUR DU TUYAU.	DESCENTE du GAZOMÈTRE par minute.
17.	37m,53.	0m,12858.
18.	56m,84.	0m,10828.
19.	85m,06.	0m,09587.
20.	109m,04.	0m,07444.
21.	126m,58.	0m,06940.

Pour terminer les expériences propres à faire connaître l'influence de la longueur des conduites sur les produits de l'écoulement des gaz, nous avons fait percer sur la calotte du gazomètre, qui était formée d'une feuille de cuivre rouge d'environ 2 millimètres d'épaisseur, un trou rond, précisément du même diamètre que les canons de fusil dont notre conduite était composée; et, ayant rempli successivement ce réservoir d'air atmosphérique et de gaz hydrogène carboné, dont la compression était également mesurée par le poids d'une colonne d'eau de $0^{m},03383$ de hauteur, on a obtenu les deux résultats suivans :

Le trou rond percé sur la calotte du gazomètre qui avait été rempli d'air atmosphérique, ayant été ouvert, et la descente du gazomètre étant parvenue à l'uniformité, ce qui a lieu dans un espace de temps très-court, cette cloche est descendue de $0^{m},5414$ en une minute.

Nous avons vu qu'en faisant sortir, en vertu de la même pression, l'air atmosphérique par l'extrémité d'une conduite de même diamètre et de 127 mètres de longueur, la descente du gazomètre n'était que de 50 millimètres, c'est-à-dire, environ onze fois moindre dans le même temps.

Le trou pratiqué à la calotte du gazomètre ayant été ouvert lorsqu'il était rempli de gaz hydrogène carboné, cette cloche cylindrique est descendue de $0^{m},7308$ en une minute; elle ne descendait, comme nous l'avons vu, que de $0^{m},0694$, c'est-à-dire, d'une quantité environ onze fois moindre, lorsque le gaz s'échappait à l'extrémité d'une conduite de 127 mètres de long.

Au surplus, nous retrouvons ici, lorsque l'écoulement des deux gaz a lieu par des orifices percés dans une paroi mince, ce que nos expériences sur cet écoulement par de longues conduites nous avaient déjà fait connaître ; savoir : que la dépense du gaz hydrogène carboné est plus grande que

celle de l'air atmosphérique dans un plus grand rapport que l'inverse de leurs densités respectives.

Après cet exposé de toutes les expériences que nous avons faites sur l'écoulement de deux fluides aériformes par des tuyaux de conduite de différens diamètres, nous allons entrer dans la discussion de ces expériences et rechercher la théorie qui les explique.

Il est évident d'abord, puisque la dépense du gaz diminue à mesure qu'on allonge le tuyau dans lequel il se meut, que cette diminution de dépense provient de la résistance que le gaz éprouve à se mouvoir contre la paroi intérieure de ce tuyau, soit que cette résistance doive être attribuée à l'adhérence du gaz à la surface de cette paroi, soit qu'elle doive être attribuée aux aspérités de celle-ci, ou bien enfin à ces deux causes combinées.

Il est évident, en second lieu, puisque l'effet de cette résistance, à quelque cause qu'on l'attribue, se fait sentir sur la masse entière du gaz en mouvement, que les couches concentriques de ce gaz adhèrent les unes aux autres avec une certaine force; d'où il arrive qu'une couche quelconque est ralentie par la couche qui lui est contiguë du côté de la paroi, et accélérée par la couche qui lui est contiguë en allant vers le centre du tuyau.

Et, comme on démontre que l'expression de cette adhérence mutuelle des couches fluides les unes aux autres disparaît de la somme des forces retardatrices dont ces couches sont animées, et qu'il ne reste dans cette expression finale que les résistances qui ont lieu à la paroi du tube, il s'ensuit que cette résistance à la paroi est la seule que l'on ait à déterminer.

Il est évident, en troisième lieu, puisque le gazomètre descend uniformément pendant l'écoulement des gaz, que ces gaz se meuvent aussi uniformément dans les tubes qu'ils

parcourent, indépendamment du plus ou moins d'élasticité dont ils peuvent être doués.

Or ces divers phénomènes du mouvement des gaz sont exactement les mêmes que ceux du mouvement linéaire des liquides incompressibles; d'où il est permis de conclure que les mêmes formules doivent servir à calculer le mouvement des uns et des autres.

Il est même à remarquer que si le mouvement des liquides incompressibles dans des conduites horizontales ou diversement inclinées cesse d'être linéaire lorsque ces conduites ont un certain diamètre, cela tient seulement à ce que les couches supérieures de la masse liquide en mouvement modifient par leur poids la pression qu'éprouvent les couches inférieures; ce qui change la valeur de leur force accélératrice telle qu'on la suppose dans la formule du mouvement linéaire.

Mais, si la pesanteur spécifique d'un gaz quelconque, en mouvement dans un tuyau horizontal d'un diamètre fini, est assez petite pour que les couches inférieures de ce gaz n'éprouvent qu'une pression insensible de la part des couches supérieures, également renfermées dans ce tube, les unes et les autres resteront toutes animées de la même force accélératrice, et les formules du mouvement linéaire, qui cessent d'être rigoureusement applicables au mouvement des liquides incompressibles lorsque les tuyaux ne sont pas très-petits, peuvent, à la rigueur, s'appliquer encore au mouvement des gaz d'une grande légèreté spécifique, quel que soit le diamètre des tuyaux dans lesquels ils se meuvent.

Cela posé, recherchons les forces accélératrices et retardatrices dont les momens se compensent lorsque l'écoulement des gaz est devenu uniforme.

La pression qu'éprouve le gaz à son entrée dans la conduite, est égale au poids de l'atmosphère augmenté de celui de la colonne d'eau soutenue dans le manomètre.

La pression que le gaz éprouve à la sortie du tube, est égale au poids de l'atmosphère seulement.

Or la différence de ces pressions, c'est-à-dire, le poids de la colonne d'eau soutenue dans le manomètre, est évidemment la seule force accélératrice qui produit le mouvement du gaz.

Que l'on transforme maintenant cette colonne d'eau en une colonne de liquide incompressible du même poids, mais d'une pesanteur spécifique égale à celle du gaz en mouvement, il est clair que, sans avoir altéré la pression qui s'exerce sur un gaz, on aura ramené le système au cas où le fluide en mouvement dans le tube soutient la charge verticale d'une certaine hauteur de ce même fluide ; ce qui est précisément le cas exprimé par les formules du mouvement linéaire des liquides incompressibles.

Nommant donc h la hauteur de l'eau dans le manomètre, p sa pesanteur spécifique, p' celle du fluide aériforme en mouvement dans le tube, on aura, pour la hauteur de la colonne de liquide de même densité que le gaz, et qui aurait le même poids que la hauteur d'eau du manomètre, $\frac{hp}{p'}$.

Ainsi, en appelant g la gravité terrestre, et l la longueur du tuyau, la force accélératrice dont le gaz est animé dans le tube, sera, comme on sait (1),

$$\frac{ghp}{p'l}.$$

Enfin, D étant le diamètre du tube, et π le rapport de la circonférence au diamètre, on aura, pour le moment de la force accélératrice du gaz contenu dans le tube,

$$\frac{ghp}{p'l} \times \frac{\pi D^2}{4} l.$$

(1) Voyez nos *Mémoires sur l'écoulement des liquides par des tubes capillaires, &c.*, lus à l'Académie les 6 mai 1816 et 12 janvier 1817.

Quant au moment de la force retardatrice, son expression générale est, comme on sait,

$$\pi D l (a u + b u^2),$$

dans laquelle u représente la vîtesse uniforme du fluide, et a et b deux coefficiens constans, à déterminer par l'expérience.

Ainsi l'on a

$$\frac{g D h p}{4 p' l} = a u + b u^2;$$

équation de laquelle il faut déduire, au moyen de nos observations, les valeurs de a et b; quantités dont la première exprime l'adhésion du gaz à la paroi intérieure du tube, ou, si cette paroi est susceptible d'être mouillée par ce gaz, l'adhésion des couches gazeuses les unes aux autres, et dont la seconde est une quantité numérique dépendante du nombre et de la disposition des aspérités dont la paroi du tuyau peut être recouverte.

Quoiqu'il fût très-probable que le terme $a u$ dût disparaître de la formule, parce que les gaz mouillent les surfaces solides avec lesquelles ils sont en contact, et parce que l'adhésion des couches gazeuses entre elles est infiniment petite, cependant nous avons commencé par déduire de nos expériences les valeurs de a et de b.

En comparant les expériences deux à deux, on a, en effet, pour une première expérience, en divisant par u tous les termes de la formule,

$$\frac{g D h p}{4 p' l' u'} - a - b u' = 0;$$

et pour une seconde,

$$\frac{g D h p}{4 p' l'' u''} - a - b u'' = 0.$$

Retranchant la seconde équation de la première, on trouve immédiatement

$$\frac{gDhp}{4p'}\left(\frac{1}{l'u'}-\frac{1}{l''u''}\right)-b\,(u'-u'')=0:$$

d'où l'on tire,

$$1.^{\circ}\ b=\frac{1}{u'-u''}\left(\frac{gDhp}{4p'}\right)\left(\frac{1}{l'u'}-\frac{1}{l''u''}\right);$$

$$2.^{\circ}\ a=\left(\frac{gDhp}{4p'}\right)\frac{u'u''}{u'-u''}\left(\frac{1}{l'u'u'}-\frac{1}{l''u''u''}\right).$$

Dans les applications numériques de ces équations, nous avons supposé que la pesanteur de l'eau est à celle de l'air atmosphérique comme 811 est à 1; et à celle du gaz hydrogène carboné, comme $1461\frac{29}{111}$ est à 1; ce qui donne, pour la hauteur de la colonne de liquide accélératrice lors de l'écoulement de l'air atmosphérique, $\frac{ph}{p'}=27^{m},43613$; et lors de l'écoulement du gaz hydrogène, $\frac{ph}{p'}=49^{m},400$.

On sait d'ailleurs que $g=9^{m},80879$.

Voici, d'après ces données, les élémens de nos calculs disposés par ordre, et leurs résultats déduits des deux formules précédentes.

TABLEAU N.° 6.

Expériences faites sur le Gaz hydrogène carboné, le 11 mai 1819.

NUMÉROS des expériences.	VALEUR de $\frac{gDhp}{4p'}$.	VALEURS de l.	VALEURS de u.	VALEURS de u'.	VALEURS de a.	VALEURS de b.
1.		$128^{m},80$.	$5^{m},882$.	$34^{m},772$.	$0^{m},003136$.	$0,^{m}0013004$.
2.	9,8377.	$375^{m},80$.	$3^{m},440$.	$11^{m},833$.	$0^{m},002632$.	$0^{m},0014471$.
3.		$622^{m},80$.	$2^{m},622$.	$6^{m},882$.	$0^{m},000713$.	$0,^{m}0020046$.

TABLEAU N.° 7.

Expériences faites sur l'Air atmosphérique, le 15 mai 1819.

NUMÉROS des expériences.	VALEUR de $\frac{gDhp}{4p'}$.	VALEURS de l.	VALEURS de u.	VALEURS de u^2.	VALEURS de a.	VALEURS de b.
4.		128m,80.	4m,3698.	19m,1390.	0m,002414.	0m,0028833.
5.	5,4637.	375m,80.	2m,6337.	6m,9069.	0m,000570.	0m,001866.
6.		622m,80.	1m,8970.	3m,5985.	0m,001909.	0m,000307.

On voit, en comparant dans chacun de ces tableaux les valeurs de a qui devraient représenter l'adhérence constante des couches gazeuses en contact, que ces valeurs diffèrent beaucoup entre elles, sans qu'il existe la moindre apparence d'aucune loi de continuité par laquelle elles soient liées.

Il en est de même du coefficient numérique b dans l'un et l'autre tableau : d'où il suit évidemment que la formule générale du mouvement linéaire uniforme, où l'on représente les forces retardatrices par deux termes, dont l'un est proportionnel à la simple vîtesse, et l'autre à la seconde puissance de cette vîtesse, ne peut s'appliquer à l'écoulement des fluides aériformes dans des tuyaux de conduite d'un diamètre fini. D'un autre côté, si l'on considère que l'adhérence des couches gazeuses concentriques qui glissent les unes sur les autres en s'écoulant par les tuyaux, est nécessairement une quantité très-petite, et dont, par conséquent, l'effet dans la production des résistances peut être négligé, la formule du mouvement linéaire uniforme se réduit à celle-ci, beaucoup plus simple,

$$\frac{gDhp}{4lp'} = bu'u',$$

dans laquelle le moment de la force retardatrice est représenté par un seul terme proportionnel au carré de la vîtesse.

En l'appliquant aux expériences des deux tableaux précédens, on formera ces deux-ci :

TABLEAU N.° 8.

Expériences faites sur le Gaz hydrogène carboné.

NUMÉROS des expériences.	VALEUR de $\frac{gDhp}{4p'}$.	VALEURS de l.	VALEURS de u^2.	VALEURS de b.	VALEUR moyenne de b.	OBSERVATIONS.
1.		128m,80.	34m,772.	0m,005516.		
2.	9,8377.	375m,80.	11m,833.	0m,005539.	0m,005636.	
3.		622m,80.	6m,882.	0m,005854.		

TABLEAU N.° 9.

Expériences faites sur l'Air atmosphérique.

NUMÉROS des expériences.	VALEUR de $\frac{gDhp}{4p'}$.	VALEURS de l.	VALEURS de u^2.	VALEURS de b.	VALEUR moyenne de b.
4.		128m,80.	19m,1390.	0m,005579.	
5.	5,4637.	375m,80.	6m,9069.	0m,005309.	0m,005621.
6.		622m,80.	3m,5985.	0m,005975.	

On voit, en les examinant, que la valeur du coefficient du carré de la vîtesse du gaz est constante, comme nous l'avions prévu, et représentée par le nombre 0m,005636 pour le gaz hydrogène carboné, et par le nombre 0m,005621 pour l'air atmosphérique : ainsi ces coefficiens doivent être regardés comme identiques.

Il est aisé, au surplus, d'expliquer cette identité, en considérant que le gaz hydrogène carboné et l'air atmosphérique mis à l'épreuve étaient comprimés par le même poids à la même température, et par conséquent doués du même degré d'élasticité; et que ces fluides aériformes s'écoulaient par la même conduite.

Recherchons maintenant le même cofficient, en le déduisant de nos observations sur l'écoulement des mêmes fluides par la conduite de canons de fusil ajustés bout à bout.

TABLEAU N.° 10.

Expériences faites sur l'Air atmosphérique, le 31 mai 1819.

NUMÉROS des expériences.	VALEUR de $\frac{gDhp}{4p'}$.	VALEURS de l.	VALEURS de u^2.	VALEURS de b.	VALEUR moyenne de b.
7.		$36^m,91$.	$8^m,6093$.	$0^m,003307$.	
8.	1,0624.	$55^m,91$.	$6^m,6289$.	$0^m,002804$.	$0^m,003126$.
9.		$88^m,06$.	$4^m,0093$.	$0^m,002977$.	
10.		$111^m,24$.	$2^m,8615$.	$0^m,003317$.	

TABLEAU N.° 11.

Expériences faites sur l'Air atmosphérique, le 7 juin 1819.

NUMÉROS des expériences.	VALEUR de $\frac{gDhp}{4p'}$.	VALEURS de l.	VALEURS de u^2.	VALEURS de b.	VALEUR moyenne de b.
11.		$37^m,53$.	$8^m,4117$.	$0^m,003329$.	
12.		$56^m,84$.	$6^m,1829$.	$0^m,002992$.	
13.	1,0624.	$85^m,06$.	$4^m,2917$.	$0^m,002879$.	$0^m,003246$.
14.		$109^m,04$.	$2^m,7466$.	$0^m,003430$.	
15.		$126^m,58$.	$2^m,4131$.	$0^m,003362$.	
16.		$6^m,58$.	$53^m,0790$	$0^m,003486$.	

TABLEAU N.° 12.

Expériences faites sur le Gaz hydrogène carboné, le 7 juin 1819.

NUMÉROS des expériences.	VALEUR de $\frac{gDhp}{4p'}$.	VALEURS de l.	VALEURS de u^2.	VALEURS de b.	VALEUR moyenne de b.
17.		37m,53.	15m,4920.	0m,003182.	
18.		56m,84.	10m,9860.	0m,003032.	
19.	1,9111.	85m,06.	6m,7723.	0m,003067.	0m,003219.
20.		109m,04.	5m,1926.	0m,003503.	
21.		126m,58.	4m,5132.	0m,003314.	

La valeur moyenne du coefficient b, déduite des quatre observations faites, le 31 mai, sur l'air atmosphérique, est de 0m0,03126; la valeur moyenne du même coefficient, déduite des observations du 7 juin, est de 0m,003246, ou, pour les deux séries d'observations, une valeur commune de 0m,003186.

Le tableau n.° 12 indique que la valeur moyenne du coefficient b, pour l'écoulement du gaz hydrogène carboné, est de 0m,003219.

Ainsi nous retrouvons entre les coefficiens de la seconde puissance de la vîtesse du gaz hydrogène et de l'air atmosphérique, quand ils se meuvent uniformément dans un tuyau de 0m,016 de diamètre, l'identité que nous avions observée quand ces deux fluides se meuvent dans une conduite de 0m,081 ; mais avec cette circonstance remarquable, que ces coefficiens, qui sont les mêmes pour le même tuyau, ont des valeurs différentes pour des tuyaux différens.

Ainsi, pour la grande conduite, le coefficient b est sen-

siblement représenté par le nombre $0^{m},005628$; tandis que pour la petite il est représenté par le nombre $0^{m},003219$.

Cette différence ne tient qu'à une seule cause, qu'il nous semble facile d'assigner.

En effet, pour déduire la valeur de b de la formule générale du mouvement linéaire des fluides élastiques

$$\frac{gDhp}{4lp'uu}=b,$$

nous avons pris la vîtesse moyenne de l'écoulement : mais ce n'est point cette vîtessse moyenne dont le carré doit être multiplié par le coefficient b, c'est la vîtesse qui a lieu immédiatement contre la paroi intérieure des tubes; et comme cette vîtesse de la couche de gaz en contact avec la paroi est nécessairement moindre que la vîtesse moyenne de la masse entière en mouvement dans le tube, il s'ensuit, comme nous l'avons déjà fait voir ailleurs, que, toutes les fois que le tube n'est pas très-petit, la valeur de b déduite de la vîtesse moyenne de l'écoulement est nécessairement trop faible.

On conçoit facilement encore que plus le diamètre de la conduite diminue, moins il y a de différence entre la vîtesse moyenne de toutes les couches concentriques du gaz et la vîtesse de la couche qui est immédiatement en contact avec la paroi du tuyau.

Cela posé, il est clair que, pour une conduite d'une substance donnée et d'un certain degré de poli, la même pression sur la tête de la conduite, c'est-à-dire, la même force accélératrice, doit imprimer la même vîtesse à la couche gazeuse qui est contiguë à la même paroi, quel que soit d'ailleurs le diamètre de cette conduite, puisque cette couche gazeuse, qui sert comme d'enveloppe à toutes les autres, est soumise à des forces indépendantes de ce diamètre.

Maintenant, quelle que soit la loi de l'accroissement des vîtesses dont sont animées les couches concentriques depuis

la paroi de la conduite jusqu'à son centre, on peut toujours regarder la vîtesse moyenne de toute la masse de gaz en mouvement comme égale à la vîtesse latérale augmentée d'une certaine quantité, fonction du diamètre de la conduite, et qui, augmentant avec lui, peut être représentée généralement par une série composée de termes proportionnels aux puissances successives de ce diamètre; de sorte qu'en appelant V la vîtesse latérale constante sous une même pression et sur une surface de nature déterminée, et u la vîtesse moyenne, on aura toujours $u = V + mD + nD^2 + oD^3 + pD^4$, &c.; et par conséquent notre formule générale deviendra celle-ci,

$$\frac{gDhp}{4lp'(V + mD + nD^2 + \&c.)^2} = b,$$

laquelle montre que le coefficient déterminé par l'expérience, d'après l'observation de la vîtesse moyenne, est toujours d'autant moindre que le diamètre de la conduite est plus grand; cependant nous l'avons trouvé de $0^m,005628$ pour des tuyaux de 3 pouces, et de $0^m,003219$ pour des tuyaux de 7 lignes : d'où il suit que l'excès du premier de ces coefficiens sur le second ne peut être attribué à la différence qui existe entre la vîtesse latérale et la vîtesse moyenne du fluide, différence qui est toujours une certaine fonction du diamètre du tuyau dans lequel il se meut, mais que cet excès doit être exclusivement attribué au degré de poli des parois intérieures de ces tuyaux, lequel est beaucoup moindre dans la grosse conduite en fonte de fer que dans les canons de fusil vissés bout à bout.

Il résulte des expériences dont nous venons de rendre compte, et de la discussion à laquelle nous les avons soumises,

1.° que le gaz hydrogène carboné et l'air atmosphérique amenés au même état de compression se meuvent suivant les mêmes lois et éprouvent exactement les mêmes résistances

dans les mêmes tuyaux de conduite, et cela, indépendamment de leurs densités spécifiques;

2.° Que les résistances qu'éprouvent des fluides aériformes à se mouvoir dans les mêmes tuyaux, sont exactement proportionnelles aux carrés de leurs vîtesses moyennes;

3.° Enfin, qu'en conséquence de cette loi, et de celles du mouvement linéaire, les dépenses du gaz par une conduite donnée de grosseur uniforme sont toujours *en raison directe de la pression indiquée par le manomètre placé dans le réservoir qui alimente l'écoulement, et en raison inverse de la racine carrée de la longueur de la conduite par laquelle l'écoulement s'opère.*

RECHERCHES

Sur les Canaux de navigation, considérés sous le rapport de la chute et de la distribution de leurs écluses;

PAR M. P. S. GIRARD.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 26 Juin 1820.

La dépense d'eau d'un canal de navigation, pendant un temps déterminé, se compose,

1.° D'un certain volume d'eau enlevé par l'évaporation naturelle;

2.° De celui qui est perdu par les filtrations à travers les terres formant le lit du canal;

3.° Enfin de celui qui est nécessaire pour l'entretien de la navigation ascendante et descendante.

L'évaporation est un phénomène contre lequel l'art n'a aucune prise : ainsi la dépense due à cette cause est inévitable.

Quelle que soit la nature du sol dans lequel un canal doit être établi, on peut toujours parvenir, à l'aide de moyens appropriés, à diminuer et même à arrêter tout-à-fait les pertes d'eau dues aux filtrations.

Reste la dépense due à l'entretien de la navigation, et cette dépense est, pour l'ordinaire, beaucoup plus considé-

rable que celle provenant de l'évaporation et des filtrations: aussi, quand il s'agit d'exécuter un canal, faut-il s'être assuré d'avance de pouvoir rassembler au point le plus élevé de son cours une quantité d'eau suffisante pour l'entretien de la navigation à laquelle on le destine. L'impossibilité de remplir cette première condition a souvent obligé de renoncer à entreprendre des canaux qui auraient puissamment contribué aux progrès de l'agriculture et à la prospérité du commerce de certaines provinces: on en a vu quelques autres ne remplir qu'imparfaitement leur objet, parce que le volume d'eau rassemblé pour les alimenter ne suffisait à leurs besoins que pendant quelques mois de l'année. Voilà pourquoi beaucoup d'ingénieurs et de mécaniciens se sont occupés, en France, et sur-tout en Angleterre, de rechercher quelques moyens de suppléer au défaut d'eau dans les canaux navigables. Ainsi ont été successivement imaginés les sas mobiles de M. Solage, les plans inclinés de Fulton, les bateaux à roues de Chapman, les écluses à flotteur de Bettancourt, et enfin, tout récemment, l'écluse pneumatique de Congrève; mais la mise en pratique de toutes ces inventions, quelqu'ingénieuses qu'elles soient, exige une dépense de forces motrices dont on est toujours affranchi quand les bateaux peuvent être tenus naturellement à flot et circuler dans les canaux, sans autre embarras que celui de traverser de simples écluses telles qu'elles ont été primitivement imaginées.

D'un autre côté, ces inventions ne sont rigoureusement praticables que pour de petits canaux; et, quand le combustible ne manque pas, le moyen le moins dispendieux de subvenir au manque d'eau est encore de faire remonter dans les biefs successifs, à l'aide d'une machine à vapeur, l'eau qui en a été tirée pour le passage des bateaux dans les écluses.

Ce serait donc rendre un service éminent, et accélérer

la mise à exécution d'un système général de navigation intérieure en France, que de diminuer la dépense d'eau des canaux navigables, grands ou petits, sans changer le mode de construction des écluses à sas ordinaires, appareil ingénieux, dont la manœuvre est l'application d'un principe si simple d'hydrostatique, que l'on doit peut-être désespérer de pouvoir jamais lui substituer quelque chose de plus parfait.

Dès les premiers temps de l'invention des écluses à sas, il fut aisé de déterminer la quantité d'eau qu'il fallait tirer d'un bief ou réservoir quelconque, pour y faire monter ou pour en faire descendre un bateau, connaissant la chute de l'écluse qui séparait ce bief du bief inférieur contigu.

Plus tard, il s'agita entre les ingénieurs français la question de savoir comment la dépense du réservoir de partage d'un canal se trouve modifiée, lorsque plusieurs écluses sont réunies en un corps de sas accolés. Les différentes suppositions que l'on fit, changeant l'état de la question, firent naître des dissidences d'opinion, dont M. Gauthey a le premier rendu compte dans un mémoire imprimé en 1783 parmi ceux de l'Académie de Dijon, et que l'on retrouve inséré dans le troisième volume de ses œuvres.

Les ingénieurs du canal du Midi, qui avaient le plus grand intérêt à apprécier exactement la dépense du réservoir de partage de ce canal, et qui pouvaient aisément en répéter la mesure dans les deux hypothèses des écluses simples et des sas accolés, se sont occupés spécialement de la question dont il s'agit, et en ont donné des solutions diverses, comme on peut le voir dans un mémoire que M. Ducros, inspecteur général des ponts et chaussées, publia en l'an IX.

Après avoir indiqué, ainsi que M. Gauthey l'avait déjà fait, l'ordre suivant lequel des bateaux qui montent et qui descendent un canal, doivent se succéder pour ne point

occasionner une consommation d'eau inutile, M. Ducros donna quelques formules propres à exprimer cette dépense, lorsqu'un bateau traverse, en montant ou en descendant, un nombre quelconque de sas accolés : ces formules, que M. le général Andréossy, auteur de l'*Histoire du canal du Midi*, attribue à M. Clauzade, l'un des ingénieurs de ce canal, ayant été généralisées par M. de Prony dans un rapport fait à l'assemblée générale des ponts et chaussées sur le mémoire de M. Ducros, on peut aisément, dans tous les cas, calculer par leur moyen la dépense d'eau qui a lieu pour le passage d'un ou de plusieurs bateaux à travers un système d'écluses multiples, de chacune desquelles on connaît la chute.

Mais n'existe-t-il pas un rapport nécessaire entre cette chute, la dépense d'eau au passage de l'écluse, et le tirant d'eau des bateaux qui la montent ou qui la descendent ? Cette question, tout importante qu'elle est, n'a point été traitée jusqu'à présent, et je me suis proposé de la résoudre.

Pour la ramener à ses termes les plus simples, nous supposerons, 1.° qu'il s'agit de faire passer les bateaux d'un bief dans un autre par une seule écluse;

2.° Que ces bateaux, de forme prismatique, comme le sas de cette écluse, le remplissent assez exactement, lorsqu'ils y sont introduits, pour que l'intervalle compris entre leurs bords et les parois du sas puisse être négligé par rapport à l'espace que ces bateaux occupent.

Nommons S la section horizontale du sas et des bateaux;

x, la chute de l'écluse, c'est-à-dire, la différence de niveau entre la surface de l'eau des deux biefs inférieur et supérieur qu'elle réunit;

$t_{,}$, le tirant d'eau d'un bateau qui monte vers le point culminant du canal;

$t_{,,}$, le tirant d'eau d'un bateau qui en descend.

Pour faire passer un bateau du bief inférieur dans le bief supérieur, la manœuvre consiste,

1.° A introduire le bateau dans le sas par la porte d'aval, que l'on ferme après qu'il y est entré;

2.° A verser, par un procédé quelconque, du bief supérieur dans le sas, l'eau nécessaire pour la mettre de niveau dans l'un et dans l'autre;

3.° A ouvrir la porte d'amont de l'écluse, et à faire passer dans le bief supérieur le bateau qui était enfermé dans le sas.

Or on voit que, pour effectuer cette manœuvre, on a d'abord tiré du bief supérieur, pour élever l'eau du sas au niveau de ce bief, un prisme d'eau $= Sx$, ayant pour base la section horizontale du sas, et pour hauteur la différence de niveau entre les deux biefs, c'est-à-dire, la chute de l'écluse.

On voit ensuite qu'en faisant passer le bateau de l'intérieur du sas dans le bief supérieur, le bateau est nécessairement remplacé dans le sas par un prisme d'eau $St_{\prime\prime}$, précisément égal à celui qu'il déplace.

Ainsi il est sorti du bief supérieur, pour amener les choses à cet état, un volume d'eau exprimé par $Sx + St_{\prime}$.

Supposons maintenant que, la communication restant établie entre le sas et le bief supérieur, il se trouve dans celui-ci un bateau prêt à descendre : la manœuvre se réduit,

1.° A introduire le bateau dans le sas par la porte d'amont, que l'on ferme après qu'il y est entré;

2.° A vider le sas jusqu'au niveau du bief inférieur;

3.° Enfin à ouvrir la porte d'aval et à faire passer le bateau dans le bief inférieur.

Or, en introduisant d'abord le bateau du bief supérieur dans le sas, on a fait nécessairement refluer dans ce bief un volume d'eau $= St_{\prime\prime}$ égal à celui que ce bateau déplace.

En vidant ensuite ce sas jusqu'au niveau du bief inférieur, on a remis les choses dans le même état où elles étaient lorsqu'on a fait monter le premier bateau.

On a donc opéré la montée de ce premier bateau et la descente du second, c'est-à-dire, opéré ce que nous appellerons *le double passage*, en faisant dépenser au bief supérieur un volume d'eau représenté par $S x - S(t_{\prime\prime} - t_{\prime}) = S y'$, la dépense faite pouvant toujours être représentée par un prisme d'eau qui aura pour base la section horizontale du sas, et pour hauteur une ligne quelconque indéterminée y'.

Cette équation, divisée par le facteur S, commun à tous ses termes, devient

$$y' = x - (t_{\prime\prime} - t_{\prime}),$$

laquelle appartient à une ligne droite facile à construire : elle exprime d'ailleurs entre la dépense d'eau, la chute de l'écluse et le tirant d'eau des bateaux, des relations qui, malgré leur extrême simplicité, n'avaient point encore été remarquées.

Il suit de cette équation, que la dépense d'eau y' sera positive, nulle ou négative, suivant que l'on aura

$$x > t_{\prime\prime} - t_{\prime},$$

$$x = t_{\prime\prime} - t_{\prime},$$

$$x < t_{\prime\prime} - t_{\prime}.$$

Ainsi, non-seulement on pourra rendre la dépense d'un bief quelconque aussi petite que l'on voudra, mais encore on pourra la rendre nulle, et même faire remonter dans ce bief un certain volume d'eau du bief inférieur contigu.

Si l'on fait successivement monter et descendre dans la même écluse deux autres bateaux dont les tirans d'eau soient respectivement $t_{\prime\prime\prime}$ pour le bateau montant, et t_{iv} pour le

bateau descendant, on aura encore pour le double passage,

$$y'' = x - (t_{iv} - t_{iii}).$$

On aura de même, pour la dépense d'un troisième double passage,

$$y''' = x - (t_{vi} - t_{v}).$$

La dépense totale du bief supérieur d'une même écluse, pour un nombre quelconque n de doubles passages alternatifs, sera donc, généralement,

$$y' + y'' + y''' \text{ \&c.} = nx - [(t_{ii} + t_{iv} \ldots t_{2n}) - (t_{i} + t_{iii} + t_{v} + \ldots t_{2n-1})],$$

en désignant par des indices impairs le tirant d'eau des bateaux montans, et par des indices pairs le tirant d'eau des bateaux descendans : donc, si l'on fait la somme de tous les tirans d'eau des premiers $= T'$, la somme de tous les tirans d'eau des seconds $= T''$, et la dépense totale $y + y' + y'' +$ &c. $= Y$, on aura généralement

$$Y = nx - (T'' - T').$$

La dépense d'eau pour un nombre n de doubles passages par une même écluse sera donc positive, nulle ou négative, selon que l'on aura

$$x > \frac{T'' - T'}{n},$$

$$x = \frac{T'' - T'}{n},$$

$$x < \frac{T'' - T'}{n}.$$

Et comme les tirans d'eau des bateaux représentent toujours leur poids et celui de leurs chargemens, on voit que, pour assigner la chute de cette écluse sous l'une ou l'autre de ces trois conditions, il faudra connaître, avec le nombre des

bateaux qui seront employés, la nature et la quantité des importations et des exportations qui devront s'opérer au moyen du canal dont cette écluse fera partie. Ainsi le perfectionnement de cette espèce de construction exige l'application immédiate de certaines connaissances statistiques qui, au premier aperçu, ne paraissent avoir que des rapports éloignés avec l'art de projeter les canaux de navigation.

Cette succession de bateaux qui se rencontrent à chaque écluse, et que l'on fait alternativement monter et descendre, en profitant de la situation dans laquelle le sas a été mis par la descente ou la montée précédente, est évidemment celle qui présente le plus d'avantages sous le rapport de l'économie de l'eau dépensée; mais le mouvement des bateaux peut se faire sur un canal dans un ordre différent. Il peut arriver, en effet, que, pour satisfaire à certaines convenances, on soit obligé de les faire marcher en convoi, de telle sorte que tous les bateaux montans passent, à la file les uns des autres, à une certaine heure; et que tous les bateaux descendans passent, également à la file, à une autre heure de la journée.

Pour entrer dans l'examen de ce cas particulier, supposons d'abord que la communication soit établie entre le sas de l'écluse et le bief inférieur, et qu'il se présente un convoi de bateaux montans.

L'ascension du premier bateau exige, d'abord, que l'on verse dans le sas un volume d'eau Sx.

Le bateau, en sortant du sas, y est remplacé par un volume d'eau $St'_{,}$.

Ainsi, pour faire passer le premier bateau du convoi montant, du bief inférieur dans le bief supérieur, on a dépensé un volume d'eau

$$= S(x + t'_{,}).$$

Le second bateau trouvant le sas rempli, il faut commencer par faire descendre l'eau qu'il contient jusqu'au niveau

du bief inférieur : on ouvre alors la porte d'aval ; le second bateau est introduit dans le sas ; et, pour le faire passer dans le bief supérieur, on en tire un volume d'eau

$$= S(x + t'_{III}).$$

La montée du troisième bateau dépensera

$$S(x + t'_{V}).$$

Donc, le nombre des bateaux du convoi montant étant n, on aura tiré du bief supérieur un volume d'eau représenté par

$$S(n'x + t'_{I} + t'_{III} + t'_{V} + \&c.)$$

Considérons maintenant le convoi descendant.

Le premier bateau trouve le sas rempli, et, en y entrant, il fait refluer dans le bief supérieur un volume d'eau égal à celui qu'il déplace. Cette première dépense est donc négative et $= -St'_{II}$.

On abaisse ensuite l'eau du sas, et le premier bateau, étant descendu, passe dans le bief inférieur.

Le second bateau qui se présente pour descendre, trouve le sas au même niveau que le bief inférieur. Il faut donc commencer par élever l'eau dans ce sas à la hauteur du bief d'amont, et, par conséquent, tirer de celui-ci un volume d'eau $= Sx$, lequel, après l'introduction du bateau, se réduit à

$$S(x - t'_{IV}).$$

La dépense du troisième bateau est également de

$$S(x - t'_{VI});$$

Et la dépense de tout le convoi, en nommant m', le nombre de bateaux dont il est composé, est exprimée par

$$s[x(m' - 1) - t'_{II} - t'_{IV} - t'_{VI} \&c.].$$

E*

La dépense d'un second convoi, composé d'un nombre n'' de bateaux montans, sera

$$S(n''x + t''_{,} + t''_{,,,} + t''_{v} + \&c.).$$

Celle d'un second convoi descendant, composé d'un nombre m'' de bateaux, sera

$$S[x(m''-1) - t''_{,,} - t''_{iv} - t''_{vi} -].$$

Donc, en nommant Sy', Sy'', Sy''', &c., les dépenses d'eau occasionnées par chaque convoi montant; Sz', Sz'', Sz''', &c., les dépenses d'eau de chaque convoi descendant, on aura, pour la dépense totale du bief supérieur d'une écluse que traverse un nombre quelconque K de convois de bateaux montans et descendans alternativement :

$$S(y' + y'' + y''' + \&c. + z' + z'' + z''' + \&c.) =$$
$$S(n'x + t'_{,} + t'_{,,,} + t'_{v} + \&c.)$$
$$+ S(n''x + t''_{,} + t''_{,,,} + t''_{v} + \&c.)$$
$$+ S(n'''x + t'''_{,} + t'''_{,,,} + t'''_{v} + \&c.)$$

....

....

$$+ S[x(m'-1) - t'_{,,} - t'_{iv} - t'_{vi} - \&c.]$$
$$+ S[x(m''-1) - t''_{,,} - t''_{iv} - t''_{vi} \ldots \&c.]$$
$$+ S[x(m'''-1) - t'''_{,,} - t'''_{iv} - t'''_{vi} - \&c.];$$

ou, en faisant généralement le nombre total des bateaux montans $= N$, le nombre total des bateaux descendans $= M$, la somme des quantités

$$y' + y'' + y''' + \&c. + z' + z'' + z''' + \&c. = Y,$$

et conservant les dénominations T' et T'' pour la somme des tirans d'eau des bateaux montans et celle des tirans d'eau

des bateaux descendans, on aura plus simplement, après avoir divisé par S,

$$Y = x\,[N + (M - K)] - (T'' - T').$$

Donc la dépense totale du bief supérieur d'une écluse que traverse alternativement, en montant et en descendant, un nombre k de convois de bateaux, sera positive, nulle ou négative, suivant que l'on aura

$$x > \frac{T'' - T'}{N + (M - K)},$$

$$x = \frac{T'' - T'}{N + (M - K)},$$

$$x < \frac{T'' - T'}{N + (M - K)}.$$

Reprenons la formule générale

$$Y = x[N + (M - K)] - (T'' - T'),$$

et remarquons que le premier terme du second membre s'abaisse au *minimum* de sa valeur, lorsque $M - K = o$, c'est-à-dire, lorsque le nombre des bateaux descendans est égal au nombre de convois qu'ils forment, ou bien, ce qui est la même chose, lorsqu'ils cheminent un à un.

La formule devient, dans cette première hypothèse,

$$Y = Nx - (T'' - T'),$$

comme nous l'avons déjà trouvé.

Le terme $x\,[N + (M - K)]$ de la formule générale s'élève, au contraire, au *maximum* de sa valeur lorsque $K = 1$, puisqu'il ne peut y avoir moins d'un seul convoi montant ou descendant. On a, dans cette deuxième hypothèse,

$$Y = x\,[N + (M - 1)] - (T'' - T'),$$

équation qui s'applique au cas particulier où tous les bateaux

qui traverseraient l'écluse, ne formeraient que deux convois, l'un descendant pendant une certaine période, l'autre ascendant pendant la période suivante.

L'équation que nous venons de trouver, se transforme en celle-ci :

$$Y = x\,(2N - 1) - (T'' - T'),$$

lorsqu'on suppose le nombre des bateaux montans égal au nombre des bateaux descendans, supposition plus simple qu'aucune autre, et à laquelle nous allons nous arrêter.

Or il est clair que, si les bateaux, en nombre quelconque n, cheminent et se croisent un à un, la condition d'une dépense nulle sera exprimée par

$$x = \frac{T'' - T'}{n}.$$

Si, au contraire, les mêmes bateaux marchent en deux convois, la même condition sera exprimée par

$$x = \frac{T'' - T'}{2n - 1};$$

ce qui signifie que la chute de l'écluse s'approchera d'autant plus de

$$\frac{T'' - T'}{2n},$$

que le nombre en sera plus grand : d'où il suit que les deux quantités

$$\frac{T'' - T'}{n} \text{ et } \frac{T'' - T'}{2n}$$

sont les deux limites entre lesquelles on doit faire varier les hauteurs de chute d'une écluse, pour que la dépense de son bief supérieur soit nulle, en quelque nombre de convois alternatifs que l'on distribue un nombre de bateaux montant et descendant successivement.

Si donc on assigne, pour la hauteur de chute d'une écluse,

une quantité moyenne proportionnelle arithmétique entre les hauteurs qui rendent la dépense nulle dans les deux cas extrêmes que nous venons de remarquer, c'est-à-dire, si l'on fait

$$x = \frac{1}{2}\left[(T'' - T')\right]\frac{3n}{2n} = 3\left(\frac{T'' - T'}{4n}\right),$$

cette hauteur de chute satisfera le plus probablement possible à la condition de rendre à peu près nulle la dépense d'eau du bief supérieur d'une écluse que traversera, en montant et en descendant, une quantité donnée de bateaux, distribuée au hasard en un certain nombre de convois.

Cette hauteur de chute est, comme on voit, les $\frac{3}{4}$ de celle qui convient au cas où les bateaux montans et descendans alternent un à un au passage de chaque écluse. Ce dernier ordre de marche est celui auquel on tâche de s'assujettir sur les canaux de navigation; et l'analyse qui précède, le justifie suffisamment. Nous allons, dans ce qui va suivre, le supposer établi.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que la dépense d'eau, positive, nulle ou négative, qui a lieu au passage d'une écluse; mais, lors d'un double passage de bateaux à cette écluse, il y a mouvement imprimé non-seulement à l'eau dépensée, mais encore au bateau qui monte et au bateau qui descend. Cette manœuvre produit donc une certaine quantité d'action dynamique qu'il s'agit maintenant d'apprécier.

J'appelle ici, suivant l'acception commune, *action* ou *effet dynamique*, le produit d'un certain poids par la hauteur verticale qu'il parcourt, soit en montant, soit en descendant, avec une vîtesse uniforme ou uniformément accélérée pendant l'unité de temps.

Or cette action ou effet dynamique équivaut toujours, comme il est aisé de s'en convaincre, à la force vive d'une certaine masse qui serait animée d'une certaine vîtesse : ainsi,

en d'autres termes, nous avons à chercher la dépense de forces vives que nécessitent, au passage d'une écluse, la montée d'un bateau et la descente d'un autre.

L'équation générale qui exprime les relations entre la chute d'une écluse, sa dépense et le tirant d'eau des bateaux, est, comme nous l'avons vu,

$$y = x - (t_{\prime\prime} - t_{\prime}).$$

Nous allons en déduire la valeur des actions dynamiques employées à chaque double passage pour chacun des trois cas où la dépense d'eau y est positive, nulle ou négative.

1.° La quantité y étant positive, il est clair que le volume d'eau $x - (t_{\prime\prime} - t_{\prime})$ qu'elle représente, descend du bief supérieur dans le bief inférieur, c'est-à-dire, de la hauteur x: l'action dynamique de ce volume d'eau est donc

$$x\,[x - (t_{\prime\prime} - t_{\prime})].$$

De plus, le bateau $t_{\prime\prime}$ descend de la même hauteur; par conséquent, son action dynamique $= t_{\prime\prime}\,x$.

La somme de ces deux actions qui s'exercent de haut en bas, suivant la verticale, est donc :

$$x\,[x - (t_{\prime\prime} - t_{\prime})] + t_{\prime\prime}\,x.$$

La seule masse qui s'élève par la manœuvre de l'écluse, est celle du bateau $t_{\prime}$, qui passe du bief inférieur dans le bief supérieur; son action dynamique, de bas en haut, est par conséquent $t_{\prime}\,x$.

Mais ces effets dynamiques opposés, quoique successifs, s'opèrent en des temps égaux et précisément suivant les mêmes lois; car ils s'opèrent pendant que le sas se remplit et se vide, et ce remplissage et cette évacuation ont exactement la même durée, comme on le déduit immédiatement des formules qui expriment celle de l'écoulement des fluides dans des vases contigus, séparés par des diaphragmes verticaux; d'où il suit que la différence de ces effets dynamiques

est l'expression rigoureuse de la perte de forces vives qui a lieu pour leur production.

Cette perte est, par conséquent,

$$x\,[\,x-(t_{\prime\prime}-t_{\prime})\,]+t_{\prime\prime}\,x-t_{\prime}\,x=x\,x.$$

2.° Lorsque la dépense d'eau y est nulle, il est évident que l'action dynamique descendante se réduit à $t_{\prime\prime}\,x$, produit de la masse du bateau $t_{\prime\prime}$ par la chute de l'écluse.

L'action dynamique ascendante est, comme dans le cas précédent, représentée par $t_{\prime}\,x$.

Par conséquent, la différence de ces actions, ou la perte de forces vives, a pour expression

$$x\,(t_{\prime\prime}-t_{\prime})=x\,x,$$

puisque, y étant nulle, on a toujours $x=t_{\prime\prime}-t_{\prime}$.

3.° Enfin, lorsque la dépense y est négative, ou, ce qui est la même chose, lorsqu'un certain volume d'eau est refoulé du bief inférieur dans le bief supérieur, on a

$$-y=-x+(t_{\prime\prime}-t_{\prime}).$$

L'action dynamique descendante reste égale au produit du bateau $t_{\prime\prime}$ par la hauteur de la chute, et l'action dynamique ascendante devient égale au produit de cette même hauteur par la somme des masses de l'eau et du bateau qui remontent, ou bien

$$t_{\prime}\,x+x\,[\,-x+(t_{\prime\prime}-t_{\prime})\,].$$

La perte de forces vives est donc

$$t_{\prime\prime}\,x-t_{\prime}\,x-x\,[\,-x+(t_{\prime\prime}-t_{\prime})\,]=x\,x.$$

Donc, quels que soient la dépense d'une écluse, la hauteur de sa chute et le tirant d'eau des bateaux qui la traversent, la perte de forces vives, indispensable pour opérer le double passage de ces bateaux, est toujours proportionnelle au carré de la hauteur de la chute.

Donc, si l'on appelle h la pente totale d'un canal qui a ses deux extrémités fixes, et que l'on rachète cette pente par un certain nombre d'écluses dont les chutes soient respectivement $x_{,}$ $x_{,,}$ $x_{,,,}$.... &c., on aura

$$x_{,} + x_{,,} + x_{,,,} + \ldots\ldots x_{(n)} = h;$$

et pour la perte de forces vives sur toute la longueur du canal, la somme des carrés

$$x^2_{,} + x^2_{,,} + x^2_{,,,} + \ldots\ldots\ldots x^2_{(n)},$$

laquelle sera toujours d'autant moindre que le nombre n des écluses sera plus grand.

Le cas particulier où toutes les écluses auraient la même chute, donne

$$x_{,} = x_{,,} = x_{,,,} = \ldots\ x_{(n)} = \frac{h}{n}:$$

ainsi la perte de forces vives devient alors

$$\frac{n\,h^2}{n^2} = \frac{h^2}{n};$$

elle devient de même $\frac{h^2}{n'}$ pour un autre système de répartition de la même pente en un nombre n' d'écluses égales. Les pertes de forces vives sont donc entre elles, dans les deux hypothèses,

$$::\frac{1}{n}:\frac{1}{n'}::n':n,$$

c'est-à-dire qu'elles sont entre elles en raison inverse du nombre d'écluses qui servent à racheter la même pente.

Quant à la dépense d'eau positive qui a lieu pour le double passage dans les deux mêmes suppositions, on a, en la désignant par y et y',

$$y = \frac{h}{n} - (t_{,,} - t_{,})$$

$$y' = \frac{h}{n'} - (t_{,,} - t_{,}):$$

d'où l'on voit que cette dépense diminue encore d'autant plus que le nombre des écluses est plus considérable, ou leur chute plus petite.

Elle devient exactement proportionnelle à cette chute, lorsque les bateaux montans et descendans ont le même tirant d'eau, seule supposition qui ait été tacitement admise jusqu'à présent : car on a alors

$$y = \frac{h}{n},$$
$$y' = \frac{h}{n'}.$$

En ne considérant d'abord la distribution des écluses d'un canal de navigation que sous le rapport de la dépense d'eau à laquelle les biefs doivent subvenir, on voit combien il y a d'avantages à donner peu de chute aux écluses. Les principes sur lesquels cette conclusion est appuyée sont évidens; les calculs qui la justifient sont simples et faciles à vérifier : cependant elle paraît avoir échappé jusqu'à présent aux ingénieurs qui se sont occupés de projets ou de constructions de canaux.

C'est dans la marche naturelle de notre esprit et la lenteur avec laquelle certaines connaissances se propagent, qu'il faut chercher la cause de l'espèce d'abandon dans lequel ont été laissées les questions qui font l'objet de ce mémoire.

Les inventeurs des écluses à sas, et ceux qui en construisirent les premiers, séduits sans doute, comme ils devaient l'être, par l'espèce de phénomène que présente cet ingénieux appareil, lui attribuèrent d'autant plus de mérite que la difficulté qu'il servait à vaincre parut plus grande, c'est-à-dire que par cette manœuvre on pouvait faire monter les bateaux à une grande hauteur, en rachetant une plus grande différence de niveau entre deux biefs contigus.

Si, d'ailleurs, comme on l'assure, les premières écluses

furent construites, dans l'état de Venise, sur un canal dérivé de la Brenta, les constructeurs de ces ouvrages ne durent point être arrêtés par la crainte de dépenser une trop grande quantité d'eau, puisque leur canal était alimenté par une rivière. Il fallait, d'ailleurs, pour établir quelques calculs de dépense d'eau au passage de ces écluses, que les sciences physiques fussent parvenues à un degré d'avancement qu'elles n'avaient point atteint avant Galilée, et que le peu de notions que l'on avait alors de ces sciences, eussent été plus répandues qu'elles ne l'étaient parmi les mécaniciens de ce temps-là.

Il est plus facile d'imiter ce qui a été fait dans les constructions hydrauliques, que de chercher à les perfectionner, ou même à se rendre compte de certaines pratiques que l'usage semble avoir consacrées.

Tout le monde sait qu'une des plus grandes difficultés qu'on éprouva quand on entreprit l'exécution du canal de Languedoc, fut de rassembler au point de partage le volume d'eau nécessaire à l'entretien de la navigation qu'il s'agissait d'établir. Il était, par conséquent, de la plus haute importance d'économiser l'eau que l'on parvint à se procurer. Le moyen était facile : il se réduisait, en effet, à diminuer la chute des écluses. Cependant nous apprenons de M. Gauthey que l'on donna aux premières qui furent construites sur le canal du Midi, de si grandes hauteurs, qu'on fut obligé de les démolir pour en établir de plus basses, avant même que la navigation fût en activité, parce que la haute pression d'eau qu'elles avaient à soutenir, en exposait toutes les parties à trop de dégradations. Mais cette substitution d'écluses moins élevées à des écluses plus hautes ne s'opéra point, comme on voit, à dessein d'économiser l'eau; ce qui en aurait été le motif le plus puissant, si la question de cette dépense eût été soumise à une analyse rigoureuse : on ne se détermina à

ce changement que par des considérations d'une autre nature, et, peut-être, en abandonnant à regret un système de construction accrédité par le préjugé, et qui rendait en quelque sorte plus sensible l'espèce de merveilleux que présente la navigation ascendante sur les canaux de navigation.

Les ingénieurs les plus célèbres de France et d'Angleterre ont contribué, jusqu'à ces derniers temps, à maintenir les anciennes pratiques.

On lit, dans un mémoire de M. Perronet sur le canal de Bourgogne, que le plus ou moins de place qu'occupe un bateau dans le sas d'une écluse, ne change point le volume d'eau nécessaire à la navigation ascendante ou descendante, et qu'en conséquence il n'y a aucune raison de diminuer la chute des écluses, qui est, dit-il, le plus ordinairement de huit, dix et douze pieds.

Cette opinion, émise par un ingénieur d'une aussi haute réputation, n'a point eu de contradicteurs; et, s'il est permis d'en juger par les canaux qui ont été exécutés depuis, on a continué de l'admettre de confiance et sans discussion.

A la vérité, M. Gauthey, dans son mémoire déjà cité, remarque qu'il ne convient point de donner des chutes égales aux écluses d'un canal à point de partage; que les chutes les plus basses doivent être établies près de ce point, et qu'à mesure qu'on peut alimenter le canal dans ses parties inférieures par de nouvelles prises d'eau, il n'y a point d'inconvénient à augmenter les chutes des écluses. Mais M. Gauthey n'a pas distingué d'une manière formelle, ni dans quelles circonstances, ni avec quelles restrictions, il convenait de procéder ainsi; et, quoique son idée suppose la notion d'un certain rapport entre la chute des écluses et le volume d'eau consacré à leur service, il ne s'est point occupé d'assigner ce rapport.

Il se borne à observer que les plus grandes chutes d'écluse

que l'on établisse ordinairement, sont de $3^m,90$, et que les plus basses sont de $1^m,30$. D'après cela, dit-il, il paraît que la chute la plus convenable est de $2^m,60$, hauteur moyenne entre la plus petite et la plus grande que l'on soit dans l'usage d'adopter : voilà à quoi se réduit la seule règle qu'il ait déduite d'une pratique très-éclairée, et des nombreuses observations dont son important ouvrage est rempli.

Établissons maintenant les principes rigoureux d'après lesquels les chutes des écluses successives d'un canal doivent être distribuées.

Puisque la dépense d'eau d'un bief quelconque, pour un double passage de bateaux dans l'écluse qui termine ce bief, est toujours proportionnelle à la chute de cette écluse, lorsque, suivant l'hypothèse accoutumée, les bateaux qui la montent et qui la descendent ont le même tirant d'eau, il est évident que, dans cette hypothèse, la condition réciproque d'une distribution convenable d'écluses consiste à proportionner leur chute à la dépense d'eau que peut fournir, sans inconvénient, le bief contigu destiné à en faire le service.

Cela posé, admettons que l'écluse la plus élevée d'un canal ait été construite sur ce principe : il est clair que, si le canal, à partir de ce point jusqu'à son extrémité inférieure, n'éprouvait aucune perte d'eau par l'évaporation ou par les filtrations, toutes ses écluses devraient avoir les mêmes dimensions que la première; car l'eau dépensée par le premier bief passe toujours dans le second, qui la dépense à son tour au profit du troisième, et ainsi de suite jusqu'au bief le plus bas.

Dans le cas d'une dépense négative, le même volume d'eau remonterait successivement toutes les écluses depuis l'extrémité inférieure jusqu'au bief culminant du canal.

Ainsi, quel que fût le nombre des écluses, la descente

d'un bateau et la remonte d'un autre n'occasionneraient, une fois pour toutes, sur la longueur entière du canal, que la dépense positive ou négative qui aurait lieu pour un double passage de bateaux dans l'une quelconque de ses écluses.

Mais les choses ne sont point telles que nous venons de le supposer. Les biefs successifs d'un canal perdent nécessairement, par l'évaporation naturelle, une certaine quantité d'eau; ils sont, de plus, exposés, suivant la nature du sol, à des chances de filtration qui atténuent plus ou moins le volume d'eau qu'ils contiennent : celui qu'ils ont pu recevoir du bief supérieur par la première écluse, ne peut donc se retrouver disponible tout entier pour l'entretien de l'écluse suivante. Il faut alors de deux choses l'une, ou diminuer la chute de cette écluse pour la proportionner à la dépense dont le bief est capable, sans perdre de sa hauteur d'eau, ou bien faire le sacrifice d'une partie de cette hauteur.

Or la conservation, dans tous les biefs, d'une hauteur d'eau donnée, est indispensable pour le maintien de la navigation; c'est la condition essentielle de l'existence du canal. Il est donc nécessaire de rendre la chute de la seconde écluse moindre que la chute de la première.

Par les mêmes considérations, il faudra rendre la chute de la troisième moindre que la chute de la seconde, et ainsi de suite, en diminuant jusqu'à la dernière.

Donc, quand un canal ne peut être alimenté que par les eaux rassemblées dans son bief culminant, les chutes de ses écluses doivent décroître, à mesure que l'on s'éloigne de ce bief, et les décroissemens de chute doivent être, dans l'hypothèse d'un sol homogène, exactement proportionnels à la longueur des biefs qui précèdent chaque écluse. Quand, au contraire, de nouvelles prises d'eau peuvent réparer les pertes dues à l'évaporation et aux filtrations, ou même fournir un volume d'eau excédant à mesure que le canal descend

dans les plaines, il est évident qu'une première prise d'eau subsidiaire permettra de donner à l'écluse qui la suit immédiatement, une chute plus forte que celle de l'écluse qui la précède : mais, jusqu'à ce qu'une seconde prise d'eau subsidiaire vienne de nouveau alimenter le canal, on conçoit que la chute des écluses devra diminuer en descendant de la première prise d'eau à la seconde, de la seconde à la troisième, et ainsi de suite; d'où l'on voit qu'en ayant égard aux pertes occasionnées par les filtrations et l'évaporation, un canal navigable éclusé doit être considéré comme un système de plusieurs canaux partiels, séparés par des prises d'eau consécutives, et dans chacun desquels les chutes d'écluse doivent décroître de leur extrémité supérieure à leur extrémité inférieure.

Les écluses situées à l'origine de ces canaux partiels doivent avoir plus de chute à mesure que ces canaux se trouvent plus éloignés du point culminant, dans tous les cas où le volume des prises d'eau subsidiaires de chacun d'eux est plus grand que le volume d'eau perdu par les filtrations et l'évaporation : ces écluses d'origine doivent, au contraire, avoir moins de chute lorsque ces déperditions ne sont point compensées par les prises d'eau consécutives.

En général, si l'on suppose tous les biefs d'un canal de navigation remplis une première fois à la hauteur exigée par le tirant d'eau des bateaux le plus fortement chargés, il faudra, pour maintenir cette hauteur constante, quelle que soit l'activité de la navigation, que la chute d'une écluse quelconque soit proportionnelle à la somme des volumes d'eau fournis par le réservoir culminant et les prises d'eau collatérales en amont de cette écluse, après avoir retranché de cette somme celle des pertes dues à l'évaporation et aux filtrations dans la même étendue; et, comme ces volumes d'eau gagnés et perdus sur une longueur déterminée de ce canal

sont extrêmement variables suivant les localités, il s'ensuit que l'égalité de chute que l'on prescrit ordinairement d'établir entre toutes les écluses d'un même canal, se réduit à une simple règle de pratique qu'aucune théorie ne justifie, et qui ne peut trouver d'application motivée que dans un concours de circonstances très-rares.

On vient de voir suivant quelles lois doivent varier les chutes d'écluse sur un canal de navigation dans des circonstances données, et quand on fait abstraction, comme on l'a fait jusqu'ici, de la différence du tirant d'eau des bateaux: il sera facile, en ayant égard à cette différence, de déduire de nos formules la loi de variabilité de ces chutes dans des circonstances semblables. La simplicité de ces calculs nous dispense de nous y arrêter.

La dépense d'action dynamique ou de forces vives nécessaire à la manœuvre des écluses n'a, jusqu'à présent, fixé l'attention d'aucun ingénieur, quoiqu'elle soit bien autrement importante que la dépense d'eau. Je vais montrer maintenant comment la considération de cette dépense d'action dynamique doit conduire au perfectionnement de tout système de canaux navigables.

Je commence par rappeler ce principe incontestable, que les forces vives ou les actions dynamiques, quelle que soit leur source et de quelque manière qu'on en dispose, peuvent toujours représenter l'effet utile de quelque machine. L'économie de ces forces par des dispositions appropriées en laisse donc une plus grande quantité disponible pour être employée utilement. En réglant convenablement, par exemple, les chutes d'un canal de navigation, la quantité de force vive qu'on économise reste disponible pour le service d'usines le long du canal, ou pour tout autre usage utile.

Je rappelle, en second lieu, que la dépense de force vive nécessaire pour opérer, au passage d'une écluse, la montée

et la descente d'un bateau, est toujours proportionnelle au carré de la chute de cette écluse, quels que soients a dépense et le tirant d'eau des bateaux montans et descendans.

Mais nous avions conclu précédemment de l'équation qui exprime la relation de ces quantités, que, si l'on fait la chute de l'écluse égale à la différence des tirans d'eau des bateaux descendans et montans, la dépense d'eau du bief supérieur était nulle.

Dans ce cas particulier, la dépense de force vive nécessaire au passage des deux bateaux est donc, pour ainsi dire, entièrement acquittée par le bateau qui descend, de la même manière qu'elle le serait si ce bateau, en descendant sur un plan incliné, faisait monter en même temps l'autre bateau sur le même plan, au moyen d'une chaîne qui passerait sur une poulie de renvoi et qui les attacherait l'un à l'autre. De même, lorsque la chute de l'écluse est moindre que la différence des tirans d'eau, nous avons vu qu'une partie de l'eau du bief inférieur remontait dans le bief supérieur : ainsi la force vive dépensée dans ce cas par le bateau descendant n'est pas seulement employée à faire remonter l'autre bateau, mais encore à faire remonter à la même hauteur une certaine quantité d'eau, précisément comme si, ces deux bateaux étant toujours liés par une chaîne et mis en mouvement sur un plan incliné, on avait ajouté un certain volume d'eau au chargement du plus léger de ces bateaux.

Remarquons maintenant que la dépense de force vive faite par le bateau descendant pour élever dans le bief supérieur une masse quelconque, n'est pas enlevée à l'effet utile de l'écluse, considérée comme une machine ordinaire; car la descente d'un bateau, au moyen de cette écluse, est une portion de l'effet qu'on en attend. Les écluses à sas, mises au nombre des machines propres à transmettre le mouvement, présentent donc, à l'exclusion de tout autre appareil,

cet avantage singulier, que la dépense de force vive nécessaire à la production du mouvement est elle-même une portion de l'effet utile que l'appareil est destiné à produire.

Il faut, à la vérité, pour obtenir cet avantage, 1.° que le tirant d'eau des bateaux qui descendent les canaux soit plus grand que le tirant d'eau des bateaux qui les remontent; 2.° que la chute des écluses ne surpasse jamais la différence de ces tirans d'eau.

Il est évident qu'on sera toujours le maître de remplir cette dernière condition, toutes les fois que la première existera : or, quoiqu'en assignant la quantité d'eau nécessaire à l'entretien d'un canal on ait été, jusqu'à présent, dans l'usage de considérer la navigation comme également productive dans les deux sens opposés suivant lesquels on la dirige, il suffit de quelque attention pour se convaincre que cette hypothèse n'est point conforme à la réalité; que la navigation descendante l'emporte beaucoup, par le poids des matières qu'elle met en mouvement, sur la navigation ascendante; enfin, que cette prépondérance tend naturellement à se perpétuer dans un état de civilisation où les canaux deviennent nécessaires pour multiplier les communications entre les diverses contrées.

En effet, la population se fixe toujours là où peuvent aisément arriver les denrées de première nécessité qu'elle consomme, et les matières premières qu'elle emploie dans les différens genres d'industrie auxquels elle se livre. Les rivières navigables offrent pour le transport de ces objets, plus ou moins encombrans, des facilités naturelles qui ont attiré sur leurs bords un plus grand nombre d'habitans : ainsi les vallées se sont couvertes de villes, et presque toujours la capitale d'une contrée s'est élevée sur les rives du plus grand fleuve qui la traversait.

Quand le territoire des vallées où coulent les rivières

navigables ne produit pas les denrées nécessaires à l'approvisionnement des villes, il faut aller chercher ces denrées dans les plaines élevées, et quelquefois tirer des montagnes certaines productions du sol que l'industrie met en œuvre. C'est alors que les canaux artificiels deviennent indispensables pour transporter sur les lieux de leur consommation, sans trop en augmenter le prix, les grains, les boissons, les bois de chauffage et de charpente, les matériaux propres aux constructions; enfin les fontes de fer et les charbons de terre, ces deux élémens essentiels de toute industrie manufacturière. Mais ces premiers produits de l'agriculture ou de l'exploitation du sol, qui descendent dans les vallées, sont d'un poids incomparablement plus grand que les objets manufacturés contre lesquels on les échange. Ainsi les bateaux qui apportent à Londres les charbons de terre et les fontes des environs de Birmingham, descendent les canaux à pleine charge et les remontent à vide en retournant chercher de nouveaux chargemens; et, sans prendre hors de notre propre pays des exemples de ce mode de circulation, ne voyons-nous pas tous les jours les bateaux qui approvisionnent Paris, arriver sur les ports complétement chargés et remonter la Seine ou la Marne presque entièrement vides ? Un grand nombre de ces bateaux, et notamment ceux qui viennent du centre de la France par le canal de Briare, ne remontent même pas ce canal, et sont déchirés sur les bords de la rivière, où l'on approvisionne leurs débris sous le nom de *bois de bateau.*

Il serait superflu d'apporter de nouvelles preuves de ce qui vient d'être dit. On conçoit aisément que des bateaux qui arriveraient à Paris des points les plus élevés du département des Ardennes ou du département de la Côte-d'Or, n'y remonteraient pas avec des cargaisons aussi pesantes que celles qu'ils auraient apportées. On peut donc poser

en principe général, que, dans un système de navigation intérieure convenablement ordonné, le poids total des objets qui descendront sur les différens canaux de ce système, sera toujours beaucoup plus considérable que le poids total des objets qui les remonteront.

Ce principe admis, le volume d'eau nécessaire à l'entretien de la navigation sur les canaux subira de grandes réductions, et la difficulté de le rassembler aux sommités de ces canaux ne sera plus un obstacle qui empêche de les exécuter, puisque, d'après nos formules, on pourra toujours régler la chute de leurs écluses depuis le point culminant jusqu'au bief le plus bas, de manière à ne dépenser qu'une quantité d'eau déterminée, ou même à en faire remonter, au besoin, dans le réservoir le plus élevé, un certain volume qui serait puisé dans les biefs inférieurs.

Supposons, pour en donner un exemple simple, que le tirant d'eau des bateaux qui descendent un canal, soit de $1^m,20$, et le tirant d'eau des bateaux qui le remontent, de 30 centimètres seulement.

Supposons, de plus, que la dépense d'eau de ce canal ne puisse s'élever, en poids, qu'au quart du poids total des bateaux qui le descendent et qui le remontent. On trouve, par la substitution de ces quantités numériques dans notre équation générale, que la hauteur de chute des écluses doit être de $1^m,275$.

Si, au lieu de tirer ce volume d'eau du réservoir le plus élevé du canal, il fallait l'y faire refluer des biefs inférieurs, on trouverait que la hauteur de chute des écluses devrait être réduite à $0^m,675$.

Enfin, pour que la dépense d'eau fût nulle, cette hauteur de chute devrait être portée à $0^m,90$.

Je me suis proposé, dans ce Mémoire, d'indiquer les moyens de suppléer au manque d'eau qui pourrait, dans

quelques circonstances, être un obstacle à l'ouverture d'un canal utile; cependant d'autres avantages non moins précieux se lieront naturellement à celui d'établir, entre le tirant d'eau des bateaux et la chute des écluses, les rapports que nous avons assignés. En effet, en augmentant ce tirant d'eau et en diminuant cette chute, on obtiendra la possibilité de faire circuler un poids déterminé de denrées et de marchandises sur des canaux plus étroits : ainsi la superficie des terrains qu'ils occuperont sera moindre, et par conséquent l'acquisition de ces terrains moins dispendieuse; tandis que la perte d'eau inévitable, due à l'évaporation journalière, diminuera dans la même proportion.

La manœuvre des écluses deviendra beaucoup plus facile, et pourra être confiée aux soins des bateliers, comme cela se pratique sur les petits canaux d'Angleterre; ce qui permettra de supprimer les gages et les logemens des éclusiers.

L'entretien des écluses, dont les murs auront à soutenir une moindre hauteur de terre, et les portes, une moindre hauteur d'eau, sera bien moins considérable, et les réparations extraordinaires seront moins fréquentes. Ainsi la circulation par eau ne sera plus exposée aux interruptions de plusieurs mois, qu'elle éprouve, chaque année, par cette cause, sur tous les canaux de navigation.

Enfin des bateaux plus étroits et d'un plus grand tirant d'eau offriront moins de résistance au halage; et, comme ils pourront être pontés, on pourra en tenir le chargement plus en sûreté que sur des bateaux plats ordinaires.

Je développerai, dans un second Mémoire, les derniers avantages que je viens d'indiquer.

Je me bornerai à dire, en terminant celui-ci, que la découverte des écluses doit être considérée comme une découverte récente, dont on a jusqu'à présent apprécié le mérite, moins par les résultats généraux de son application aux

communications par eau, que par le résultat visible d'une difficulté vaincue. L'imagination ne peut saisir sans quelque réflexion les avantages d'un système d'écluses à petites chutes placées à la suite les unes des autres, à des intervalles plus ou moins longs; mais elle est toujours vivement frappée de la manœuvre d'une écluse dont la chute est considérable.

Lorsque dans le XIV.e siècle l'artillerie remplaça l'ancienne balistique, on commença par faire des canons qui lançaient des boulets du poids de cent à cent cinquante kilogrammes. Malgré leur effet prodigieux, le peu de service qu'on en retirait obligea bientôt d'y renoncer. Il ne reste de ces anciens canons que chez les Turcs et dans quelques arsenaux, où on les montre comme des monumens de l'art à son enfance. Les dimensions de toutes les pièces d'artillerie ont été successivement réduites; et cette arme ne s'est véritablement perfectionnée qu'à mesure qu'on l'a rendue plus mobile et plus légère, c'est-à-dire, en d'autres termes, qu'on l'a rendue propre à produire le plus grand effet avec la moindre dépense de forces vives.

Il est vrai que depuis l'invention de la poudre les occasions n'ont pas manqué de mettre l'artillerie en pratique, et cette pratique a dû en rendre les progrès bien plus rapides que n'ont été ceux de l'architecture hydraulique depuis l'invention des écluses : aussi, dans ce genre particulier de constructions, en sommes-nous encore aux grosses pièces.

MÉMOIRE

Sur les Inflammations des Intestins, ou les Entérites, qui surviennent dans les maladies du Foie;

PAR M. PORTAL.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 7 Août 1820.

DE tout temps on a cru que l'inflammation des intestins, ou l'*entérite*, était très-commune; cependant on n'en a jamais cité autant d'exemples qu'aujourd'hui. Je crois qu'ils ne seraient pas aussi nombreux, si, à l'imitation de nos illustres prédécesseurs, on distinguait mieux qu'on ne le fait généralement, *les entérites essentielles*, ou celles qui sont déterminées par des causes qui agissent immédiatement sur les intestins, de celles qui ne les affectent que *consécutivement* à la lésion d'autres organes : alors leur nombre paraîtrait moins considérable, et l'on établirait entre elles une distinction réelle et utile , puisqu'il n'est pas douteux qu'ainsi prises en considération, on ne les traitât beaucoup mieux qu'on ne le fait souvent. J'espère qu'on en trouvera la preuve dans ce Mémoire.

Parmi les entérites secondaires, ou consécutives à la lésion d'autres organes, on doit sur-tout comprendre celles qui proviennent des maladies du foie et de la bile, comme les anciens l'ont fait, et comme nous l'avons fait nous-mêmes, au grand avantage, je crois, des malades que nous avons traités.

C'est de ce genre d'entérites que je veux parler, ne pouvant être confondues avec celles des intestins qui sont immédiatement produites par des alimens liquides ou solides trop abondans ou trop stimulans, par des poisons, par des purgatifs trop violens, et par la déglutition de divers corps étrangers qui sont parvenus dans le canal intestinal, par des matières fécales concrétées, par des vers, par des vices fébriles ou d'autre nature, ou enfin par diverses causes.

Toutes ces inflammations sont immédiatement excitées dans les intestins, ainsi que nous venons de le dire; au lieu que celles dont il va être question, ne surviennent que secondairement aux lésions d'autres organes, particulièrement du foie et de la bile.

On tombe dans de funestes erreurs, si l'on se trompe à cet égard : elles sont aussi graves que celles que l'on commet lorsqu'on attribue à l'estomac des maladies qui résident dans le foie; erreur que mon illustre maître Ferrein a bien fait connaître dans son Mémoire, lu à l'Académie royale des sciences, année 1766, sur l'inflammation des viscères du bas-ventre.

J'ai moi-même prouvé la vérité de cette doctrine par d'autres faits recueillis dans un Mémoire que j'ai lu à la même Académie en 1772 (1).

J'ose dire que les savans médecins qui ont écrit depuis, ont confirmé la doctrine de Ferrein par le résultat de leurs propres observations. Cependant, bien loin d'avoir été généralement adoptée, comme elle paraissait devoir l'être, elle ne l'a pas été de plusieurs médecins, ses compatriotes et ses successeurs, puisque quelques-uns d'eux continuent d'attribuer à l'estomac des maladies dont le siége primitif réside évidem-

(1) Sur quelques maladies du foie, qu'on attribue à d'autres organes, et sur des maladies dont on fixe ordinairement le siége dans le foie, quoiqu'il n'y soit pas.

ment dans le foie, telles que des gastralgies, ou cardialgies, comme on les appelle improprement aujourd'hui. De plus, on a, depuis Ferrein, spécialement fixé dans l'estomac le siége des fièvres qu'on a appelées gastriques, quoiqu'il soit le plus souvent dans le foie, d'après l'opinion commune des plus grands médecins véritablement praticiens, fondée sur les résultats de leur clinique et sur les autopsies anatomiques.

Parmi ces fièvres prétendues gastriques, on doit comprendre les bilieuses, qui n'affectent l'estomac que secondairement; car la douleur que les malades y ressentent, provient de la lésion du foie : cet organe étant moins sensible de sa nature que l'estomac, les malades n'y éprouvent souvent aucune douleur, lors même qu'ils se plaignent d'en ressentir une très-vive dans l'estomac; et, comme souvent ils vomissent, ou font de violens efforts pour vomir, on a cru devoir leur prescrire des émétiques ou d'autres remèdes actifs qui n'ont fait qu'augmenter l'intensité du mal, à leur grand détriment (1).

Dans ces cas, comme dans beaucoup d'autres que nous pourrions comparer à celui-ci, on peut bien dire que le siége de la maladie n'est pas là où la douleur réside ; ce qui prouve qu'il ne faut pas toujours compter sur cet adage médical : *Ubi dolor, ibi morbi sedes.* Cependant à combien de funestes erreurs n'a-t-il pas donné lieu !

Mais, si les maladies du foie sont, par cette raison et d'autres encore, quelquefois méconnues et attribuées à l'estomac, comme nous venons de le dire, on les attribue aussi bien souvent aujourd'hui aux intestins, quoiqu'elles existent primitivement dans le foie ; erreurs d'autant plus funestes, qu'elles conduisent les médecins qui les commettent, à pres-

(1) On trouvera encore dans mes *Observations sur la nature et le traitement des maladies du foie*, ainsi que dans mon *Anatomie médicale*, des observations et des remarques sur ce point de doctrine bien important.

crire des remèdes qu'ils ne conseilleraient certainement pas, si la véritable source de ces maux leur était connue.

Pour se faire une idée de l'influence du foie sur les intestins, il faut remarquer, 1.° qu'il y a une communication réciproque et intime des nerfs et des vaisseaux de ces viscères (1), de telle manière que l'un d'eux peut, s'il est primitivement affecté, agir sur l'autre ; d'où il résulte qu'une maladie peu intense dans celui qui est naturellement peu sensible, peut causer une douleur plus ou moins vive dans celui qui est doué d'une plus grande sensibilité. C'est ce qui fait que le médecin qui ne prend pas cet objet en considération, se trompe sur la nature et le siége même de la maladie : or c'est ce qui est souvent arrivé et arrive fréquemment encore à l'égard du foie, de l'estomac et des intestins, le premier organe ayant beaucoup moins de sensibilité que les deux autres.

2.° Indépendamment des communications que le foie a avec les intestins par les nerfs et les vaisseaux, il en a encore d'autres avec les intestins. Il est particulièrement uni au colon par des replis du péritoine, à la faveur desquels les nerfs et les vaisseaux se propagent ; et, de plus, la vésicule du fiel est en contact avec cet intestin si intimement, qu'une partie de la bile contenue dans sa cavité transsude souvent à travers ses parois et s'épanche sur la lame extérieure du colon, tellement qu'elle en est non-seulement teinte en une couleur jaune plus ou moins foncée, mais encore qu'elle est absorbée en plus ou moins grande quantité ; de manière que

(1) Les nerfs du foie, de l'estomac et des intestins, provenant presque tous du plexus soléaire ; les artères de ces organes ayant entre elles les communications les plus multipliées, ainsi que leurs veines, qui sont fournies ou qui aboutissent au tronc de la veine porte ; les vaisseaux lymphatiques concourant encore à toutes ces communications, il en résulte une telle correspondance entre ces organes, qu'il faut toujours la prendre en considération, en physiologie comme en pathologie, pour éviter de grandes erreurs.

souvent la paroi interne du colon même en est immédiatement imbue dans une plus ou moins grande étendue.

Quelquefois cet intestin est en même temps atteint de la plus vive inflammation, ainsi que la vésicule du fiel et le foie lui-même, dans une étendue considérable, sur-tout après diverses fièvres malignes; c'est ce qui a été bien prouvé par le résultat des observations pathologiques et anatomiques rapportées par divers auteurs, Kruischank (1) particulièrement, et par nous aussi dans l'*Anatomie médicale* (tome V, page 224) et ailleurs.

Je ne connais aucune observation d'après laquelle on puisse assurer positivement que cette bile, plus ou moins épanchée et altérée, affecte les intestins de manière à y produire de la douleur. Cependant cela est d'autant plus probable, qu'on sait, comme nous le dirons plus bas, que la bile peut acquérir une telle acrimonie, qu'elle irrite et enflamme les parties des personnes qui la touchent; et que l'on sait encore que les intestins, les grêles sur-tout, sont, après le cœur, les parties du corps les plus sensibles et les plus irritables.

Nous dirons que nous croyons, d'après nos propres observations, qu'il est plus fréquent de reconnaître l'infiltration biliaire à travers les parois de la vésicule du fiel sur les parties voisines, dans les cadavres des personnes mortes de fièvres typhoïdes et qui ont éprouvé de vraies entérites, qu'il ne l'est, généralement, de la trouver ainsi infiltrée dans les cadavres des personnes mortes d'autres maladies.

3.° La communication du foie avec le duodénum par le canal cholédoque, qui passe obliquement à travers ses tuniques, dans lesquelles se répandent des nerfs et des vais-

---

(1) Cet anatomiste célèbre était plus disposé à croire que cette transsudation se faisait plutôt après la mort que pendant la vie Je pense aussi que cela arrive souvent, mais que cette transsudation a lieu pendant le cours de plusieurs maladies du foie et du colon.

seaux sanguins et lymphatiques communs au même canal et au duodénum, doit encore être prise en considération, lorsqu'on veut se rendre compte des divers faits relatifs à la correspondance du foie avec le canal alimentaire.

Combien de fois n'est-il pas arrivé que des malades se sont plaints de vives douleurs dans la région ombilicale, dont on n'aurait pas cru que la cause existât dans le foie, quoiqu'elle y résidât réellement, d'autant plus que souvent il n'y avait chez eux ni jaunisse, ni sensation douloureuse dans la région de cet organe !

On a quelquefois dit que ces malades étaient atteints d'une affection rhumatismale, de vers, d'une inflammation latente des intestins, ou d'autres maux que les médecins croyaient exister en eux; et cependant l'issue de la maladie, ou l'ouverture du corps, a souvent prouvé qu'on l'avait attribuée à des causes illusoires, et que son siége, au lieu d'exister dans les intestins, résidait dans le foie, ou, du moins, que si les intestins étaient aussi affectés, ils ne l'avaient été que secondairement au foie et à l'altération de la bile.

Je pourrais rapporter un très-grand nombre de faits qui viendraient à l'appui de ce que j'avance. Je me bornerai, pour plus grande briéveté, aux suivans.

Observation I. M. Dutillet, âgé d'environ soixante-six à sept ans, se plaignit, pendant long-temps, d'une douleur avec tension et une extrême chaleur dans la région ombilicale, de dégoût pour les alimens, et de beaucoup de difficulté dans ses digestions. Il maigrissait considérablement, son pouls était fréquent et serré, les douleurs abdominales étaient plus intenses dans la soirée et dans la nuit que dans le reste du temps : on lui prescrivit divers remèdes sans succès, tels que des boissons relâchantes et adoucissantes, des bains, des sangsues au fondement, &c. La maladie ne céda pas aux remèdes. On accusa alors une affection rhumatismale

portant sur les intestins. Le malade, en effet, avait éprouvé auparavant, en divers temps humides, de la douleur aux extrémités inférieures, qu'il ne ressentait cependant plus depuis long-temps. Des bains chauds, des diaphorétiques, des sinapismes aux pieds, furent inutilement prescrits : la maladie parut devenir plus intense, les douleurs intestinales se faisant ressentir plus vivement, en même temps que le teint prenait une couleur jaune.

Je fus appelé en consultation avec deux médecins qui traitaient ce malade. La jaunisse commençant, et les urines qui étaient rouges, me firent d'abord croire qu'il y avait des engorgemens dans le foie. Ayant cherché à les reconnaître par le toucher du bas-ventre, je me convainquis, en effet, que cet organe était plus saillant au-dessous des fausses côtes et dans la région épigastrique, qu'il ne l'est naturellement; je reconnus aussi de la tension et du gonflement dans la région ombilicale. Le pouls était plein; ce qui me détermina à conseiller une saignée du bras, des bains et des boissons relâchantes, remèdes qui diminuèrent les douleurs intestinales. Je prescrivis ensuite les plus doux savonneux; les eaux de Vichy, d'abord coupées avec de l'eau de chiendent et ensuite pures, à la dose de deux à trois verres tous les matins, avec addition, après quelques semaines, d'un demi-gros à un gros seulement de terre foliée de tartre.

Le malade retira de ce traitement des effets plus heureux qu'il n'en eût obtenu de tout autre. Il se rétablit, et vécut encore plusieurs années sans éprouver aucune douleur dans la région des intestins, ni aucun symptôme de la maladie du foie.

Observation II. Une marchande de la rue Saint-Denis éprouvait fréquemment et depuis long-temps, dans la région ombilicale, des douleurs qui devinrent si vives, qu'on craignit qu'elles n'annonçassent une inflammation des intestins.

Cette malade était âgée d'environ trente ans, d'une forte constitution, et cependant mal réglée. Je lui fis mettre des sangsues au fondement, à l'issue d'une époque des règles qui avait à peine été prononcée : elle prit quelques bains tièdes, fit usage de pilules savonneuses avec de légers amers, et de quelques infusions de feuilles d'oranger et de camomille. Elle se rétablit.

Cependant, quelques mois après, de nouvelles douleurs s'étant fait ressentir, on lui conseilla, sans la faire saigner au préalable, des pilules aloétiques et des boissons très-échauffantes. Les règles furent supprimées. Tous les signes de l'entérite eurent lieu. Appelé alors à son secours, je la fis saigner du pied ; j'ordonnai des boissons relâchantes et des bains tièdes, ensuite les eaux de Vichy. Les règles se rétablirent, le ventre se relâcha. La malade rendit par les selles des matières bilieuses et fut guérie.

Je ne doute pas que, si l'usage des toniques eût été continué, la malade n'eût fini par mourir de l'entérite. C'est ce que je crois non-seulement d'après les faits que je viens de rapporter, mais encore d'après beaucoup d'autres que j'ai consignés dans mon *Anatomie médicale*, ainsi que dans mon ouvrage sur les maladies du foie. On peut le consulter, et l'on verra que j'ai tiré de l'abus des toniques en pareil cas la même conséquence que je tire aujourd'hui. Je dois ajouter qu'en même temps que je recueillais ces observations à Paris, M. Saunders, célèbre médecin anglais (mort depuis peu), se récriait, à Londres, contre les médecins de cette ville, sur ce qu'ils prescrivaient des remèdes trop actifs dans quelques maladies du foie avec menace d'inflammation dans les intestins : ils finissaient, dit-il, par la réaliser. M. Saunders m'a fait part de cette remarque historique dans une honorable lettre qu'il m'écrivit après avoir lu mon ouvrage sur les maladies du foie, dans lequel j'avais établi le même trai-

tement que le sien, d'après divers faits que j'avais recueillis dans ma clinique.

Ce que je dis sur l'abus des stimulans contre les douleurs du bas-ventre avec irritation du canal intestinal, qui peut être facilement suivie de leur inflammation, comme les résultats des observations l'ont prouvé, est également applicable à un très-grand nombre d'entérites qui surviennent à ceux qui sont atteints de la fièvre bilieuse avec des douleurs dans les intestins, ainsi qu'à ceux qui ont de vraies coliques hépatiques, maladies que nous avons toujours eu le soin de bien distinguer de celles qui ont leur siége immédiat dans les intestins.

Cette remarque est également applicable à ceux qui éprouvent l'*iléon*, ou, comme on le dit plus souvent, la *passion iliaque*, ainsi qu'à ceux qui sont atteints du *cholera-morbus*. Elle est aussi applicable à ceux qui ont des entérites dans diverses fièvres malignes, *typhoïdes* particulièrement; à ceux qui ont des diarrhées, des dyssenteries, des dévoiemens; aux malheureux phthisiques, ainsi qu'aux malades qui sont atteints d'un anévrisme du cœur, &c.

Je vais rapporter quelques autres faits qui tendront, j'espère, à bien prouver que les entérites, dans toutes ces maladies, ne sont que secondaires au mauvais état du foie et de la bile. J'ai cru que cette distinction était très-utile à établir, d'abord pour pouvoir prescrire les remèdes indiqués, et ensuite pour ne pas administrer ceux qui sont contraires à l'état du malade.

1.° Les entérites sont fréquentes dans les fièvres bilieuses, qui sont si communes pendant les chaleurs de l'été : elles sont caractérisées par le teint jaunâtre de la peau; par la chaleur, la douleur violente et la tension de l'abdomen, surtout dans la région de l'ombilic; par des nausées, des vomituritions et des vomissemens même bilieux, la langue rouge,

les urines rouges et foncées, avec dureté et fréquence du pouls, qui est plus ou moins serré et avec quelques inégalités et des intermittences.

Ces symptômes annoncent l'entérite la plus vive et la gangrène des intestins lorsque le pouls devient mou, que les douleurs cessent. Il s'établit souvent alors un dévoiement de matières liquides d'un jaune plus ou moins noirâtre.

Tels sont les symptômes principaux de l'entérite dans les fièvres bilieuses.

On s'est convaincu, par l'ouverture des corps, que les intestins grêles étaient d'un rouge violet, souvent gangrenés, percés en divers endroits de leur étendue; que quelquefois aussi les gros intestins étaient en un pareil état, et les uns et les autres contenant des matières muqueuses, albumineuses, provenant de la membrane interne, mêlées avec une plus ou moins grande quantité d'une humeur jaunâtre ou noirâtre bilieuse. L'estomac, dans de pareils sujets, était aussi souvent enflammé et contenait de pareilles humeurs.

On a remarqué, en même temps, que le foie était plus ou moins affecté, et que la vésicule du fiel était pleine d'une bile noirâtre de la même nature que celle qui était contenue dans l'estomac et les intestins; de sorte qu'il ne pouvait y avoir aucun doute qu'elle n'y eût découlé par le canal cholédoque, et qu'elle n'eût été la cause matérielle de l'entérite, ou du moins qu'elle n'y eût beaucoup concouru, étant d'une extrême âcreté, telle, que, pendant le cours de la maladie, ceux qui en étaient morts avaient rendu une pareille humeur par les selles, et quelquefois par le vomissement; qu'ils s'étaient plaints d'éprouver de fortes cuissons au fondement, et qu'ils y avaient eu des excoriations remarquables : tout prouvait que la bile avait corrodé les parties qu'elle avait touchées.

Les anatomistes qui avaient plongé leurs doigts dans cette

humeur en faisant l'ouverture des corps, y éprouvaient un sentiment de chaleur qui durait long-temps; quelquefois leurs doigts étaient atteints d'érosion : c'est ce que Morgagni a observé. Ce grand anatomiste nous a dit, de plus, que des pigeons avaient été empoisonnés par une pareille bile.

Que l'on juge donc si, pour traiter efficacement l'espèce d'entérite qui provient principalement de l'altération de la bile, il suffit de ne considérer que l'inflammation locale des intestins; s'il ne faut pas, de plus, avoir la plus grande attention à l'état du foie, à la quantité et à la qualité de la bile, puisque souvent il suffit de prescrire aux malades des boissons rafraîchissantes et relâchantes, des bains tièdes, de doux laxatifs avec ou sans saignée, pour procurer quelques évacuations bilieuses, et faire ainsi heureusement finir cette espèce d'entérite : on peut quelquefois alors la prévenir par quelque doux vomitif, sans, au préalable, avoir eu besoin de la saignée; au lieu que, lorsque la vraie entérite a lieu, les saignées sont toujours nécessaires et les vomitifs toujours nuisibles, de quelque nature que soit cette maladie.

2.° Il survient souvent, dans des diarrhées et des dyssenteries réunies à des fièvres putrides [adynamiques] ou malignes [ataxiques], une vraie inflammation de l'estomac et des intestins, ou une gastrite et une entérite qu'on ne peut raisonnablement attribuer qu'à la très-mauvaise disposition du foie ou de la bile, puisqu'il est constant que les symptômes de cette inflammation perdent souvent de leur intensité, lorsque le cours de la bile par les selles est convenablement établi, ou qu'ils deviennent, au contraire, plus intenses, si cet heureux effet n'a pas lieu, jusqu'à la mort même. causée par la gangrène de l'estomac et des intestins.

C'est ce qui a fait dire à de grands médecins que les diarrhées et dyssenteries sèches étaient le plus souvent mortelles, comme elles le sont en effet.

L'expérience a prouvé que ces inflammations ne pouvaient être traitées comme celles qui sont essentiellement inflammatoires; d'abord, parce que rarement cette inflammation est aussi forte que l'autre, et que, si elle a une certaine intensité, la saignée est nécessaire, ce qui arrive souvent : mais alors il ne faut pas y recourir avec autant de fréquence que dans l'entérite qui n'est pas symptomatique.

On ne peut ensuite, lorsque cette entérite est dissipée, se dispenser de prendre sa véritable cause en considération, souvent pour pouvoir prescrire le quinquina à haute dose, seul ou réuni à d'autres antiseptiques qui peuvent être indiqués : on peut conseiller utilement les boissons acidulées et quelquefois les vésicatoires en diverses parties du corps; genre de traitement bien différent de celui qu'il faut prescrire dans la vraie entérite.

Qu'on lise, à ce sujet, les grands ouvrages de Pringle (1), d'Huxham, de Torti, et d'autres savans et bons médecins, et l'on se convaincra que les inflammations des intestins, symptomatiques des fièvres malignes, dans lesquelles le foie et la bile sont plus ou moins altérés, ne peuvent être considérées, ni pour le pronostic, ni pour le traitement, comme celles qui ne le sont pas, ou qui sont *essentielles*, comme disent les médecins.

Combien de fois n'avons-nous pas vu nos anciens grands médecins, Vernage, Bouvart, Borie, Maloet, &c., ordonner, non-seulement au commencement des fièvres alors généralement appelées *putrides* et *malignes*, mais même dans le cours plus ou moins avancé de ces funestes maladies, et cela surtout lorsque les douleurs des intestins étaient violentes, avec tension et gonflement du bas-ventre et forte menace d'inflammation, ordonner, dis-je, la saignée du bras! elle dis-

(1) *Observations on the diseases of the army*, Lond. 1752, *in-8.°*

sipait ces symptômes, et procurait le rétablissement des évacuations bilieuses, dont la suppression eût bientôt, sans cet efficace secours, produit une entérite mortelle.

Ces médecins continuaient ensuite le traitement de ces fièvres avec de grands succès. Je leur ai rendu cet hommage dans l'exposé que j'ai fait de plusieurs de leurs observations auxquelles j'ai eu quelque part, dans mon ouvrage sur les maladies du foie.

Mais qu'on ne croie nullement que ce soit pour célébrer mes maîtres et m'associer à eux, que je cite leurs succès : si je n'en eusse été convaincu, j'aurais été le premier à renoncer à leur doctrine pour adopter celle qu'on a voulu y substituer.

3.° Quant à l'entérite qui se réunit ou succède à la colique hépatique et aux autres maladies bilieuses dont nous venons de parler, on peut également la considérer comme provenant de l'irritation des intestins par la bile.

Personne ne doute qu'elle ne soit alors plus ou moins retenue, concrétée même dans le foie ou hors de cet organe, dans ses canaux excrétoires ou dans la vésicule du fiel même, ce qui est très-commun; et cependant, comme les malades qui sont affectés de cette colique n'éprouvent souvent des douleurs que dans les régions épigastrique et ombilicale, sans en ressentir aucune dans celle du foie, ils se trompent sur le siége primitif de leur maladie, et le croient exister dans l'estomac ou dans les intestins, sur-tout lorsque ces malades éprouvent des vomissemens ou des diarrhées. Souvent les médecins qui traitent de pareils malades, partagent cette erreur; c'est ce que j'ai vu arriver dans des consultations avec d'habiles praticiens.

L'existence de ces douleurs, qui augmentaient dans un malade au plus léger contact de ces régions, fit que nous ne crûmes pas que le foie était altéré, nous rappelant que Fernel

et de très-grands médecins avaient avancé que dans les vraies coliques hépatiques, s'il y avait des douleurs dans le bas-ventre, non-seulement elles n'augmentaient pas par la compression, mais même qu'alors les malades y éprouvaient un adoucissement (1).

Cependant, la jaunisse étant survenue, et les malades ayant éprouvé des évacuations bilieuses, avec de vrais calculs de bile, évacuations qui avaient été suivies du relâchement et même de la cessation des douleurs, il n'y eut plus de doute que le foie ne fût le siége principal de la maladie, et que les douleurs, le gonflement et la tension des régions épigastrique et ombilicale n'en eussent été que les effets. On doit croire que, si ces évacuations n'eussent pas eu lieu, l'inflammation des intestins serait survenue; ce qui justifierait l'opinion d'Astruc et de Maloet, médecins de la Charité, qui voulaient que les malades atteints de la colique hépatique, au lieu d'être toujours soumis à l'usage des drastiques ou au mochlique, fussent, lorsqu'il y avait des signes d'inflammation, traités par les antiphlogistiques et par la saignée même. Nous avons nous-mêmes retiré d'heureux effets de cette pratique.

Voici d'autres faits qui prouveront, je crois, qu'on peut facilement se tromper sur la vraie cause et le siége primitif de l'entérite.

Observation III. Un homme d'une forte constitution, d'un tempérament sanguin et bilieux, âgé d'environ quarante ans, vint un jour me consulter pour des douleurs violentes dans le bas-ventre, principalement dans la région ombilicale. Il me dit que ces douleurs avaient succédé à des nausées et à des vomissemens de matière jaune et très-amère qu'il avait éprouvés la veille, après un dîner très-copieux, et que plusieurs fois cela lui

(1) *Tantum in accessione inventum est solatium, tres quatuorve robustos homines ventri superpositos sustinere. Compresso siquidem ventre, paulò mitior cruciatus erat.* Fernel, *De luis venereæ curat.* cap. VII, p. 589.

était ainsi arrivé; mais que cependant d'autres fois, sans avoir beaucoup mangé, ces accidens lui était survenus. Il ajouta qu'il croyait devoir les attribuer à un empoisonnement tenté par une personne qui en voulait à son existence. Je crus devoir palper le bas-ventre : la région ombilicale était tuméfiée, et douloureuse au plus léger contact; le foie me parut proéminent au-dessous des fausses côtes, et un peu douloureux dans la région épigastrique. Ce malade avait les yeux un peu jaunes, et sa peau n'était pas exempte d'une teinte de la même couleur. Je lui demandai s'il n'avait pas été plus jaune; il me dit qu'il l'avait été plusieurs fois beaucoup plus : interrogé s'il n'avait pas eu les urines rouges, il me répondit qu'il en avait rendu quelquefois de si rouges, qu'il avait cru pisser du sang; enfin, s'il avait eu des évacuations bilieuses alvines plus jaunes, sa réponse fut affirmative.

Instruit de tous ces détails, j'assurai le malade qu'il avait une maladie du foie, d'où provenaient ses douleurs, qui étaient quelquefois des coliques hépatiques, et que je ne croyais pas qu'elles pussent être attribuées à aucun poison. Mais toutes mes raisons contre l'empoisonnement ne purent le convaincre. Je lui conseillai l'application des sangsues au fondement, des pilules savonneuses avec les extraits amers, des bains, les eaux de Vichy. Ce malade parut sortir de chez moi peu content de ma consultation : aussi ne fit-il, comme je l'ai su dans la suite, aucun usage de mes avis. Je le perdis de vue pendant plusieurs mois, après lesquels je le vis reparaître accompagné de sa femme. J'appris qu'il avait encore eu plusieurs coliques avec des vomissemens, et qu'il avait fait divers remèdes dirigés dans le sens d'une inflammation imminente des intestins, qu'il attribuait toujours à un empoisonnement. Je ne m'occupai plus à lui faire connaître son erreur sur la cause de la maladie, n'ayant pu y réussir à sa première visite. Je lui prescrivis la saignée

par les sangsues au fondement, et non sur la région ombilicale.

Je conseillai l'usage progressif des pilules savonneuses avec les extraits amers un peu aloétiques, des bains, et ensuite les eaux de Vichy.

Ce traitement, surveillé par la femme du malade, fut exactement suivi, et avec un tel succès, qu'environ trois ou quatre mois après elle me ramena son mari dans un bien meilleur état physique et moral. Je continuai de le traiter encore quelques mois de la même manière, et il guérit radicalement.

On ne peut douter que les douleurs des intestins n'eussent augmenté chez ce malade, et qu'enfin l'entérite ne fût survenue, s'il n'avait suivi le traitement que je lui avais conseillé; et encore plus vîte, si un traitement excitant lui avait été prescrit. L'observation que je vais rapporter le prouvera de la manière la plus convaincante.

Observation IV. M. d'Ormesson, l'avant-dernier premier président du parlement de Paris, était depuis long-temps sujet à des douleurs que M. Cosnier, son médecin, avait bien connues sous le nom de *coliques hépatiques.* Il en avait diminué les douleurs et la fréquence par l'usage de doux savonneux réunis à de légers amers sous diverses formes, par des bains, et par des sangsues au fondement, le malade ayant été sujet à des hémorroïdes. Cependant, nonobstant ce traitement, les coliques avaient eu quelques récidives.

Je fus appelé en consultation. La saignée par les sangsues fut conseillée, ainsi que des boissons rafraîchissantes et relâchantes, avec quelques anodins. Les douleurs se calmèrent un peu, mais se prolongèrent.

Au lieu d'insister sur ce traitement, on conseilla au malade de recourir au remède de Durande, médecin de Dijon, qui consiste en un mélange d'huile de térébenthine et d'éther

sulfurique par parties égales (1), dont on multiplia les doses sans aucune retenue : les douleurs, au lieu de se calmer, devinrent plus fortes et continues; des vomissemens survinrent, et le malade se plaignit d'une vive douleur dans l'estomac et dans les intestins; le pouls fut plus dur, plus serré, plus fréquent. Les adoucissans, relâchans et anodins furent prescrits, mais inutilement. Les douleurs ne se calmèrent point, et le pouls ne se relâcha que pour faire place aux signes précurseurs de la mort, survenue bientôt après.

On reconnut, à l'ouverture du corps de ce respectable magistrat, qui fut faite en ma présence par Desault, premier chirurgien de l'Hôtel-Dieu, que le foie était d'un très-gros volume, et qu'il contenait plusieurs squirrosités avec des marques de suppuration. Il y avait dans la vésicule du *fiel* une bile noire poisseuse, avec de petits calculs biliaires nombreux; la partie du foie contiguë à la vésicule du fiel était atteinte de putréfaction, et les vaisseaux de l'estomac et des intestins comme injectés d'un sang noirâtre.

On voit, par cette observation, que les douleurs de l'estomac et du canal intestinal n'avaient été que sympathiques, et qu'il fallait en chercher la cause dans le foie, dont on avait prévenu ou du moins retardé l'altération délétère par les sangsues et les remèdes adoucissans et anodins, qu'on avait voulu malheureusement remplacer par un remède trop actif, qui avait produit l'inflammation du foie et de l'estomac.

Observation V. M. le comte de Puységur, d'une constitution délicate, maigre, très-irritable et très-sensible, était parvenu jusqu'à un âge assez avancé, sans éprouver d'autres maladies que de légères affections spasmodiques, qui l'avaient souvent

(1) On en donne ordinairement deux ou trois fois le jour, tout au plus, quinze à dix-huit gouttes dans une cuiller à bouche.

forcé d'éviter des exercices et des travaux auxquels se livrent la plupart des hommes. Il faisait un usage presque continuel de quelques boissons relâchantes et adoucissantes, ainsi que de bains tièdes, de lavemens émolliens, pour diminuer sa constipation habituelle et les insomnies auxquelles il était très-sujet. Cependant la révolution le força de faire de longs voyages, et il y résista.

De retour dans sa patrie, j'allai le voir, l'ayant soigné autrefois et ayant pour lui beaucoup d'attachement. Il avait alors environ soixante ans. Je le trouvai d'une maigreur extrême, plus grande encore qu'elle n'avait été dans sa jeunesse. Son teint était jaune. Il se plaignait d'éprouver de fréquens borborigmes, et d'une douleur presque constante dans la région épigastrique. Je reconnus, par le toucher du bas-ventre, qu'il y avait un engorgement dans le foie : cet organe faisait une saillie notable au-dessous des fausses côtes et dans la région épigastrique, où il y avait de la sensibilité. Le malade m'assura avoir de fréquentes hémorroïdes, dont il avait éprouvé de vives douleurs en divers temps, au point quelquefois qu'elles étaient accompagnées de spasmes violens, sur-tout des muscles des extrémités inférieures. Il ne pouvait manger que les alimens de la plus facile digestion et en très-petite quantité; ce qui faisait qu'il mangeait souvent dans la journée et très-peu chaque fois, en diminuant progressivement ses alimens et devenant de plus en plus difficile sur la nature de ceux dont il devait user, au point qu'il ne mangeait plus assez, ce qui le faisait maigrir de jour en jour.

Un traitement humectant, adoucissant, un peu anodin, était régulièrement suivi. Le malade prenait des bains tièdes fréquemment. Toutefois il maigrissait encore de plus en plus, lorsqu'il lui survint, vers la fin de l'hiver, une affection catarrale avec une fièvre continue, augmentant tous les soirs, et

finissant dans la matinée par une toux avec quelques expectorations muqueuses, quelquefois sanguinolentes. Les expectorations muqueuses devinrent très-considérables, et la respiration parut être moins libre.

Un tel état me fit craindre beaucoup que le malade ne finît par mourir d'une phthisie pulmonaire, d'autant plus qu'*il* avait eu, dans les deux années précédentes, des catarres qui, quoique moins violens, avaient eu beaucoup de peine à cesser dans l'*été*. Cependant les symptômes de cette maladie parurent diminuer, au lieu d'être continus : ils eurent une certaine intermittence, d'abord sans types réglés, en augmentant progressivement, non en surcroît de force dans le pouls, mais en faiblesse. Des remèdes plus toniques furent prescrits; mais les redoublemens de toux, de gêne dans la respiration, avec de copieuses excrétions muqueuses, furent suivis de fortes syncopes, qui, progressivement, devinrent si intenses, qu'on craignit que le malade ne pérît à la première. Je prescrivis le quinquina à très-haute dose; celle d'une once et demie en décoction, dans l'espace de vingt-quatre heures, suffit pour diminuer le redoublement suivant d'intensité et de longueur. On ajouta le lendemain un demi-gros de quinquina en poudre dans chacune des doses de la décoction, et les redoublemens typhoïdes cessèrent.

On continua cependant l'usage du quinquina, en diminuant progressivement sa quantité : le catarre parut considérablement diminué; le malade passa plusieurs jours dans un état d'amélioration, lorsque, plus que jamais, il se plaignit de douleurs abdominales, et quelquefois seulement dans la région des hémorroïdes.

Ces douleurs devinrent de plus en plus fréquentes et vives; des sangsues au fondement furent apposées pour extraire une palette de sang : les douleurs parurent se calmer, mais ce ne fut pas pour long-temps; elles se renouvelèrent quelque temps

après. La fièvre lente s'établit, sans être aussi vive. Les douleurs abdominales se propagèrent dans d'autres parties du corps; les borborigmes furent plus fréquens et presque continus. Il fut décidé, par une consultation (1) que j'avais demandée, que le malade prendrait tous les jours un bain tiède d'environ une heure; ce qui fut fait, et avec quelque succès, pendant plusieurs semaines. Les adoucissans, anodins, les nourritures légères et variées, furent prescrits : mais le malade ne put les prendre, ou bien ils ne lui réussirent pas; il dépérit et s'affaiblit de plus en plus, en conservant cependant ses facultés morales; enfin il cessa de vivre par une sorte d'extinction.

On reconnut par l'ouverture du corps (2), que le volume du foie n'était pas aussi considérable que je l'avais cru au commencement de la maladie; il paraissait flétri, rapetissé; il y avait en lui quelques endurcissemens; les rameaux de la veine porte étaient pleins d'un sang noir, sur-tout ceux qui constituent les veines hémorroïdales : les intestins, les grêles particulièrement, étaient livides, noirs, et même, en quelques endroits, atteints de gangrène; ce qui nous convainquit que M. le comte de Puységur était mort d'une entérite gangréneuse, après avoir éprouvé une longue maladie du foie.

Je pourrais citer d'autres exemples que j'ai eus sous les yeux, qui prouveraient que des maladies du foie ont été suivies d'entérite dont plusieurs personnes sont mortes avant que les désordres qu'on a trouvés dans le foie eussent été assez graves pour produire la mort, ou même lorsque les malades paraissaient être dans un meilleur état de la maladie du foie par la diminution apparente de ses symptômes.

On pourrait recueillir dans les ouvrages de Bonet, de

(1) Avec MM. Hallé, Montaigu et Bougon.

(2) Faite par M. Bougon, premier chirurgien de MONSIEUR.

Morgagni, de Lieutaud, et d'autres habiles anatomistes, des exemples qui prouveraient non-seulement que des entérites se sont réunies aux maladies du foie, quand celles-ci paraissaient en pleine vigueur, mais même qu'elles sont survenues quelquefois lorsqu'elles paraissaient guéries, les symptômes de la maladie dont le foie avait été affecté n'ayant plus lieu, ou étant à peine prononcés lorsque ceux de l'entérite étaient très-intenses.

L'ouverture de ces corps n'a alors démontré que de très-légères lésions dans le foie, ou même cet organe a-t-il quelquefois paru sain : ce qui ne prouve cependant pas qu'il n'ait pas été malade; car combien de maladies des organes n'y a-t-il pas sans altérations, après la mort, assez considérables pour être reconnues par les anatomistes !

Il ne faut cependant pas ignorer que diverses causes peuvent faire que le foie paraisse en meilleur état qu'on ne l'avait jugé : d'abord, parce qu'il remonte sous les fausses côtes, à proportion que le poumon droit, ou la cavité de la poitrine qui le contient, se dégorge du liquide que le foie renfermait, ce qui fait qu'il peut paraître, dans le cadavre, moins gros qu'on n'aurait cru qu'il était dans le vivant; et encore, parce qu'à la suite des grands dévoiemens que les phthisiques éprouvent, toutes les parties du corps maigrissent, et que le foie perd quelquefois de son volume : de sorte que les altérations de cet organe frappent moins qu'elles n'auraient fait, s'il n'avait pas éprouvé quelque diminution dans l'étendue et la nature de ses altérations.

Je pourrais dire, à l'appui de cette opinion, que j'ai quelquefois reconnu que le foie des phthisiques morts d'une hémoptysie ou d'un épanchement d'eau dans la poitrine, avant qu'ils eussent éprouvé le dévoiement, qui finit ordinairement leur maladie par la mort, était beaucoup plus gros et plus dur qu'il ne l'était dans d'autres phthisiques qui étaient morts

après avoir été desséchés par un long dévoiement et par les sueurs colliquatives les plus copieuses.

4.° L'entérite qui survient assez fréquemment dans le *cholera-morbus* et dans l'iléon ainsi que dans quelques dyssenteries, doit être encore essentiellement distinguée de l'entérite immédiate ou essentielle, puisqu'elle est principalement l'effet de la maladie du foie ou de l'altération de la bile; d'où il résulte que cette humeur est plus ou moins abondante, et quelquefois d'une acrimonie extrême, telle, qu'elle produit d'abord dans le canal intestinal des douleurs si vives, qu'elles sont quelquefois atroces, et avec des vomissemens affreux, seuls ou réunis à des déjections par les selles plus ou moins abondantes, comme dans le *cholera-morbus*, ou avec des vomissemens violens avec constipation ou suppression des excrétions alvines, comme dans l'iléon.

L'inflammation des intestins, qui survient fréquemment alors, peut être violente, et telle, que les intestins éprouvent une érosion non-seulement de leur tunique interne, appelée *muqueuse*, mais même de toutes les autres, au point que la bile qui les produit par son extrême acrimonie, s'épanche par diverses ouvertures dans la cavité du bas-ventre.

Combien de fois, en pareille circonstance, les malades, et ceux encore qui les entouraient, les médecins eux-mêmes, n'ont-ils pas regardé ces accidens comme l'unique résultat de l'inflammation des intestins, sans considérer qu'elle n'était que secondaire aux altérations du foie ou de la bile, de sorte qu'alors l'entérite n'était réellement que consécutive! C'est, au reste, ce qu'ont cru divers savans médecins, et de tous les temps, d'après le résultat de leurs nombreuses observations. Mais, comme il n'y a point de vérité en médecine qui ne finisse par être infirmée, souvent seulement parce qu'elle ne vient pas à l'appui de telle ou telle opinion, ou encore plus parce qu'elle la contredit, on a plusieurs fois considéré le

cholera-morbus et l'iléon comme des maladies propres aux intestins, sans remarquer que leur première cause résidait alors dans le foie : et de là combien d'erreurs graves, d'abord pour le traitement, et ensuite pour d'autres fausses conséquences qu'on a tirées !

J'en ai rapporté un exemple bien mémorable à la suite de mon petit ouvrage sur le traitement des personnes empoisonnées; entre autres, celui de M. Madison, secrétaire d'ambassade d'Angleterre, venu à Paris pour rédiger les articles du traité d'Amiens. Il eut, peu de temps après son arrivée, une colique des plus violentes, que je jugeai être de la nature de celles qu'on appelle *hépatiques :* le malade en guérit; mais il resta très-jaune, et continua de se livrer aux travaux du cabinet et de se répandre dans la capitale. Quelque temps après, paraissant jouir de la meilleure santé, il ressentit une vive douleur dans l'hypocondre droit : des vomissemens s'y joignirent; ils devinrent continus et très-violens : le bas-ventre fut très-douloureux; les urines, qui étaient rouges, se supprimèrent. On accusa l'inflammation des intestins. Des saignées copieuses furent prescrites, des bains et des boissons émollientes, mais inutilement. Les urines se supprimèrent. Le malade éprouva de fréquentes faiblesses, et mourut de cette maladie, qui ne dura que trois jours.

Cette mort fit beaucoup de bruit dans Paris. On ne manqua pas de dire que le secrétaire d'ambassade d'Angleterre avait été empoisonné.

Le Gouvernement voulut que l'ouverture du corps fût faite, et l'on ne peut douter que je n'en eusse aussi le desir.

M. de Vergennes, ministre des affaires étrangères, envoya de Versailles M. Gauthier, chirurgien de la Cour, pour y assister. L'ouverture fut faite en ma présence par le chirurgien de l'ambassade, M. Magdonel : plusieurs médecins et chirurgiens de Paris y furent présens. Le résultat de cette autopsie

apprit, 1.° que le foie était volumineux, et que la vésicule du fiel était très-ample, pleine de bile et contenant plusieurs petites concrétions ; que ses parois étaient épaisses et couvertes de vaisseaux pleins de sang ;

2.° Que l'estomac était atteint d'inflammation, sur-tout sa membrane interne ;

3.° Que les intestins grêles, particulièrement le duodénum, étaient d'un rouge violet dans une grande étendue, et percés en quelques endroits par de très-grandes érosions, sur-tout dans la membrane muqueuse. Ils contenaient une humeur noirâtre comme la bile qu'on avait vue dans la vésicule du fiel et dans le canal cholédoque.

Mon opinion, que partagèrent mes confrères, fut que le malade était mort d'un *cholera-morbus*, par suite d'une maladie du foie dont il avait, quelque temps auparavant, éprouvé les symptômes, la jaunisse, la colique hépatique, les nausées et les vomissemens. J'ajoutai que les ouvrages (1) contenaient plusieurs de ces exemples, auxquels j'en aurais pu réunir deux ou trois autres que j'avais recueillis dans ma pratique médicale et anatomique (2). Je dis que si ce genre de mort avait été plusieurs fois attribué à l'empoisonnement, c'était parce qu'on n'avait fait attention qu'aux symptômes qui indiquaient l'inflammation des intestins, et non à ceux qui avaient caractérisé la maladie du foie antécédente ; et que, de plus encore, dans les procès-verbaux de cette sorte d'ouverture de corps, on n'avait quelquefois fait mention que des altérations reconnues dans les intestins, et non de celles qu'on aurait pu reconnaître dans le foie, si l'autopsie avait été complète et fidèlement exposée.

(1) Particulièrement celui de Morgagni, *De sed. et caus. morb.* lib. IV, epist. LIX.

(2) *Voyez* mon Rapport sur la maladie de M. Madison, à la suite de l'Instruction sur le traitement des empoisonnemens.

J'ai rendu compte de cette observation dans mon instruction sur le traitement des empoisonnés, et avec un tel résultat, que déjà deux personnes qui avaient été accusées et jugées comme coupables d'empoisonnement d'après la seule inspection des altérations de l'estomac et des intestins dans les prétendus empoisonnés, ayant fait appel à la cour de cassation, et leur cause ayant été revue, d'après la décision de cette cour, par un autre tribunal, elles ont été acquittées.

Qu'on juge par-là combien, dans cette sorte de cas, il est nécessaire de s'enquérir de l'état de la santé antécédente de la personne réputée empoisonnée, et encore combien il est utile de bien faire connaître l'état du foie et des autres parties du bas-ventre différentes de l'estomac et des intestins.

Morgagni, qui a connu toutes les causes de cette erreur, croyait, quelles que fussent ces altérations, qu'on n'en pouvait rien conclure pour l'empoisonnement, et qu'il fallait toujours reconnaître clairement le poison lui-même : *Res certa erit,* dit-il, *ubi in ventriculo aut proximis intestinis venenum ipsum reperietur, etiam facilè agnoscendum* (1).

5.° L'entérite, dans la *fièvre maligne*, particulièrement dans le *typhus*, a été bien reconnue des médecins praticiens, tant par les symptômes qu'ils ont observés, que par les résultats de l'ouverture des corps, relatifs aux intestins, qu'ils ont soigneusement recueillis : mais ils n'ont pas aussi exactement remarqué dans les mêmes sujets, ni les symptômes relatifs aux affections morbides du foie, ni les altérations dans cet organe qu'on eût pu reconnaître après la mort; ou du moins, s'ils en ont eu connaissance, ils n'en ont pas tiré les conséquences qu'ils devaient en déduire. Je ne doute pas que, s'ils les avaient observées, ils n'eussent été convaincus que l'affection morbide du foie avait la plus grande influence sur

(1) *De sed. et caus. morbor.* lib. IV, epist. LIX, art. 10 et 20.

les inflammations des intestins, et même qu'elle en était souvent la principale cause.

En effet, on reconnaît presque toujours dans les corps des personnes qui ont péri du *typhus*, lorsque les intestins portent les marques de l'inflammation, que le foie est gonflé, durci en quelques endroits, et quelquefois ramolli et même abcédé, de couleur foncée; ses vaisseaux sanguins étant pleins de sang, et la vésicule du fiel contenant beaucoup de bile noire poisseuse, lors même quelquefois que l'on voit que les intestins grêles, ainsi que l'estomac, en contiennent une plus ou moins grande quantité.

Nous devons cependant dire qu'on a quelquefois reconnu dans les cadavres de personnes qui étaient mortes du *typhus* sans avoir éprouvé les symptômes de l'entérite, que le foie était très-altéré, quoiqu'il n'y eût dans les intestins aucune trace d'inflammation.

C'est d'après ces considérations que j'ai presque toujours utilement conseillé les promptes et abondantes saignées dans l'entérite immédiate, et que j'ai été plus réservé à les prescrire ou même que j'ai pu souvent m'en abstenir dans des entérites avec complication des fièvres adynamiques ou typhoïdes, sans négliger de conseiller alors le quinquina à très-haute dose. L'application des vésicatoires en diverses parties du corps et l'usage des boissons vineuses acidulées, &c. ont eu des succès réels que je n'aurais pas obtenus dans d'autres entérites.

Une autre espèce d'entérite concomitante des maladies du foie est celle qui survient aux personnes dont le cœur est atteint de quelque dilatation. J'en ai eu sous les yeux plusieurs exemples dont j'ai parlé dans mes *Mémoires sur les maladies du cœur.* La circulation du sang dans les vaisseaux du foie ne pouvant, dans ces individus, s'y faire librement, parce que les veines hépatiques ne peuvent vider celui qu'elles contiennent dans l'oreillette droite, qui en

contient elle-même une trop grande quantité, puisqu'elle en est distendue outre mesure, le foie s'engorge de sang de plus en plus et se tuméfie, en même temps que le cours de la bile y est troublé ; la jaunisse survient : il y a souvent des flatuosités, des borborigmes, des douleurs abdominales, surtout dans la région ombilicale, en même temps que le pouls est dur, plein. Tout annonce une entérite, lors même souvent que le corps se tuméfie généralement, ou seulement dans les extrémités inférieures, soit par une *pneumatie* ou par l'*anasarque*.

J'ai vu cet état finir quelquefois par une longue et considérable diarrhée. Le malade paraissait ensuite se trouver en une moins fâcheuse situation, même du côté de la maladie du cœur : très-souvent, en pareil cas, la saignée a été utilement prescrite.

Qu'on lise, pour s'en convaincre, les observations que j'ai recueillies et rapportées dans mes *Mémoires sur les maladies du cœur*, relatives aux palpitations de cet organe, dont ont péri MM. Villement, marchand parfumeur; Maupertuis, Joseph Chénier, et d'autres malades encore dont j'ai donné l'histoire. Je pourrais réunir à ces observations celles que j'ai recueillies depuis, car ces faits ne sont malheureusement pas rares.

Je dirai seulement un mot sur cette espèce d'entérite survenue à M. Udriet, rue Saint-Florentin. J'ai vu ce malade en consultation avec MM. Gall, Récamier, Laennec, Kéraudren, Alibert, Bourdois de la Motte, Regnault, &c. : il était atteint fréquemment des palpitations du cœur les plus violentes, d'une grande gêne dans la respiration, d'une forte douleur dans la région gauche et inférieure de la poitrine. Les saignées que M. Gall avait ordonnées avec succès furent réitérées d'après notre avis commun. Des juleps antispasmodiques et diurétiques, dans lesquels entraient la valériane sauvage et la digitale pourprée, &c., furent prescrits : par

ces moyens les palpitations du cœur parurent diminuées. Quelque temps après, le malade éprouva des douleurs fortes dans la région ombilicale, avec tension, chaleur, nausées et des vomituritions, redoublement du pouls toujours inégal, dur et intermittent; symptômes qui annoncèrent une entérite. Des sangsues apposées au fondement ou sur la partie douloureuse du bas-ventre firent disparaître cette douleur; mais il survint une œdématie des extrémités inférieures avec une plus grande gêne dans la respiration, lors cependant que les palpitations du cœur semblaient diminuées.

Le malade, après avoir ainsi vécu plusieurs semaines, parut en un état moins fâcheux : mais des faiblesses survinrent; elles furent des plus intenses : enfin M. Udriet périt après une maladie de plusieurs mois, sur laquelle diverses opinions avaient été émises, non-seulement quant à sa nature, mais aussi quant à son traitement.

On se convainquit, par l'ouverture du corps, que les cavités du cœur étaient extraordinairement dilatées, la paroi du ventricule droit étant amincie, et celle du ventricule gauche étant, au contraire, très-épaissie et formée par une substance cartilaginiforme; l'oreillette droite était sur-tout amplifiée, pleine de sang, ainsi que les vaisseaux du foie; les intestins étaient rouges, noirs même, paraissant être enflammés. Il y avait dans la partie supérieure du poumon des congestions stéatomateuses, qui auraient sans doute pu faire périr le malade de phthisie pulmonaire, s'il n'avait succombé à la maladie du cœur et à ses complications.

Il résulte de ce Mémoire, 1.° que les entérites essentielles et primitives des intestins doivent être distinguées des entérites consécutives, particulièrement des maladies du foie, soit par rapport à la différence du pronostic qu'on peut en porter, soit pour ce qui concerne le traitement qu'on doit prescrire;

2.° Que les entérites par vices du foie sont précédées ou accompagnées de symptômes qui indiquent les lésions de cet organe, tels que la jaunisse, le prurit de la peau, les urines rouges, le dégoût pour les alimens, les nausées, les vomissemens, souvent avec intumescence et douleurs dans la région du foie, ainsi qu'à la partie supérieure de l'épaule du même côté; des borborigmes, des hémorroïdes, des diarrhées, des dyssenteries, des constipations plus ou moins opiniâtres, &c.;

3.° Que les entérites par des affections du foie dans les fièvres typhoïdes sont remarquables par la prostration des forces, par l'assoupissement souvent réuni au délire, par le pouls, qui est plus inégal et moins dur que dans les entérites essentielles;

4.° Qu'il faut, d'après les résultats heureux de l'expérience, combattre par la saignée les entérites essentielles; tandis qu'au contraire il ne faut y recourir, dans celles qui sont symptomatiques, que lorsque l'inflammation des intestins est annoncée par les signes d'une vraie pléthore, le pouls étant dur, fréquent et plein ; ce qui fait que très-souvent on peut s'en abstenir pour prescrire le quinquina, et même à haute dose; remède dont l'expérience a tant de fois, en pareil cas, démontré les heureux effets, lorsqu'au contraire elle a prouvé qu'il était généralement nuisible dans l'entérite essentielle, sur-tout si les vaisseaux sanguins n'avaient pas été désemplis par la saignée.

5.° On peut aussi établir, d'après les résultats de l'expérience, que l'application des vésicatoires en diverses parties du corps est presque toujours très-efficace dans les entérites symptomatiques, et qu'elle ne l'est souvent pas, si elle n'est même nuisible, dans les entérites essentielles, lorsque la saignée n'a pas été pratiquée.

6.° Nous dirons, de plus, que la saignée du bras par la lan-

cette, dans les entérites essentielles, nous a paru généralement bien mieux réussir que celle par les sangsues au fondement, et encore plus que celle par les sangsues sur le bas-ventre : ces saignées peuvent cependant suffire lorsque l'inflammation n'est pas très-intense; ce qui est très-fréquent dans les entérites symptomatiques.

7.° Je pourrais ajouter aux observations que j'ai rapportées sur les entérites causées par des maladies du foie, d'autres faits qui prouveraient qu'elles peuvent aussi provenir des maladies de la rate, du mésentère (1), des voies urinaires, de la matrice chez les femmes : mais tous ces détails, ainsi que d'autres observations consignées dans les bons ouvrages, tendraient de plus en plus à nous convaincre que, pour traiter avec succès ces inflammations, il faut en savoir varier les remèdes d'après les symptômes qui indiquent leur siége, leur nature et leur intensité.

---

(1) Observations sur l'entéro-mésentérite, maladie des enfans désignée sous le nom d'*atrophie mésentérique* et d'*entéro-mésentérite des enfans*, par M. Desruelles, docteur en médecine de Paris, et par le vulgaire sous celui de *carreau*.

MÉMOIRE

Sur quelques nouvelles propriétés des Axes permanens de rotation des corps et des Plans directeurs de ces axes;

PAR M. AMPÈRE.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 18 Juin 1821.

DÉNOMINATIONS ADOPTÉES.

JE désignerai, dans ce Mémoire, sous le nom d'*axes permanens de rotation*, ou, pour abréger, sous celui d'*axes permanens*, les lignes situées dans un corps ou menées hors de ce corps et liées invariablement avec lui, de manière qu'on puisse y déterminer un point tel, qu'en le supposant fixe et en faisant tourner le corps autour de la ligne que l'on considère, le mouvement se continue indéfiniment sans que les forces centrifuges qui en résultent tendent à déplacer cette ligne. Je nommerai *centre de rotation* d'un axe permanent le point ainsi déterminé sur cet axe, et je dirai qu'une ligne est axe permanent relativement à un point, quand ce point sera son centre de rotation.

Je réserverai le nom d'*axes principaux*, qu'on donne ordinairement à tous les axes permanens, pour désigner exclusivement les axes permanens relatifs au centre d'inertie, qui,

comme on sait, le sont non-seulement par rapport à ce centre, mais encore par rapport à un point quelconque de leur longueur.

J'appellerai *plans directeurs des axes permanens de rotation*, ou plus simplement *plans directeurs*, les plans situés dans un corps ou hors de ce corps, de manière qu'on puisse y déterminer un point tel que toutes les lignes menées par ce point dans le plan soient des axes permanens, en quelque point de la longueur de ces axes que soient d'ailleurs placés leurs centres de rotation.

Je nommerai *centre de convergence d'un plan directeur* le point ainsi déterminé sur ce plan, et je dirai qu'un plan est plan directeur relativement à un point, lorsque ce point sera son centre de convergence. Comme il sera démontré dans la suite de ce Mémoire que tout plan passant par deux axes principaux est un plan directeur relativement à tous les points de la surface, et que cette propriété ne peut appartenir à aucun autre plan, je donnerai exclusivement aux plans qui passent ainsi par deux axes principaux, le nom de *plans principaux*.

On sait qu'il y a toujours dans un corps, d'après cette manière d'en désigner les axes et les plans, trois axes principaux et trois plans principaux, et qu'il ne peut y en avoir un plus grand nombre que dans des cas particuliers où ce nombre devient infini, et qui ont été discutés depuis longtemps; en sorte qu'il serait tout-à-fait superflu de les examiner ici.

J'adopterai les dénominations de *momens d'inertie relatifs à un axe*, et de *momens d'inertie relatifs à un plan*, dans le sens que leur ont donné les auteurs qui ont déjà écrit sur ce sujet. Je distinguerai en conséquence les momens d'inertie des axes principaux, qui, en nommant x, y, z, les coordonnées relatives à ces axes, sont $\int (y^2 + z^2)\, dm$ pour l'axe

principal sur lequel on compte les x; $\int(x^2+z^2)\,dm$ pour celui des y, et $\int(x^2+y^2)\,dm$ pour celui des z; des momens d'inertie des plans principaux, qui sont $\int x^2\,dm$ pour le plan principal passant par l'axe des y et l'axe des z; $\int y^2\,dm$ pour ce plan principal où se trouvent l'axe des x et celui des z; et $\int z^2\,dm$ pour celui qui contient les deux axes des x et des y. La somme du moment d'inertie d'un axe principal et de celui du plan principal qui lui est perpendiculaire, étant toujours égale à $\int(x^2+y^2+z^2)\,dm$, le plan perpendiculaire à l'axe dont le moment d'inertie est le plus petit, est celui des trois plans principaux dont le moment d'inertie est le plus grand, et réciproquement.

Lorsqu'on fait mouvoir un axe permanent ou un plan directeur, de manière que le centre de rotation du premier ou le centre de convergence du second s'éloigne indéfiniment du centre d'inertie du corps, l'axe ou le plan s'approche indéfiniment d'une ligne ou d'un plan tellement situé, que, si on les considérait, la ligne comme un axe permanent, le plan comme un plan directeur, on trouverait que le centre de rotation de cette ligne ou le centre de convergence de ce plan sont situés à une distance infinie. J'appellerai *limites des axes permanens*, *limites des plans directeurs*, les lignes ou les plans qui présentent cette propriété : elles présentent en même temps la plupart de celles des axes permanens ou des plans directeurs, mais non pas toutes; et ce qui fait sur-tout qu'on ne peut comprendre les limites dont nous parlons, les premières parmi les axes permanens, les secondes parmi les plans directeurs, c'est qu'on peut concevoir, pour les limites des axes permanens, des plans directeurs dans lesquels il existe un centre de convergence de ces limites, que toute ligne menée par ce centre dans le plan directeur est une limite d'axes permanens, et que cependant ces plans directeurs des limites des axes permanens n'ont

point en général les propriétés des plans directeurs des axes permanens, et diffèrent sur-tout tout-à-fait des limites des derniers plans, telles que nous les avons définies.

AVANT-PROPOS.

Euler, qui fit une si heureuse application de la considération des axes permanens à la détermination du mouvement d'un corps, soit libre, soit retenu par un point fixe, démontra que par tout point lié invariablement avec le corps, ou pris dans son intérieur, on peut toujours faire passer au moins trois axes permanens perpendiculaires entre eux, dont les centres de rotation sont placés à ce point. Mais il ne tint pas compte des autres axes permanens qui peuvent passer par le même point, et dont les centres sont situés à des points différens de celui que l'on considère; en général, il ne s'occupa point de la distribution des axes permanens dans un corps.

La théorie des axes permanens se borna à la démonstration de ce théorème et aux formules par lesquelles, connaissant les valeurs des momens d'inertie par rapport aux trois axes principaux, on peut calculer celle du moment d'inertie relatif à un axe quelconque, jusqu'au mémoire présenté à l'Institut au mois de mai 1811 par M. Binet, tant sur les axes permanens qu'il nomme *axes principaux*, que sur une autre sorte d'axes qu'il a considérés le premier et nommés *axes conjugués*; ces axes sont devenus, dans ses mains, un sujet fécond en résultats aussi remarquables qu'inattendus, et dont il a déduit entre autres conséquences une théorie complète sur la situation des axes permanens et la manière dont ils sont distribués dans un corps. J'ai cru cependant qu'on pouvait encore ajouter quelque chose à ce beau travail; je me propose ici d'exposer le point de vue sous lequel j'ai considéré les axes permanens, et les résultats auxquels j'ai été conduit; mais je dois d'abord

démontrer quelques formules dont j'aurai besoin dans le cours de ce Mémoire.

Quand, au lieu des trois coordonnées x, y, z, on en prend trois autres x', y', z', telles que

$$\begin{aligned} x' &= ax + a'y + a''z, \\ y' &= bx + b'y + b''z, \\ z' &= cx + c'y + c''z, \end{aligned}$$

il existe entre les neuf cosinus des angles formés par un des anciens axes avec un des nouveaux, et qui sont représentés ici par $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, six relations qu'on peut mettre sous différentes formes : voici une conséquence de ces relations, que je dois d'abord en déduire, parce que j'en aurai besoin dans des recherches ultérieures. Les six relations étant mises sous cette forme,

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 1 - c^2, \\ a'^2 + b'^2 &= 1 - c'^2, \\ a''^2 + b''^2 &= 1 - c''^2, \\ aa' + bb' &= \quad - cc', \\ aa'' + bb'' &= \quad - cc'', \\ a'a'' + b'b'' &= \quad - c'c'', \end{aligned}$$

on en tire, en multipliant la première par la seconde et élevant la quatrième au carré,

$$a^2a'^2 + b^2b'^2 + a^2b'^2 + b^2a'^2 = 1 - c^2 - c'^2 + c^2c'^2,$$

$$a^2a'^2 + b^2b'^2 + 2aba'b' = c^2c'^2;$$

ainsi

$$a^2b'^2 + b^2a'^2 - 2aba'b' = 1 - c^2 - c'^2 = c''^2,$$

d'où

$$ab' - ba' = \pm c''.$$

On trouverait de même

$$b\,a'' - a\,b'' = \pm c'$$
$$a'\,b'' - b'\,a'' \pm c.$$

Mais, en suivant cette marche, on ne verrait pas comment les signes des deux dernières équations dépendent de celui de la première : c'est ce qu'on voit au contraire en partant par exemple de

$$c'' = a\,b' - b\,a',$$

et trouvant c et c' au moyen des deux relations suivantes :

$$a\,c + a'\,c' = -\,a''\,c'',$$
$$b\,c + b'\,c' = -\,b''\,c'',$$

qui donnent, d'après les formules des équations du premier degré,

$$c = \frac{-b'a''c'' + a'b''c''}{a\,b' - b\,a'} = \frac{c''}{ab' - ba'}(a'b'' - b'a'') = a'b'' - b'a'',$$
$$c' = \frac{-a\,b''c'' + b\,a''c''}{a\,b' - b\,a'} = \frac{c''}{ab' - ba'}(ba'' - a\,b'') = b\,a'' - a\,b''.$$

Ainsi le signe de la première équation est arbitraire; mais, une fois qu'il a été choisi à volonté, il détermine ceux des autres équations, et en outre ceux des équations qui donnent des valeurs semblables pour b, b', b'', a, a', a''. En effet, si l'on substitue, par exemple, les valeurs que nous venons de trouver pour c' et c'' à la place de ces quantités dans $c'\,a'' - a'\,c''$, on trouve

$$c'\,a'' - a'\,c'' = b\,a''^2 - a\,a''\,b'' - a\,a'\,b' + b\,a'^2$$
$$= b - a^2\,b - a\,a''\,b'' - a\,a'\,b' = b,$$

en vertu des deux relations

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,\ a\,b + a'\,b' + a''\,b'' = 0;$$

tandis qu'en substituant les mêmes valeurs dans $a'\,c'' - c'\,a''$, on aurait trouvé $-\,b$.

On aura donc avec

$$c = a' b'' - b' a'',$$
$$c' = b a'' - a b'',$$
$$c'' = a b' - b a',$$

ces valeurs de b, b', b'',

$$b = c' a'' - a' c'',$$
$$b' = a c'' - c a'',$$
$$b'' = c a' - a c',$$

dont la dépendance, relativement aux trois équations qui donnent c, c', c'', consiste en ce que, si a, par exemple, est multiplié dans les valeurs de c, c', c'', par b' et par $-b''$, il le sera par c'' et par $-c'$ dans celles de b, b', b''; et de même pour a' et pour a''. Il est aisé d'en conclure que pour ces valeurs de c, c', c'', b, b', b'', celles de a, a', a'', seront

$$a = b' c'' - c' b'',$$
$$a' = c b'' - b c'',$$
$$a'' = b c' - c b',$$

valeurs qu'il est d'ailleurs facile de vérifier par des calculs semblables à celui qui nous a donné la valeur de b.

CHAPITRE I.er

Des Axes permanens assujettis à passer par un point donné.

On peut, en général, faire passer par un point A (1), pris soit dans un corps, soit hors de ce corps, trois sortes de lignes :

1.° Celles qui sont des axes permanens par rapport à ce point, et qui sont au moins au nombre de trois ;

2.° Celles qui ne le sont pas pour ce point, mais pour un autre point de leur longueur ;

(1) *Voyez* la figure 1 à la page 113 de ce Mémoire.

3.° Celles qui ne le sont pour aucun point de leur longueur.

Les premières sont déterminées par la condition qu'en les prenant pour axe des z', chacune à son tour, $\int x' z' dm$ et $\int y' z' dm$ soient nulles; les secondes par cette autre condition, que les mêmes quantités, n'étant pas nulles pour le point A, le soient pour un point O qui s'en trouve à une distance $= r$, sur la ligne que l'on considère, en sorte que

$$\int y' (z' - r) dm = 0, \text{ et } \int x' (z' - r) dm = 0;$$

d'où

$$r = \frac{\int y' z' dm}{\int y' dm}, r = \frac{\int x' z' dm}{\int x' dm},$$

et la condition cherchée est exprimée par

$$\frac{\int y' z' dm}{\int y' dm} = \frac{\int x' z' dm}{\int x' dm}.$$

Comme on peut toujours prendre pour axes des x' et des y' deux droites perpendiculaires à cette ligne et rectangulaires entre elles, dans des directions telles, qu'outre les deux équations ci-dessus, on ait de plus $\int x' y' dm = 0$, la ligne passant par le point A, qui satisfera à la condition précédente, sera un axe permanent relativement au point O déterminé par la condition $A O = r$, puisqu'on aura pour ce point

$$\int x' (z' - r) dm = 0, \int y' (z' - r) dm = 0, \int x' y' dm = 0.$$

On voit en même temps, par ces formules, pourquoi, quand le point A est le centre d'inertie, il n'y a que deux sortes de lignes qui puissent y passer; car alors $\int x' dm = 0, \int y' dm = 0$, ce qui donne

$$\int x' (z' - r) dm = \int x' z' dm,$$
$$\int y' (z' - r) dm = \int y' z' dm,$$

en sorte que si la ligne est un axe permanent pour le point A, elle le sera aussi pour tous les autres points pris sur son cours,

et que, si elle ne l'est pas pour le point A, elle ne pourra jamais l'être pour aucun de ses points, si ce n'est pour un point situé à une distance infinie, puisqu'alors la valeur générale de r devient infinie.

Reste à trouver toutes les lignes qui, passant par un point A différent du centre d'inertie, satisfont à la condition

$$\frac{\int y' z' dm}{\int y'^2 dm} = \frac{\int x' z' dm}{\int x'^2 dm}.$$

Supposons que les axes primitifs des x, y, z, sont les axes principaux; nommons G, H, K, les trois quantités $\int x^2 dm$, $\int y^2 dm$, $\int z^2 dm$; M, la masse du corps; X', Y', Z', les coordonnées du centre d'inertie relativement au point A et aux axes des x', y', z'; X, Y, Z, celles du point A relativement au centre d'inertie et aux axes des x, y, z. Nous aurons, en représentant, comme on le fait ordinairement, par $a, a', a'', b, b', b'', c, c', c''$, les cosinus des angles formés par les deux systèmes,

$$\begin{aligned}
x' &= X' + ax + a'y + a''z,\\
y' &= Y' + bx + b'y + b''z,\\
z' &= Z' + cx + c'y + c''z;\\
X' &= \quad -aX - a'Y - a''Z,\\
Y' &= \quad -bX - b'Y - b''Z,\\
Z' &= \quad -cX - c'Y - c''Z;
\end{aligned}$$

parce que $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, doivent donner $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = 0$. En substituant ces trois dernières valeurs dans les précédentes, on aurait les valeurs connues de x', y', z', en x, y, z, X, Y, Z; mais nous conserverons d'abord X', Y', Z', dans celles de x', y', z', pour que le calcul soit moins compliqué. Elles donneront, à cause de

$$\int x\,dm = 0, \int y\,dm = 0, \int z\,dm = 0,$$
$$\int yz\,dm = 0, \int xz\,dm = 0, \int xy\,dm = 0,$$

les valeurs suivantes :

$$\int x'\,dm = MX',$$
$$\int y'\,dm = MY',$$
$$\int x' z'\,dm = MX'Z' + acG + a'c'H + a''c''K,$$
$$\int y' z'\,dm = MY'Z' + bcG + b'c'H + b''c''K;$$

ce qui change les deux valeurs obtenues précédemment pour r, en

$$r = Z' + \frac{acG + a'c'H + a''c''K}{MX'}$$
$$r = Z' + \frac{bcG + b'c'H + b''c''K}{MY'}.$$

Pour que ces deux valeurs soient égales, il faut que

$$\frac{acG + a'c'H + a''c''K}{X'} = \frac{bcG + b'c'H + b''c''K}{Y'},$$

ou, en mettant au lieu de X' et de Y' leurs valeurs et changeant les signes,

$$\frac{acG + a'c'H + a''c''K}{aX + a'Y + a''Z} = \frac{bcG + b'c'H + b''c''K}{bX + b'Y + b''Z};$$

d'où l'on tire

$$abcGX + ba'c'HX + ba''c''KX + ab'cGY + a'b'c'HY + b'a''c''KY + ab''cGZ + a'b''c'HZ + a''b''c''KZ =$$
$$abcGX + ab'c'HX + ab''c''KX + ba'cGY + a'b'c'HY + a'b''c''KY + ba''cGZ + b'a''c'HZ + a''b''c''KZ,$$

c'est-à-dire,

$$(ab' - ba')c'HX + (ab'' - ba'')c''KX + (ba' - ab')cGY + (a'b'' - b'a'')c''KY + (ba'' - ab'')cGZ + (b'a'' - a'b'')c'HZ = 0,$$

qui devient, à cause des valeurs de c, c', c'', obtenues précédemment,

$$c'c''(H - K)X + cc''(K - G)Y + cc''(G - H)Z = 0.$$

Et si nous représentons par D, D', D'', les trois différences $H-K$, $K-G$, $G-H$, entre les quantités G, H, K, prises de manière que chacune de ces quantités entre une fois positivement et une fois négativement dans les deux différences où elle se trouve, en sorte qu'on ait

$$D+D'+D''=0,$$

ces quantités seront aussi les différences entre les trois momens d'inertie relatifs aux axes principaux; car, en nommant ces momens A, B, C, on a, comme on sait,

$$A=H+K,\ B=G+K,\ C=G+H,$$

d'où

$$C-B=H-K=D,\ A-C=K-G=D',\ B-A=G-H=D'',$$

et l'équation que nous venons d'obtenir prendra cette forme plus simple :

$$c'c''DX+cc''D'Y+cc'D''Z=0.$$

Toutes les fois qu'une ligne passant par un point donné A, dont les coordonnées relatives aux trois axes principaux sont X, Y, Z, sera dirigée de manière que les cosinus c, c', c'', des angles qu'elle forme avec ces trois axes, ne satisferont pas à l'équation précédente, elle ne pourra être un axe permanent; quand, au contraire, cette équation sera satisfaite, elle sera nécessairement un axe permanent ou une limite d'axe permanent. Il est d'ailleurs aisé de reconnaître à quel caractère on distinguera les axes permanens de leurs limites, en faisant attention, 1.° que cette équation est toujours satisfaite par une ligne qui passe par le centre d'inertie du corps, parce qu'en prenant le point A à ce centre, on a $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, ce qui fait évanouir tous les termes de l'équation ; 2.° que quand l'axe des z' passe par le centre d'inertie, on a $\int x'\,dm=0$, $\int y'\,dm=0$, et qu'alors, si la ligne donnée n'est pas un axe principal, les quantités $\int x'z'\,dm$,

$\int y' z' dm$, ne sont pas nulles, d'où il suit que les valeurs $\frac{\int x' z' dm}{\int x' dm}$ et $\frac{\int y' z' dm}{\int y' dm}$, que nous avons trouvées pour r, deviennent infinies, en sorte que les lignes qui satisfont dans ce cas à l'équation sont toutes des limites d'axes permanens. Il est aisé de voir, au reste, que cette propriété leur appartient exclusivement; ce qui résultera d'ailleurs de la détermination générale de la valeur de r que nous donnerons plus bas, cette valeur ne pouvant devenir infinie que quand la ligne dont on cherche le centre de rotation passe par le centre d'inertie. Cette équation est encore satisfaite quand la ligne est parallèle à un des axes principaux, ou qu'elle est comprise dans un des trois plans rectangulaires qui joignent ces axes deux à deux. En effet, si la ligne est, par exemple, parallèle à l'axe des z, on a $c = 0$, $c' = 0$, $c'' = 1$; et comme tous les termes de l'équation de condition contiennent l'un des deux facteurs c ou c', cette équation est satisfaite. Si la même ligne est comprise, par exemple, dans le plan des $x\,y$, on a $c'' = 0$ et $Z = 0$, ce qui rend encore nul le premier membre de l'équation

$$c' c'' D X + c c'' D' Y + c c' D'' Z = 0:$$

d'où il suit que les deux sortes de lignes dont nous venons de parler sont toujours des axes permanens, ou des limites d'axes permanens; ce qu'il est d'ailleurs aisé de déduire des lois de la distribution des axes permanens d'un corps qu'a données M. Binet dans le Mémoire cité plus haut.

On peut aussi écrire l'équation précédente ainsi,

$$\frac{D X}{c} + \frac{D' Y}{c'} + \frac{D'' Z}{c''} = 0;$$

et si l'on nomme s la ligne $G A$ qui joint le centre d'inertie au point donné A; m, m', m'', les trois cosinus des angles que cette ligne forme avec les trois axes, on aura

$$X = ms,$$
$$Y = m's,$$
$$Z = m''s;$$

ce qui changera cette équation en

$$\frac{Dm}{c} + \frac{D'm'}{c'} + \frac{D''m''}{c''} = 0:$$

d'où il suit que parmi toutes les lignes passant par un point donné A différent du centre d'inertie, celles-là seulement sont des axes permanens, ou des limites d'axes permanens, qui sont situées de manière que lorsqu'on divise les trois différences D, D', D'', entre les momens d'inertie des trois axes principaux respectivement par les cosinus des angles qu'elles forment avec ces trois axes, et qu'on multiplie les quotiens par les cosinus des angles que forme avec les mêmes axes la droite qui joint le point A et le centre d'inertie, on trouve trois produits dont la somme est égale à zéro. Une seule des lignes qui satisfont à cette condition est une limite d'axes permanens, c'est celle qui passe à-la-fois par le point donné et le centre d'inertie.

Si l'on nomme u la distance du point A à un point dont les coordonnées soient x, y, z, et qui soit pris à volonté sur un des axes permanens passant par ce point A, on aura

$$c = \frac{x - X}{u},$$
$$c' = \frac{y - Y}{u},$$
$$c'' = \frac{z - Z}{u};$$

ce qui change l'équation

$$c'c''DX + cc''D'Y + cc'D''Z = 0$$

en

$$DX(y-Y)(z-Z) + D'Y(x-X)(z-Z) + D''Z(x-X)(y-Y) = 0:$$

En exécutant les multiplications indiquées, et faisant les réductions qui résultent de l'équation

$$D + D' + D'' = o,$$

on a

$$D X y z + D' Y x z + D'' Z x y + D Y Z x + D' X Z y + D'' X Y z = o,$$

équation commune à tous les axes permanens qui passent par le point A; et comme elle appartient à une surface conique du second ordre, il s'ensuit que c'est sur une surface de ce genre que se trouvent tous ces axes. Cette surface, dont le sommet est en A, passe par la ligne AG, limite de tous les axes permanens qui se trouvent sur cette surface, puisque les coordonnées du point G, $x = o$, $y = o$, $z = o$, satisfont à cette équation. Elle passe aussi par les trois parallèles menées du point A aux trois axes principaux, puisque la même équation est satisfaite, soit qu'on fasse $y = Y$, $z = Z$, ou $x = X$, $z = Z$, ou enfin $x = X$, $y = Y$; ce qui doit être, puisque toute parallèle à un des axes principaux est, comme nous venons de le voir, un axe permanent.

L'équation commune à toutes les surfaces coniques formées par les axes permanens qui se coupent à leurs sommets, prouve qu'il n'y a pas d'axe permanent parallèle à un plan principal qui ne le soit à un des axes principaux compris dans ce plan : car, pour qu'il soit parallèle, par exemple, au plan des xy, il faut que $z = Z$, ce qui réduit cette équation à $(x - X)(y - Y) = o$; en sorte qu'on aura à-la-fois ou $z = Z$ et $y = Y$, et alors l'axe permanent sera parallèle à l'axe des x, ou $z = Z$ et $x = X$, et alors il sera parallèle à l'axe des y.

Si l'on fait passer par la ligne AG un plan quelconque, il coupera la surface conique en une autre ligne dont la direction se trouve déterminée par une relation très-simple qu'on trouvera de la manière suivante :

Soient n, n', n'' les cosinus des trois angles que forme ce plan

avec les trois plans coordonnés que nous venons de considérer; ou, ce qui est la même chose, des trois angles que forme, avec les axes des x, des y et des z, la ligne menée par le point A perpendiculairement à ce plan. Comme cette ligne est à-la-fois perpendiculaire à celles dont les cosinus sont respectivement c, c', c'' et m, m', m'', on aura

$$n^2 + n'^2 + n''^2 = 1,$$
$$n c + n' c' + n'' c'' = 0,$$
$$m n + m' n' + m'' n'' = 0.$$

Ces deux dernières équations donnent

$$\frac{m''}{c''} = \frac{m n + m' n'}{n c + n' c'};$$

ce qui change l'équation

$$\frac{D m}{c} + \frac{D' m'}{c'} + \frac{D'' m''}{c''} = 0$$

en

$$\frac{D m c' + D' c m'}{c c'} + \frac{D'' (m n + m' n')}{n c + n' c'} = 0;$$

ou

$$D m n c c' + D' n m' c^2 + D m n' c'^2 + D' m' n' c c' + D'' m n c c' + D'' m' n' c c' = 0,$$

et à cause de $D'' = -D - D'$, cette équation se réduit à

$$D' n m' c^2 + D m n' c'^2 - D' m n c c' - D m' n' c c' = 0,$$

ou

$$(D' n c - D n' c') (m' c - m c') = 0;$$

or le facteur $m' c - m c'$, égalé à zéro, donne $\frac{m'}{c'} = \frac{m}{c}$, ainsi

$$(D + D') \frac{m}{c} + D'' \frac{m''}{c''} = 0,$$

et à cause de $D + D' = -D''$,

$$\frac{m''}{c''} = \frac{m}{c} = \frac{m'}{c'} = k;$$

mais on a

$$c^2 + c'^2 + c''^2 = 1,$$

$$m^2 + m'^2 + m''^2 = 1, \text{ ou } k^2 (c^2 + c'^2 + c''^2) = 1;$$

ainsi $k = \pm 1$, on a donc

$$c = m, \; c' = m', \; c'' = m'',$$

ou

$$c = -m, \; c' = -m', \; c'' = -m'';$$

c'est-à-dire que ce facteur donne pour une des intersections du plan que nous considérons et de la surface conique la ligne qui passe par le point donné et le centre d'inertie, et qui est la limite de tous les axes permanens situés sur cette surface. L'autre intersection donnée par l'autre facteur

$$D' n c - D n' c' = 0,$$

déterminera, parmi les axes permanens passant par le point donné, celui qui est situé dans ce plan. On aura pour cet axe

$$\frac{n c}{D} = \frac{n' c'}{D'} = \frac{n c + n' c'}{D + D'} = \frac{n'' c''}{D''},$$

puisque $n c + n' c' = - n'' c''$ et $D + D' = - D''$. On tire de ces relations :

$$c : c' :: \frac{n'}{D'} : \frac{n}{D} :: \frac{D}{n} : \frac{D'}{n'};$$

et

$$c : c'' :: \frac{n''}{D''} : \frac{n}{D} :: \frac{D}{n} : \frac{D''}{n''};$$

ainsi

$$c : c' : c'' :: \frac{D}{n} : \frac{D'}{n'} : \frac{D''}{n''} :: D n' n'' : D' n n'' : D'' n n';$$

d'où il est aisé de conclure, en vertu de l'équation $c^2 + c'^2 + c''^2 = 1$, que

$$c = \frac{D n' n''}{\sqrt{D^2 n'^2 n''^2 + D'^2 n^2 n''^2 + D''^2 n^2 n'^2}}$$

$$c' = \frac{D' n n''}{\sqrt{D^2 n'^2 n''^2 + D'^2 n^2 n''^2 + D''^2 n^2 n'^2}}$$

$$c'' = \frac{D'' n n'}{\sqrt{D^2 n'^2 n''^2 + D'^2 n^2 n''^2 + D''^2 n^2 n'^2}},$$

dont deux suffisent pour déterminer la position de l'axe permanent qui, passant par un point donné, se trouve dans un plan donné mené par la ligne qui joint ce point au centre d'inertie. Mais un moyen plus simple de déterminer cet axe, puisqu'il doit passer par le point A et doit être situé dans le plan $A\ G\ M$, c'est de prendre la valeur du cosinus de l'angle $G\ A\ M$ qu'il forme avec la droite $A\ G$; cette valeur est

$$m c + m' c' + m'' c'' = \frac{D m n' n'' + D' m' n n'' + D'' m'' n n'}{\sqrt{D^2 n'^2 n''^2 + D'^2 n^2 n''^2 + D''^2 n^2 n'^2}}.$$

Quant à l'équation du plan $G\ A\ M$, elle sera

$$n x + n' y + n'' z = 0,$$

et l'axe permanent $A\ M$ situé dans ce plan sera représenté par deux des trois équations

$$y - Y = \frac{D' n}{D n'} (x - X),$$

$$z - Z = \frac{D'' n}{D n''} (x - X),$$

$$z - Z = \frac{D'' n'}{D' n''} (y - Y).$$

Quand le point donné A est dans un des plans principaux, par exemple dans le plan des $x\,y$, on a $Z = 0$ et $m'' = 0$; en vertu de cette valeur de m'', l'équation

$$m n + m' n' + m'' n'' = 0$$

donne

$$\frac{n}{n'} = - \frac{m'}{m},$$

en sorte que la première des trois équations que nous venons de trouver pour un axe permanent passant par le point A, devient

$$y - Y = -\frac{D'm'}{Dm}(x - X) = -\frac{D'Y}{DX}x + \frac{D'Y}{D},$$

ou

$$y = -\frac{D'Y}{DX}x + \frac{DY + D'Y}{D} = -\frac{D'Y}{Y}x - \frac{D''Y}{D},$$

à cause que l'on a $\frac{m'}{m} = \frac{Y}{X}$ et $D + D' = -D''$.

Cette équation étant indépendante des angles dont les cosinus sont n, n', n'', qui détermine la position du plan GAM, les axes permanens passant par le point A, correspondans aux diverses positions de ce plan, auront tous pour projection sur le plan des xy une même droite représentée par cette équation, et seront par conséquent dans un même plan perpendiculaire à celui des xy; mais parmi ces diverses positions du plan GAM, il s'en trouve une où il se confond avec le plan des xy, alors $n = 0$, $n' = 0$, $n'' = 1$, et l'équation

$$mn + m'n' + m''n'' = 0$$

se trouve ainsi satisfaite d'elle-même; l'équation

$$y - Y = \frac{D'n}{Dn'}(x - X)$$

l'est aussi, puisqu'elle devient

$$\frac{y - Y}{x - X} = \frac{0}{0};$$

mais, comme on a alors $Z = 0$, les deux autres équations des axes permanens passant par le point A se réduisent à $z = 0$, en sorte que toutes les lignes menées par ce point dans le plan des xy sont des axes permanens, et qu'en général, lorsque le point donné est dans un des plans principaux, la surface conique qui comprend tous les axes permanens qui y passent se change en deux plans, dont l'un est ce plan principal et l'autre lui est perpendiculaire.

Quand on fait ainsi $n = 0$, $n' = 0$, $n'' = 1$, les valeurs

que nous venons d'obtenir pour c et c', deviennent $\frac{0}{0}$, et celle de c'' devient nulle, parce que son numérateur contient alors deux facteurs égaux à zéro, tandis que le dénominateur commun aux trois valeurs n'en contient qu'un; ce qui montre que l'axe permanent cherché doit être dans ce plan, mais que sa direction y reste arbitraire, comme nous venons de le voir.

Après nous être occupés d'un plan sécant passant par la ligne $A\,G$, il est tout naturel de considérer le plan tangent qui touche la surface conique suivant cette droite. Ce plan s'obtiendra par la condition que ses deux intersections avec la surface se réunissent, c'est-à-dire qu'on ait, dans les formules précédentes,

$$c = m,\ c' = m',\ c'' = m'';$$

on aura donc

$$\frac{m\,n}{D} = \frac{m'\,n'}{D'} = \frac{m''\,n''}{D''};$$

d'où

$$n : n' :: \frac{m'}{D'} : \frac{m}{D} :: \frac{D}{m} : \frac{D'}{m'}$$

$$n : n'' :: \frac{m''}{D''} : \frac{m}{D} :: \frac{D}{m} : \frac{D''}{m''};$$

ainsi

$$n : n' : n'' :: \frac{D}{m} : \frac{D'}{m'} : \frac{D''}{m''} :: D\,m'\,m'' : D'\,m\,m'' : D''\,m\,m',$$

d'où l'on tirera les valeurs de n, n', n'', qui feront connaître la direction du plan tangent à la surface conique le long de la ligne $A\,G$; l'équation de ce plan sera

$$\frac{m\,x}{D} + \frac{m'\,y}{D'} + \frac{m''\,z}{D''} = 0.$$

Nous avions déjà vu que toute ligne menée dans un des

plans principaux est un axe permanent; il était aisé d'en conclure que, quand le point donné A est dans un de ces plans, toutes les lignes qui y passent et sont situées dans ce plan doivent se trouver sur la surface conique que nous venons de déterminer, et qu'elle doit alors se réduire à deux plans, dont l'un est le plan principal qui passe par le point donné. C'est aussi ce qu'on peut déduire de son équation; car, en prenant ce dernier plan pour celui des $x\,y$, on a $Z = 0$, et l'équation de la surface conique devient

$$(D X y + D' Y x + D'' X Y) z = 0,$$

dont le facteur $z = 0$ représente le plan principal où se trouve le point donné, et l'autre facteur $D X y + D' Y x + D'' X Y = 0$, ne renfermant pas z, et ne contenant x et y qu'à la première puissance, représente un plan perpendiculaire au premier et qui le coupe suivant la droite dont l'équation est

$$y = -\frac{D' Y}{D X}\, x - \frac{D'' Y}{D},$$

comme nous l'avons déjà trouvé d'une autre manière.

Il est aisé de voir que tant qu'aucune des quantités $D X$, $D' Y$, $D'' Z$, ne seront nulles, l'équation

$$D X y z + D' Y x z + D'' Z x y + D Y Z x + D' X Z y + D'' X Y z = 0$$

ne pourra se décomposer en deux facteurs du premier degré, et que par conséquent aucune partie de la surface conique ne pourra devenir plane. Ce n'est donc que dans le cas où une des trois quantités $D X$, $D' Y$, $D'' Z$, devient nulle, que le point dont les coordonnées sont X, Y, Z, peut présenter cette propriété qu'on puisse y faire passer un plan où toutes les lignes menées par le point donné dans ce plan soient des axes permanens : c'est ce qui peut arriver de deux manières, ou parce qu'une des quantités X, Y, Z est nulle, alors le point donné est dans un des plans principaux, une portion des axes permanens passant par le point donné se trouve dans

ce plan et les autres sont compris dans un autre plan qui lui est perpendiculaire; ou parce que, par la nature du corps, une des trois quantités D; D', D'', est nulle. Supposons que ce soit D'': comme $D'' = \int x^2\, d\,m - \int y^2\, d\,m$, il faudra que $\int y^2\, d\,m = \int x^2\, d\,m$, et par la théorie connue des plans principaux, tout plan passant par l'axe des z sera un plan principal. La supposition $D'' = 0$ réduit l'équation de la surface conique à

$$(D\,X\,y + D'\,Y\,x)\,z + (D'\,X\,y + D\,Y\,x)\,Z = 0;$$

mais comme alors $G = H$, les deux quantités $D = H - K$ et $D' = K - G$ sont égales et de signes contraires, cette équation peut donc s'écrire ainsi,

$$(X\,y - Y\,x)\,(z - Z) = 0,$$

dont le premier facteur $X\,y - Y\,x = 0$, donnant

$$\frac{y}{x} = \frac{Y}{X},$$

représente le plan qui passe par le point donné et par l'axe des z, et qui, comme nous venons de le dire, est un plan principal. L'autre facteur $z - Z = 0$, représente un autre plan passant par le point donné et parallèle au plan des $x\,y$; il est donc perpendiculaire au plan représenté par le premier facteur, et dans ce cas, comme dans celui que nous avons d'abord examiné, les axes permanens passant par un point donné ne peuvent être compris dans deux plans qu'autant que l'un de ces deux plans est un des plans principaux et que l'autre lui est perpendiculaire, en sorte que dans aucun cas cette propriété ne peut appartenir à un point qui ne se trouve pas dans un des plans principaux, et que les axes permanens qui passent par un point donné ne peuvent se trouver compris dans des plans qu'autant que ces plans, s'ils ne sont pas des plans principaux, soient nécessairement

parallèles à un des axes principaux. Cette proposition, qui est généralement vraie quand il s'agit des axes permanens proprement dits, cesse de l'être quand on considère un plan où passent par un même point les limites d'axes permanens qui se trouvent dans ce plan. Comme nous avons vu que toutes les lignes passant par le centre d'inertie et différentes des axes principaux sont des limites d'axes permanens, et réciproquement, il s'ensuit que tout plan passant par le centre d'inertie contient une infinité de limites d'axes permanens qui se coupent toutes à ce centre, en sorte que ces limites peuvent être comprises dans un plan et passer par un même point de ce plan, sans qu'il soit un plan perpendiculaire à un des plans principaux : c'est là une première différence entre les plans où se trouvent une infinité d'axes permanens passant par un même point, et les plans qui jouissent de la même propriété relativement aux limites de ces axes; une autre différence entre ces deux sortes de plans vient de ce que les premiers, outre le système des axes permanens passant par le point donné, contiennent un second système d'axes permanens parallèles entre eux et à l'axe principal, auquel le plan l'est lui-même, puisque toute ligne parallèle à cet axe est un axe permanent, tandis que la même propriété n'a pas lieu en général pour les plans où se trouvent une infinité de limites d'axes permanens, mais seulement dans le cas particulier où ces derniers plans seraient parallèles à un axe principal.

Les plans passant par le centre d'inertie et dirigés d'une manière quelconque, contenant une infinité de limites d'axes permanens, sont, d'après nos définitions, les plans directeurs de ces limites, et leur centre de convergence est au centre d'inertie; mais ils ne doivent point être confondus avec les plans directeurs des axes permanens proprement dits, puisqu'au lieu de présenter toujours, comme ces derniers, la

propriété de contenir un second système d'axes permanens parallèles entre eux, ils ne la présentent que dans le cas particulier où ils sont perpendiculaires à un plan principal : c'est pourquoi, dans tout ce que nous allons dire des plans directeurs, nous entendrons toujours par ce mot les plans directeurs des axes permanens, et non ceux de leurs limites.

Si le point donné se trouvait sur un des axes principaux, en prenant cet axe pour celui des z, on aurait $X=0$, $Y=0$; l'équation de la surface conique deviendrait

$$D'' Z x y = 0,$$

et l'on aurait $x=0$, ou $y=0$, c'est-à-dire que les deux plans dans lesquels se change alors cette surface sont les deux plans principaux qui passent par le point donné ; ce qui est d'ailleurs évident, puisque toutes les lignes menées par un point quelconque pris dans les plans principaux sont des axes permanens.

Lorsque l'intégrale $\int x^2\, dm$ est égale à $\int y^2\, dm$, ce qui donne $D''=0$, l'équation que nous venons d'obtenir pour le cas où le point donné est sur l'axe des z, s'évanouit : ce qui indique que dans ce cas toutes les lignes menées par ce point, dans quelque direction que ce soit, sont des axes permanens; ce qu'il est d'ailleurs bien aisé de voir *à priori*.

L'équation générale

$$D X y z + D' Y x y + D'' Z x y + D Y Z x + D' X Z y + D'' Y X z = 0$$

disparaît aussi quand les trois intégrales $\int x^2\, dm$, $\int y^2\, dm$, $\int z^2\, dm$, sont égales entre elles, parce qu'alors toutes les lignes menées de quelque manière que ce soit par un point quelconque sont des axes permanens.

Enfin, si le point donné était au centre d'inertie, on aurait $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, et l'équation de la surface conique disparaîtrait encore, parce que tout plan mené par le centre d'inertie est, comme nous l'avons vu plus haut, un plan

directeur des limites des axes permanens qui se trouvent dans ce plan, et dont le centre de convergence est au centre d'inertie. Il suit de ces diverses considérations, qu'outre les plans directeurs des limites des axes permanens, on doit distinguer dans un corps quatre sortes de plans:

1.° Les plans directeurs qui le sont relativement à tous les points de leur surface, propriété qui ne peut appartenir en général qu'aux plans principaux, comme il n'y a que les axes principaux qui soient des axes permanens relativement à tous les points de leur longueur, mais qui, dans le cas où les momens d'inertie de deux axes principaux sont égaux entre eux, appartient aussi aux plans menés par un point quelconque perpendiculairement à l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres, comme il est aisé de le conclure de ce qui a été dit plus haut relativement à la forme que prend alors l'équation de la surface conique;

2.° Les plans directeurs à un seul centre de convergence, qui contiennent toujours deux systèmes d'axes permanens, l'un formé d'axes permanens passant par un point déterminé de ces plans, qui est leur centre, et l'autre, d'axes permanens parallèles entre eux et à un des axes principaux, auquel le plan directeur est nécessairement parallèle;

3.° Les plans qui, sans avoir de centre de convergence, satisfont aux mêmes conditions que ceux qui en ont, parce que le point où devait être leur centre de convergence se trouve placé à une distance infinie, en sorte que les deux systèmes d'axes permanens qu'ils contiennent se composent tous deux d'axes parallèles entre eux, et qu'on doit par conséquent considérer chacun de ces plans comme une limite dont un plan directeur peut s'approcher d'aussi près que l'on veut sans jamais l'atteindre. Il est aisé de voir que cette propriété appartient à tout plan perpendiculaire à un des axes

principaux, qui, étant à-la-fois perpendiculaire à deux plans principaux, contient un système d'axes permanens perpendiculaire à l'un d'eux, et un système d'axes de rotation perpendiculaire à l'autre. Nous verrons, quand nous aurons déterminé en général la position du centre de convergence d'un plan perpendiculaire à un des plans principaux, que ce centre ne se trouve porté à une distance infinie que dans le cas où le plan est à-la-fois perpendiculaire sur deux plans principaux, en sorte que la propriété d'être des limites de plans directeurs appartient exclusivement aux plans situés de cette manière.

Lorsque le point donné A est dans le plans des $x\,y$, en sorte que $Z=0$, le plan directeur dont il est le centre de convergence a pour équation, comme nous venons de le voir,

$$DXy+D'Yx+D''XY=0,$$

d'où il suit que son intersection avec le plan des $x\,y$, qui est représentée par la même équation, forme avec l'axe des x un angle dont la tangente est $-\frac{D'Y}{DX}$. Cette valeur ne varie pas quand on place successivement le point donné à différens points d'une ligne située dans le plan des $y\,x$ et passant par le centre d'inertie; d'où il suit que tous les plans directeurs dont les centres de convergence se trouvent sur une telle ligne sont parallèles entre eux, et réciproquement, que tous les centres de convergence d'un système de plans directeurs parallèles entre eux sont placés sur une même droite passant par le centre d'inertie. Nous pourrons appeler cette ligne *axe des centres de convergence*, ou, pour abréger, *axe de convergence*; et chaque axe de convergence, correspondant à un système de plans directeurs parallèles entre eux, formera avec ces plans un angle qui sera la différence de deux autres dont les tangentes ont respectivement

pour valeur $\frac{Y}{X}$ et $-\frac{D' Y}{D X}$; d'où il suit que la tangente de cet angle est

$$\frac{D X Y + D' X Y}{D X^2 - D' Y^2} = \frac{D'' X Y}{D' Y^2 - D X^2}.$$

Pour que cet angle soit droit, il faut que

$$D' Y^2 - D X^2 = 0,$$

et qu'ainsi

$$\frac{Y}{X} = \pm \sqrt{\frac{D}{D'}} = \pm \sqrt{\frac{H-K}{K-G}}$$

Cette valeur ne peut être réelle qu'autant que $K = \int z^2\, dm$ est compris entre $G = \int x^2\, dm$ et $H = \int y^2\, dm$, c'est-à-dire qu'autant que le plan qu'on a choisi pour celui des $x\,y$, et où se trouve l'axe du centre de convergence, est celui des trois plans principaux dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie relatifs aux deux autres plans principaux. Ce n'est donc que dans ce plan, celui des trois plans principaux qui passe par les deux axes principaux dont l'un a le plus grand et l'autre le plus petit moment d'inertie, que l'on peut trouver deux lignes, déterminées par la double valeur de $\frac{Y}{X}$, qui soient des axes de centres de convergence perpendiculaires aux plans directeurs dont tous les centres de convergence se trouvent sur ces lignes. Il ne peut donc, en général, exister dans un corps que deux systèmes de plans directeurs parallèles, tels que le centre de convergence soit, pour chacun de ces plans, au point où il est rencontré par la perpendiculaire abaissée du centre d'inertie du corps sur ce plan. Les plans de ces deux systèmes sont évidemment parallèles à l'axe principal dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie des deux autres axes principaux.

Dans le cas particulier où deux des trois axes principaux ont le même moment d'inertie, il faut, pour que

$$\frac{Y}{X} = \pm \sqrt{\frac{H-K}{K-G}}$$

soit réelle, que l'axe des z soit un de ceux dont les momens d'inertie sont égaux. Si l'autre est pris pour l'axe des x, les momens d'inertie de ces deux axes étant représentés respectivement par $G+H$ et par $H+K$, on aura

$$G=K \text{ et } \frac{Y}{X} = \frac{1}{0},$$

d'où il suit que les deux lignes dont nous venons de parler se réunissent dans l'axe des y. Si l'on prenait, au contraire, cet autre axe pour celui des y, on aurait

$$H=K \text{ et } \frac{Y}{X} = 0;$$

ce serait donc sur l'axe des x que se réuniraient ces deux lignes : ce qui n'est qu'une autre manière d'arriver au même résultat, savoir, que dans ce cas les deux lignes se confondent entre elles et avec l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres. Il n'y a donc plus alors qu'un seul système de plans directeurs parallèles dont les centres de convergence soient aux points où ils rencontrent une perpendiculaire commune passant par le centre d'inertie, et ces plans sont alors tous perpendiculaires à l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal à ceux des deux autres axes principaux.

4.° La quatrième espèce de plans comprend tous ceux qui ne satisfont à aucune des conditions auxquelles sont assujettis les autres.

CHAPITRE II.

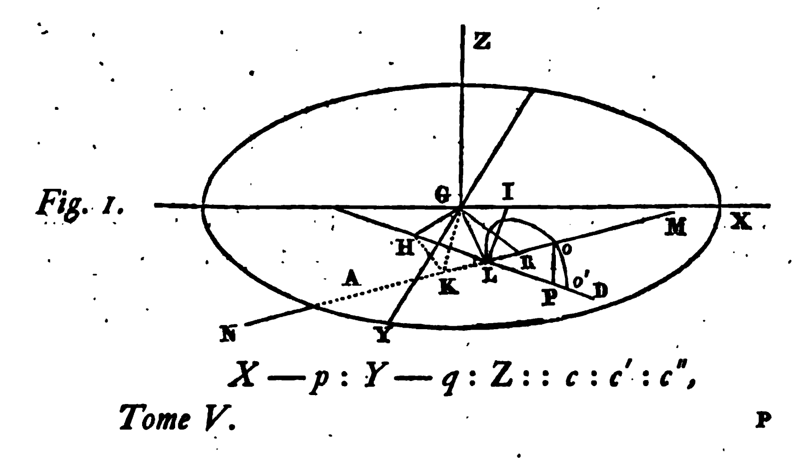
Formules pour reconnaître si une ligne donnée est un axe permanent, et pour déterminer dans ce cas le centre de rotation de cet axe et son moment d'inertie.

QUAND une ligne NM *(fig. 1)* est donnée et qu'on veut savoir si elle est un axe permanent, on pourrait le faire d'après les résultats obtenus dans le paragraphe précédent, en prenant à volonté un point A sur cette ligne et en voyant si l'équation

$$c'c''DX + cc''D'Y + cc'D''Z = 0$$

est satisfaite. Mais, comme alors la condition exprimée par cette équation doit être indépendante de la position arbitraire où l'on place le point A sur NM, il faut considérer X, Y, Z comme les coordonnées d'un point quelconque de cette ligne et les éliminer de l'équation que nous venons de trouver. Soit L le point où la ligne donnée NAM rencontre le plan des xy; nommons p et q les coordonnées de ce point rapportées aux axes principaux GX, GY; α l'angle que forme sa projection LD sur ce plan avec l'axe des x, et β l'angle dont le cosinus est c'', et qui est le complément de l'angle DLM : on aura

Fig. 1.



$$X - p : Y - q : Z :: c : c' : c'',$$

d'où

$$X = p + \frac{cZ}{c''},$$

$$Y = q + \frac{c'Z}{c''}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans l'équation

$$c'c''DX + cc''D'Y + cc'D''Z = o,$$

et qu'on se rappelle que

$$D + D' + D'' = o,$$

on verra qu'elle se réduit à

$$c'c''Dp + cc''D'q = o,$$

ou

$$\frac{c'}{c} = -\frac{D'q}{Dp};$$

mais, par les formules connues de la trigonométrie sphérique, on a $c = \cos\alpha \sin\beta$, $c' = \sin\alpha \sin\beta$, et par conséquent

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{c'}{c} = -\frac{D'q}{Dp}.$$

Cette valeur de tang α fait connaître la direction que doit avoir la projection d'une ligne qui rencontre le plan des $x\,y$ en un point dont les coordonnées sont p et q, pour qu'elle soit un axe permanent; et comme la valeur de tang α est indépendante de l'angle β, c'est-à-dire de l'inclinaison de la ligne donnée sur les plans des $x\,y$, tous les axes permanens qui passent par le point de ce plan dont p et q sont les coordonnées, seront tous compris dans le plan parallèle à l'axe des z, dont l'intersection avec celui des $x\,y$ est la projection dont nous venons de déterminer la direction; ce qui s'accorde avec ce qui a été dit des propriétés des plans de convergence dans le chapitre précédent.

Ainsi, pour savoir si une ligne donnée est un axe permanent, il faut déterminer le point où elle rencontre un des plans principaux et la direction de sa projection sur ce plan, et voir si l'angle α qui se trouve déterminé par cette direction, ainsi que les coordonnées p et q du point de rencontre, satisfont à l'équation de condition que nous venons d'obtenir. Quand on aura ainsi reconnu qu'une ligne est un axe de rotation, et qu'on voudra déterminer son centre de rotation, on se rappellera que la distance AO de ce centre au point A, que nous avons désignée par r, est égale à

$$Z' + \frac{acG + a'c'H + a''c''K}{MX'};$$

et comme $a'c' = -ac - a''c''$, cette valeur devient

$$AO = Z' + \frac{ac(G-H) + a''c''(K-H)}{MX'} = Z' + \frac{acD'' - a''c''D}{MX'};$$

mais, à cause des deux équations

$$c'c''DX + cc''D'Y + cc'D''Z = 0$$

et

$$D' = -D - D'',$$

on a

$$c''D(c'X - cY) + cD''(c'Z - c''Y) = 0$$

ou

$$c''D = -\frac{c'Z - c''Y}{c'X - cY}cD'',$$

ce qui donne

$$acD'' - a''c''D = cD''\left(a + a''\frac{c'Z - c''Y}{c'X - cY}\right)$$

$$= \frac{cD''(ac'X - acY - a''c''Y + a''c'Z)}{c'X - cY}$$

$$= \frac{cc'D''(aX + a'Y + a''Z)}{c'X - cY} = \frac{cc'D''X'}{cY - c'X};$$

la valeur de AO se réduit donc à

$$AO = Z' + \frac{cc'D''}{M(cY - c'X)},$$

et, en y substituant à X et à Y les valeurs

$$X = p + \frac{cZ}{c''},$$

$$Y = q + \frac{c'Z}{c''},$$

elle devient

$$AO = Z' + \frac{cc'D''}{M(cq - c'p)}.$$

Si l'on abaisse du centre d'inertie la perpendiculaire GK sur la ligne donnée AM, la distance AK sera celle que nous avons désignée par Z', et par conséquent

$$KO = AO - AK = \frac{cc'D''}{M(cq - c'p)};$$

mais nous avons vu qu'on a

$$c = \cos\alpha \sin\beta = \frac{Dp \sin\beta}{\sqrt{D^2p^2 + D'^2q^2}}$$

$$c' = \sin\alpha \sin\beta = -\frac{D'q \sin\beta}{\sqrt{D^2p^2 + D'^2q^2}},$$

on tire de ces valeurs

$$cc' = -\frac{DD'pq \sin^2\beta}{D^2p^2 + D'^2q^2}$$

et

$$cq - c'p = \frac{Dpq \sin\beta + D'pq \sin\beta}{\sqrt{Dp^2 + D'^2q^2}} = -\frac{D''pq \sin\beta}{\sqrt{D^2p^2 + D'^2q^2}}$$

ainsi

$$KO = \frac{DD' \sin\beta}{M\sqrt{D^2p^2 + D'^2q^2}}.$$

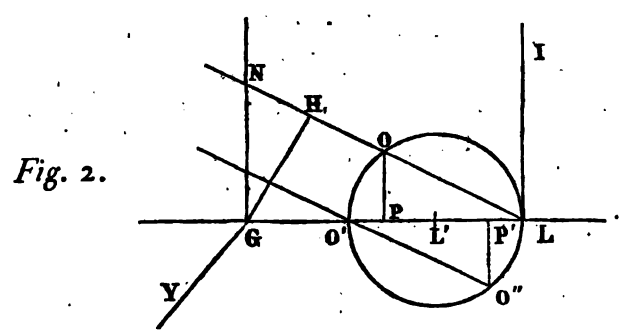


Fig. 2.

Avant de tirer de cette valeur de $K\,O$ les conséquences qui en résultent relativement à un axe permanent quelconque, supposons que cet axe vienne se placer en $L\,N$ (*fig.* 2), dans un des plans principaux que nous prendrons pour celui des $x\,z$, alors la perpendiculaire $G\,K$ tombe en $G\,H$, la valeur de $K\,O$ devient celle de $H\,O$, et le point L où l'axe permanent $N\,O\,L$ rencontre le plan des $x\,y$ est sur l'axe des x; on a donc $p = G\,L$, $q = 0$, et $\beta = H\,L\,I$, $L\,I$ étant parallèle à l'axe $G\,N$ des z, la valeur de $H\,O$ devient, à cause de $q = 0$,

$$H\,O = \frac{D'}{Mp} \sin \beta;$$

et comme on a

$$H\,L = G\,L \sin \beta = p \sin \beta,$$

il s'ensuit que

$$H\,L : H\,O :: p^2 : \frac{D'}{M},$$

rapport constant pour tous les axes permanens situés dans le plan des $x\,z$, qui passent par le point L, D' dans cette équation est la différence $A - C$ des momens d'inertie relatifs aux axes principaux $G\,L$, $G\,N$, par lesquels passe le plan principal où se trouve l'axe permanent $N\,L$. Quand le moment d'inertie A de l'axe principal sur lequel se trouve le point L est plus grand que celui de l'autre axe principal compris dans le même plan, D' est positif; et comme Mp^2 ne

peut être négatif, HO et HL sont de même signe, en sorte que les deux points O et L sont du même côté du point H; les distances HO et HL se trouvent donc alors dans le prolongement l'une de l'autre: lorsqu'au contraire A est plus petit que C, D' devient négatif, et HO, HL sont de signes contraires; le point H est situé dans ce cas entre O et L.

Ainsi, après avoir déterminé la longueur de HO, il faudra toujours la porter du côté du point H où LN rencontre l'axe principal dont le moment est le plus grand.

En raisonnant pour le point N, où LN rencontre l'axe des z, comme nous venons de le faire pour le point L, et en nommant p' la distance GN et β' le complément OLG de l'angle ONG, on trouverait

$$HO = \frac{(C-A)\sin\beta'}{Mp'},$$

comme on a trouvé

$$HO = \frac{(A-C)\sin\beta}{Mp}.$$

La première de ces valeurs se présente sous une forme négative, parce que le point H est situé entre N et O; mais la valeur absolue qui en résulte pour HO est la même dans les deux cas, parce que

$$\sin\beta' : p' :: \sin\beta : p.$$

Si l'on nomme h la perpendiculaire HG, on aura $p = \frac{h}{\cos\beta}$, et par conséquent

$$HO = \frac{(A-C)\sin\beta\cos\beta}{Mh} = \frac{(A-C)\sin 2\beta}{2Mh}.$$

La distance LO a pour valeur

$$LO = \left(p - \frac{D'}{Mp}\right)\sin\beta :$$

elle est donc aussi dans un rapport constant, pour un même point L, avec HL ou HO, et elle est, comme ces deux lignes, proportionnelle à $\sin\beta$.

Pour avoir l'équation de la courbe sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point L, on fera $LP = \xi$, $PO = \zeta$, et l'on aura

$$LO = \sqrt{\zeta^2 + \xi^2},$$

$$\sin\beta = \frac{\xi}{\sqrt{\zeta^2 + \xi^2}},$$

en sorte que l'équation précédente deviendra

$$\zeta^2 + \xi^2 = \left(p - \frac{D'}{Mp}\right)\xi,$$

équation d'une circonférence décrite sur $LO' = p - \frac{D'}{Mp}$ comme diamètre. C'est sur cette circonférence que se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point L et situés dans le plan principal NGL. Toutes les lignes passant par le point O' dans le même plan, ont aussi leurs centres de rotation sur la même circonférence, parce qu'en faisant $GO' = r$, r étant plus petit que $\sqrt{\frac{D'}{M}}$, ce qui fait changer le signe de LO quand cette distance devient $O'O''$, on a

$$O'O'' = \left(\frac{D'}{Mr} - r\right)\sin\beta\,;$$

mais

$$r = p - LO' = \frac{D'}{Mp}, \text{ d'où } \frac{D'}{Mr} = p:$$

la valeur de $O'O''$ est donc

$$O'O'' = \left(p - \frac{D'}{Mp}\right)\sin\beta;$$

ce qui donne, lorsqu'on fait $O'P' = \xi$, et $O''P' = \zeta$, la même équation en ξ et ζ que quand L était l'origine de ξ.

Quand le point L, où l'axe permanent situé dans le plan principal LGN rencontre l'axe principal GL, dont le

moment d'inertie surpasse celui de l'autre axe principal GN situé dans le même plan, tombe en L' à une distance du centre d'inertie $GL' = \sqrt{\frac{D'}{M}}$, on a $\frac{D'}{Mp} = p$, et la valeur de LO devient nulle, quelle que soit celle de l'angle β, en sorte que tous les axes permanens situés dans le plan NGL et passant par le point L' ont alors leur centre de rotation à ce point.

Tant que les trois momens d'inertie des axes principaux sont inégaux, il est clair qu'il ne peut y avoir sur chaque plan principal que deux points, un de chaque côté du centre d'inertie, qui présentent cette propriété relativement aux axes permanens menés dans ces plans, et qu'il y en a toujours deux qui sont situés sur celui des deux axes principaux qui s'y trouvent, dont le moment d'inertie est le plus grand, à une distance du centre d'inertie du corps égale à la racine carrée de la différence des momens d'inertie de ces deux axes, divisée par la masse du corps.

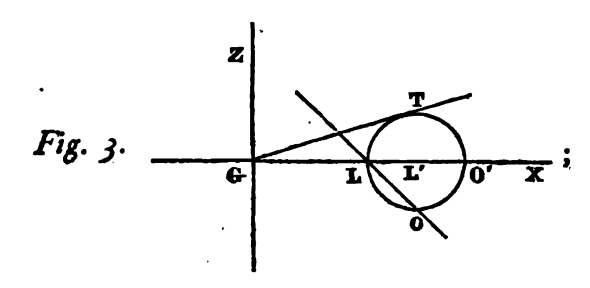
Il suit de là que quand ces deux momens d'inertie sont égaux entre eux, les deux points dont nous parlons, relatifs au plan principal passant par ces deux axes, se réunissent au centre d'inertie, et qu'il ne peut y en avoir deux autres sur le troisième axe principal que quand son moment d'inertie est plus grand que celui des deux autres. On sait que MM. Poisson et Binet ont démontré que, dans ce dernier cas, toutes les lignes qui y passent sont des axes principaux qui y ont tous leur centre de rotation, et que c'est le seul cas où un point pris dans un corps dont les trois momens d'inertie relatifs aux axes principaux ne sont pas égaux entre eux, puisse présenter cette propriété relativement à toutes les droites qui y passent. Lorsque les trois momens d'inertie sont inégaux, on a au contraire toujours six points situés sur les axes principaux qui présentent la même propriété; mais seulement à l'égard des droites com-

prises dans les plans principaux; l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand en présente quatre, deux pour chacun des plans principaux dont il est l'intersection; et celui dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les deux autres, en présente deux pour le plan principal qui le joint à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit.

Lorsqu'une ligne est donnée sur un des plans principaux, on trouvera ainsi son centre de rotation : après l'avoir prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre en L (*fig. 3*) celui des deux axes principaux situés dans ce plan dont le moment d'inertie est le plus grand, déterminez le point L' de manière que $GL' = \sqrt{\frac{D'}{M}}$, et faites la proportion

$$GL : GL' :: GL' : GO'$$

Fig. 3.



puis sur le diamètre $L\,O'$ décrivez la circonférence $L\,O\,O'$ qui coupera la ligne donnée au point cherché O. De plus, si $G\,T$ est la tangente menée du point G à cette circonférence, on aura $G\,T = \sqrt{GL \times GO'} = GL'$.

Réciproquement, si le point O est donné dans un plan principal et qu'on demande les directions des deux axes permanens menés dans ce plan de manière que leurs centres de rotation soient en O (*fig. 4*), on tirera $G\,O$ et on fera la proportion

$$GO : GL' :: GL' : GS,$$

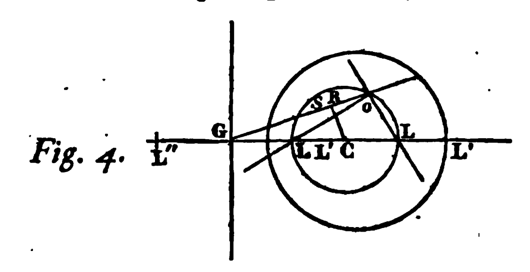


Fig. 4.

ce qui déterminera un second point S de la circonférence $L\,O\,L$, en sorte qu'en élevant sur le milieu R de $O\,S$ la perpendiculaire $R\,C$, elle coupera l'axe principal $G\,L$ au centre C de cette circonférence, et en la décrivant on aura par ses intersections avec $G\,L$ les points L, L, auxquels on tirera les lignes $O\,L$, $O\,L$, qui seront les axes permanens cherchés. Le troisième axe permanent relatif au point O sera la perpendiculaire élevée par ce point au plan principal.

Si l'on considère le point N (*fig. 5*) où le même axe permanent $O\,L$ rencontre celui des deux axes principaux du plan $N\,G\,L$ des $x\,z$ qui a le plus petit moment d'inertie, et que nous avons pris pour l'axe des z, on trouvera, d'après ce que nous avons vu, qu'en faisant $G\,N = p'$ et le complément de l'angle $G\,N\,O = \beta'$, on a

$$H\,O = \frac{(C - A)\sin\beta'}{M\,p'},$$

valeur toujours négative quand A, comme nous le supposons ici, est plus grand que C, en sorte que la valeur absolue de cette ligne sera

$$\frac{(A - C)\sin\beta'}{M\,p'} = \frac{D'\sin\beta'}{M\,p'};$$

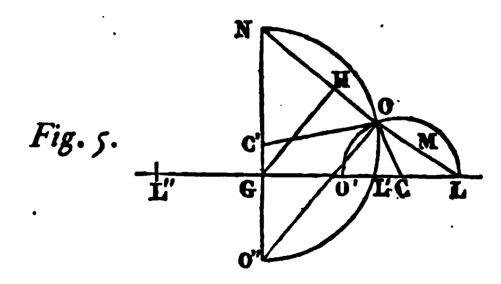
et comme $N\,H = p'\sin\beta'$, il s'ensuivra que

$$N\,O = \left(p' + \frac{D'}{M\,p'}\right)\sin\beta'.$$

La courbe menée par tous les centres de rotation des axes

permanens passant par le point N dans le plan $N\,G\,L$, sera donc encore une circonférence dont le diamètre $N\,O'' = p' + \frac{D'}{M\,p'}$, en sorte que $G\,O'' = N\,O'' - N\,G = \frac{D'}{M\,p'}$; l'ordonnée de cette circonférence au point G, qui est égale à $\sqrt{G\,N \times G\,O''}$, aura donc pour valeur $\sqrt{\frac{D'}{M}}$, et sera égale à $G\,L'$, d'où il suit que la circonférence $N\,O\,O''$ passera tou-

Fig. 5.



jours par le point L': ce qui rend plus simple la résolution des deux problèmes précédens; car, si l'on veut déterminer le point O quand la ligne $N\,M$ est donnée, il suffit de prolonger celle-ci jusqu'à ce qu'elle rencontre en N l'axe principal dont le moment est le plus petit, et de décrire la circonférence qui, passant par les deux points N et L', a son centre sur $G\,N$, elle coupera $N\,M$ au point cherché O.

Si au contraire le point O est donné et qu'on veuille avoir la direction des deux axes permanens compris dans le plan $N\,G\,L$, qui ont leur centre de rotation en O, on décrira le même cercle par les points O et L'. Ce cercle coupera $G\,N$ aux points N et O'', tels qu'en tirant $O\,N$ et $O\,O''$ ce seront les deux axes permanens cherchés. Si l'on mène du point O aux centres C et C' des circonférences $L\,O\,O'$, $N\,O\,O''$, les rayons $C\,O$, $C'\,O$, on aura $G\,C\,O = 2\,G\,L\,O$, $G'\,C\,O = 2\,G\,N\,O$; ainsi $G\,C\,O + G\,C'\,O = 2\,(G\,L\,O + G\,N\,O) =$ deux angles droits; et comme l'angle $C\,G\,C'$ est droit, il

restera dans le quadrilatère $G\,C\,O\,C'$ un angle droit pour la valeur de $C\,O\,C'$: ainsi toutes les circonférences telles que $L\,O\,O'$ (*fig. 6*) couperont à

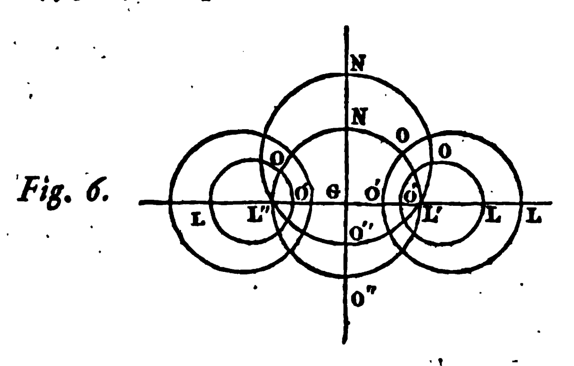


Fig. 6.

angles droits toutes les circonférences $N\,O\,O''$; il est d'ailleurs aisé de voir que, si l'on projette stéréographiquement sur le plan $L\,L''\,N$ tous les parallèles et tous les méridiens d'une sphère dont les pôles seraient situés en L' et en L'', les projections des premiers seront les circonférences $L\,O\,O'$, et les projections des seconds, les circonférences $N\,O\,O''$.

Reprenons le cas général d'un axe permanent $L\,M$, situé hors des plans principaux : soit L (*fig. 1*) le point où il rencontre celui de ces plans qu'on a choisi pour le plan des $x\,y$; soient p, q, les coordonnées de ce point relatives à l'axe des x et à celui des y, en sorte qu'on ait à ce point $x = p$, $y = q$, $z = 0$, on en conclura

$$A\,L = Z' + c\,p + c'\,q = Z' + \frac{D\,p^2 - D'\,q^2}{\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}} \sin\beta,$$

et

$$K\,L = A\,L - A\,K = \frac{D\,p^2 - D'\,q^2}{\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}}, \sin\beta;$$

d'où il suit que

$$K\,L : K\,O :: D\,p^2 - D'\,q^2 : \frac{D\,D'}{M}.$$

Si l'on décrit sur le plan des $x\,y$, des sections coniques dont les équations soient de la forme

$$D\,p^2 - D'\,q^2 = E,$$

E étant une quantité quelconque, la tangente de l'angle que la normale à un des points L d'une de ces courbes dont les coordonnées sont représentées en général par p et q, forme avec l'axe des x, sera

$$-\frac{dp}{dq} = \frac{D'q}{Dp} = \operatorname{tang}\beta,$$

d'où il suit que la projection $L\,D$ de la ligne donnée sur le plan des $x\,y$ se confondra avec cette normale, et le plan directeur qui contient tous les axes permanens passant par le point L sans se trouver dans le plan $X\,G\,Y$, sera le plan normal à cette courbe.

On aura de plus

$$KL : KO :: E : \frac{DD'}{M};$$

d'où il suit que le rapport des deux distances $K\,L$, $K\,O$, sera constant pour les axes permanens de tous les plans directeurs normaux à une même courbe; ce qui donne une construction très-simple de la distance $K\,O$ qui détermine le point O. La distance $L\,O = K\,O - K\,L$ aura pour valeur

$$\frac{\frac{DD'}{M} + D'\,q^2 - D\,p^2}{\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}} \sin\beta$$

ou

$$\frac{\frac{DD'}{M} - E}{\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}} \sin\beta$$

et sera aussi en rapport constant pour les mêmes axes permanens soit avec $K\,L$, soit avec $K\,O$.

Si l'on fait dans ces formules $\beta = \frac{\pi}{2}$, la ligne $L\,M$

deviendra l'intersection $L\,D$ du plan directeur et de celui des $x\,y$, qui, comme nous l'avons dit, est toujours un axe permanent. On aura, en supposant que O' est son centre de rotation, et H le point où elle rencontre la perpendiculaire $G\,H$ abaissée du centre d'inertie sur cette intersection,

$$H\,O' = \frac{D\,D'}{M\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}},$$

$$H\,L = \frac{E}{\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}}$$

$$H\,L : H'\,O :: E : \frac{D\,D'}{M},$$

$$L\,O' = \frac{\frac{D\,D'}{M} - E}{\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}}.$$

En comparant cette valeur de $L\,O'$ avec celle de $L\,O$, on voit que

$$L\,O = L\,O' \sin\beta;$$

d'où il suit que les distances du centre de convergence L aux centres de rotation de tous les axes permanens qui passent par ce centre, sont proportionnelles au sinus de l'angle β compris entre les directions de ces axes et la perpendiculaire élevée au point L sur le plan des $x\,y$.

En faisant $L\,P = \xi$, $P\,O = \zeta$, on démontrera, comme on l'a fait lorsque l'axe permanent donné était dans un plan principal, que l'on a

$$\zeta^2 + \xi^2 = L\,O' \times \xi$$

qui est l'équation d'une circonférence $L\,O\,O'$, dont le diamètre est

$$L\,O' = \frac{\frac{D\,D'}{M} - D\,p^2 + D'\,q^2}{\sqrt{D^2\,p^2 + D'^2\,q^2}}.$$

Ainsi tous les centres de rotation des axes permanens qui, passant par un même point, se trouvent dans un même plan

directeur quelconque, sont toujours situés sur une circonférence, comme dans le cas où ce plan est un des plans principaux.

Nous avons considéré les sections coniques tracées sur le plan des $x\,y$ et ayant pour équation $Dp^2 - D'q^2 = E$; toutes les courbes ainsi décrites sur les trois plans principaux détermineront, à chaque point du plan principal où elles sont tracées, la situation du plan directeur dont le centre de convergence est à ce point. Ces courbes sont des sections coniques semblables, puisque le rapport des coefficiens D et D' est le même pour toutes. Les courbes sont des hyperboles quand

$$D = \int y^2\,dm - \int z^2\,dm,\ \text{et}\ D' = \int z^2\,dm - \int x^2\,dm,$$

sont de même signe, c'est-à-dire quand le moment d'inertie $\int z^2\,dm$, relatif au plan principal que l'on considère, est intermédiaire entre les momens d'inertie relatifs aux deux autres plans principaux, c'est-à-dire lorsque c'est le plan principal qui passe par les deux axes principaux dont les momens d'inertie sont, l'un le plus grand et l'autre le plus petit des trois momens d'inertie relatifs aux axes principaux, tandis que ce sont des ellipses sur les deux autres plans principaux.

Nous avons vu, à la fin du chapitre précédent, que ce plan contient les deux seuls axes de convergence qui sont perpendiculaires aux plans directeurs dont les centres de convergence se trouvent sur ces lignes, et que les tangentes des angles que ces axes de convergence font avec l'axe des x sont représentées par $\pm\sqrt{\frac{D}{D'}}$; mais les asymptotes des hyperboles dont l'équation est $Dp^2 - D'q^2 = E$, forment aussi avec l'axe des x des angles dont les tangentes sont égales à $\pm\sqrt{\frac{D}{D'}}$; ce sont donc les axes de convergence dont nous venons de parler qui sont les asymptotes communes de toutes ces hyperboles.

Suivant que les valeurs qu'on donnera à E seront positives ou négatives, les hyperboles se trouveront dans deux des quatre angles que forment leurs communes asymptotes ou dans les deux autres. Ces angles se distinguent parce que deux d'entre eux sont divisés en deux parties égales par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand, et que les deux autres le sont par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit.

Comme c'est en prenant le premier de ces deux axes pour l'axe des x ou des p, et le second pour l'axe des y ou des q, qu'on a $A > C > B$, et par conséquent $G < K < H$, ce qui donne D et D' positifs, il est clair qu'une hyperbole représentée par l'équation $D p^2 - D' q^2 = \pm E$, aura tous ses points dans les deux angles opposés au sommet qui sont divisés en deux parties par l'axe dont le moment d'inertie est le plus grand quand q^2 sera plus petit que $\frac{D p^2}{D'}$ et qu'ainsi E sera positif; tandis que ces points tomberont dans les deux angles opposés au sommet, formés par les mêmes asymptotes et divisés en deux parties égales par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit, quand q^2 sera plus grand que $\frac{D p^2}{D'}$ et que E sera par conséquent négatif. Je désignerai toutes les hyperboles comprises dans les deux premiers angles sous le nom de *premières hyperboles*, et celles qui sont comprises dans les deux derniers, sous le nom de *secondes hyperboles*. Quant à la forme des mêmes courbes sur les deux autres plans principaux, si nous prenons d'abord pour plan des x y le plan principal dont le moment d'inertie est le plus grand, K sera plus grand que H et que G, d'où il suit que $D = H - K$ sera négatif, et $D' = K - G$, positif; l'équation $D p^2 - D' q^2 = \pm E$ deviendra donc, en changeant les signes,

$$(K-H)p^2+(K-G)q^2+E=0,$$

et il faudra prendre pour E une quantité négative arbitraire pour que cette équation soit possible. Comme les coefficiens de p^2 et de q^2 y sont affectés du même signe, elle représentera toujours une ellipse, et l'on aura dans ce plan une infinité d'ellipses que je désignerai sous le nom de *premières ellipses*. Au contraire, quand on prendra pour plan des $x\,y$ le plan principal dont le moment d'inertie est le plus petit, D sera positif, D' négatif; et l'équation entre p et q devant alors s'écrire ainsi

$$(H-K)p^2+(G-K)q^2-E=0,$$

on voit qu'il faudra donner à E une valeur positive arbitraire. On aura ainsi dans ce plan un système d'ellipses que je distinguerai de celles qui se trouvent sur l'autre plan principal, en les nommant *secondes ellipses*.

Lorsque deux des trois momens d'inertie sont égaux entre eux, il y a une infinité de plans principaux passant par l'axe principal dont le moment n'est pas égal à ceux des deux autres, et un plan principal qui lui est élevé perpendiculairement par le centre d'inertie : si l'on prend un des premiers plans pour celui des $x\,y$, et l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres, pour l'axe des x, on aura $H=K$ et $D=0$, en sorte que l'équation entre p et q deviendra

$$q=\pm\sqrt{\frac{E}{G-K}},$$

valeur constante arbitraire qui montre que les courbes que nous considérons se changent en des lignes droites parallèles à l'axe des x, et que tous les plans directeurs correspondans sont perpendiculaires à l'axe principal dont le moment d'inertie n'est pas égal aux deux autres; et leurs centres de convergence, au lieu d'être déterminés, sont placés indifféremment à tous les points de leurs surfaces, comme on l'a déjà vu

dans le premier chapitre de ce Mémoire. En prenant au contraire pour plan des $x\,y$ le plan principal perpendiculaire au même axe, on a $G = H$ et $D'' = 0$, d'où $D' = -D$; l'équation entre p et q devient donc

$$p^2 + q^2 - \frac{D}{E} = 0,$$

équation d'une circonférence décrite dans ce plan avec un rayon arbitraire, et dont le centre est au centre d'inertie. Tous les plans perpendiculaires à cette circonférence sont les plans principaux qui, en nombre infini, passent par l'axe principal dont le moment d'inertie diffère des deux autres. Il n'y a donc dans ce cas d'autres plans directeurs différens des plans principaux, que ceux que nous avons trouvés d'abord; et qui sont perpendiculaires à cet axe.

Quand le point L est sur celui des trois plans principaux dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie des deux autres, et que ce point se trouve sur les axes de convergence qui sont les asymptotes de toutes les hyperboles dont les plans normaux sont des plans de convergence, on a à-la-fois $E = 0$ et $LH = 0$; ce qui met la valeur de $H\,O = L\,O$, déterminée par les calculs précédens sous la forme $\frac{0}{0}$: mais on peut alors trouver directement cette valeur de $H\,O$ comme il suit. Dans le cas que nous considérons, on a

$$D p^2 - D' q^2 = 0,$$

d'où

$$q^2 = \frac{D p^2}{D'},$$

et en nommant s la distance $G\,L = \sqrt{p^2 + q^2}$, on a

$$s^2 = p^2 \left(1 + \frac{D}{D'}\right),$$

d'où

$$p^2 = \frac{D'}{D+D'}\, s^2,$$

$$q^2 = \frac{D}{D+D'}\, s^2,$$

$$D^2\, p^2 + D'^2\, q^2 = \frac{D^2 D' + D D'^2}{D+D'}\, s^2 = D D'\, s^2,$$

et par conséquent

$$L O = H O = \frac{D D' \sin \beta}{M \sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}} = \frac{\sqrt{D D'}}{M s} \sin \beta,$$

valeur très-simple qui, dans ce cas, détermine immédiatement le point O, et donne, pour le diamètre de la circonférence sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant en L,

$$L O' = \frac{\sqrt{D D'}}{M s} = \frac{\sqrt{D D'}}{M \times G L}.$$

Quant au plan directeur où est tracée cette circonférence, il suit de ce qui a été dit à la fin du premier chapitre de ce Mémoire, qu'il est perpendiculaire à la ligne $G L$; c'est ce qui résulte aussi de ce que $\frac{q}{p} = \pm \sqrt{\frac{D}{D'}}$ donne

$$\text{tang}\, \alpha = - \frac{D' q}{D p} = \mp \sqrt{\frac{D'}{D}} = - \frac{p}{q}.$$

Cherchons maintenant la valeur du moment d'inertie relatif à l'axe permanent $A M$ passant par le point L, ce moment d'inertie sera représenté par

$$\int (x'^2 + y'^2)\, d m;$$

et au moyen des valeurs de x' et de y', on trouvera par les réductions connues qu'il est égal à

$$M (X'^2 + Y'^2) + (a^2 + b^2)\, G + (a'^2 + b'^2)\, H + (a''^2 + b''^2)\, K,$$

où $X'^2 + Y'^2$ est le carré de la perpendiculaire $G K$ abaissée du centre d'inertie sur cet axe. Comme on a

$$a^2+b^2=1-c^2,$$
$$a'^2+b'^2=1-c'^2,$$
$$a''^2+b''^2=1-c''^2=c^2+c'^2,$$

cette valeur peut s'écrire ainsi :

$$M(X'^2+Y'^2)+G+H+c^2(K-G)+c'^2(K-H)$$

ou

$$C+M\times\overline{GH}^2+c^2D'-c'^2D,$$

en représentant toujours par C le moment d'inertie $G+H$ relatif à l'axe principal parallèle au plan directeur où se trouve l'axe permanent AM.

Au moyen des valeurs de c et de c' en fonction de p et de q, on a

$$c^2D'-c'^2D=\frac{D^2D'p^2-DD'^2q^2}{D^2p^2+D'^2q^2}\sin^2\beta$$
$$=\frac{DD'(Dp^2-D'q^2)}{D^2p^2+D'^2q^2}\sin^2\beta=M\times KO\times KL,$$

en sorte que le moment d'inertie de l'axe AM est égal à

$$C+M(\overline{GK}^2+KL\times KO),$$

lorsque le point K est hors de la circonférence LOO', afin que KL et KO aient le même signe. Alors, si l'on mène par le point K une tangente à cette circonférence ; qu'on porte la longueur de cette tangente de K en R sur KL et qu'on joigne les points G et R par la ligne GR, on a

$$\overline{GR}^2=\overline{GK}^2+\overline{KR}^2=\overline{GK}^2+KL\times KO,$$

et le moment d'inertie cherché est

$$C+M\times\overline{GR}^2.$$

Ce cas a lieu quand KL et KO ou E et $\frac{DD'}{M}$, qui leur sont proportionnelles, sont de même signe, c'est-à-dire, 1.° quand

on prend pour le plan des $x\,y$ celui dont le moment d'inertie est le plus grand, et que le plan directeur est parallèle à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit, puisque nous avons vu qu'alors les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux, étaient les premières ellipses pour lesquelles E et $\frac{DD'}{M}$ sont tous deux négatifs; 2.° quand on prend pour le plan des $x\,y$ celui dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie des deux autres, et que le point L tombe dans l'un des deux angles opposés au sommet qui sont divisés en deux parties égales par l'axe dont le moment d'inertie est le plus grand, puisque, d'après ce que nous avons vu, les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux sont alors les premières hyperboles pour lesquelles E et $\frac{DD'}{M}$ sont positifs.

Mais, quand E et $\frac{DD'}{M}$ sont de signes contraires, les valeurs de $K\,L$ et de $K\,O$ le sont aussi, en sorte que le point K tombe entre les points L et O dans le cercle dont la circonférence est $L\,O\,O'$; et le terme du moment d'inertie de l'axe permanent $A\,M$ que nous avons remplacé par $M \times K\,O \times K\,L$, étant négatif, il faut, en prenant $K\,O$ et $K\,L$, indépendamment de leurs signes, écrire pour la valeur de ce moment d'inertie

$$C + M\,(\overline{G\,K}^2 - K\,L \times K\,O),$$

dont la construction, moins simple que dans le cas précédent, s'obtient par les moyens connus, en ayant soin de la modifier suivant que $\overline{G\,K}^2$ est plus grand ou plus petit que $K\,L \times K\,O$.

Ce cas a lieu,

1.° Quand on prend pour le plan des $x\,y$ celui dont le moment d'inertie est le plus petit, que le plan directeur est, par

conséquent, parallèle à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand, et que les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux, sont les secondes ellipses pour lesquelles E est positif et $\frac{DD'}{M}$ négatif;

2.° Quand on prend pour le plan des xy celui dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les deux autres, et que le point L tombe dans l'un des deux angles opposés au sommet qui sont divisés en deux parties égales par l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit, puisque les courbes auxquelles les plans directeurs sont normaux, sont alors les secondes hyperboles pour lesquelles E est négatif et $\frac{DD'}{M}$ positif.

Lorsque le point L est situé sur l'un des axes de convergence perpendiculaires à leurs plans directeurs, axes qui sont les asymptotes de toutes ces hyperboles, on a $KL = 0$, $GK = GL$, et la valeur générale du moment d'inertie de l'axe AM devient

$$C + M \times \overline{GL}^2,$$

valeur indépendante de l'angle que forme cet axe avec sa projection sur le plan des xy, d'où il suit que tous les axes permanens compris dans un plan directeur perpendiculaire à l'une des deux lignes dont nous parlons, ont tous leurs momens d'inertie égaux entre eux et à

$$C + M \times \overline{GL}^2,$$

qui est, par les formules connues, la valeur du moment d'inertie de celui de ces axes permanens qui est perpendiculaire au plan que nous avons pris pour celui des xy; mais leurs centres de rotation se trouvent aux différens points de la circonférence LOO'.

Si nous prenons la valeur générale de ce moment d'inertie

et que nous y remplacions $\overline{GK}^2$ par $\overline{GL}^2 - \overline{KL}^2$, cette valeur, qui est

$$C + M(\overline{GK}^2 + KL \times KO)$$

quand le point K est hors de circonférence $L\,O\,O'$, et

$$C + M(\overline{GK}^2 \pm KL \times KO)$$

quand il est au-dedans, deviendra, dans le premier cas,

$$C + M(\overline{GL}^2 \pm KL \times LO),$$

le signe + devant être employé quand $KL < KO$, et le signe — quand $KL > KO$, et, dans le second cas,

$$C + M(\overline{GL}^2 - KL \times LO).$$

Or, si l'on mène par le point L une parallèle à l'axe des z, qui est un des axes permanens passant par ce point L, dans le plan directeur que l'on considère, le moment d'inertie de cet axe permanent sera, d'après les formules connues, égal à

$$C + M \times \overline{GL}^2,$$

d'où il suit qu'il aura le plus grand moment d'inertie parmi tous les axes permanens du même plan directeur, 1.° quand le plan directeur sera perpendiculaire à une des secondes ellipses ou des secondes hyperboles; 2.° lorsque ce plan étant normal à une des premières ellipses ou des premières hyperboles, on aura

$$KL > KO, \text{ ou } E > \frac{DD'}{M}.$$

Tandis que son moment d'inertie sera un *minimum* relativement à ceux des autres axes permanens du même plan directeur, quand ce plan étant toujours normal à une des premières ellipses ou des premières hyperboles, on aura

$$KL < KO, \text{ ou } E < \frac{DD'}{M}.$$

A l'égard de celui des mêmes axes permanens dont le moment d'inertie est un *minimum* dans les deux premiers cas, et un *maximum* dans le second, il est évident, puisque KL et LO sont dans un rapport constant pour chaque plan directeur, que ce sera l'axe permanent pour lequel LO' aura la plus grande valeur et deviendra le diamètre LO' de la circonférence LOO', en sorte que l'axe permanent correspondant est l'intersection du plan directeur avec le plan des xy.

Lorsque le diamètre LO' de la circonférence sur laquelle sont situés tous les centres de rotation des axes permanens d'un même plan directeur est nul, ces centres sont tous au même point L; et comme on a pour tous $LO = o$, leurs momens d'inertie deviennent tous égaux entre eux et à

$$C + M \times \overline{GL}^2.$$

Il suit des propriétés des axes permanens démontrées dans ce Mémoire, que cette double condition ne peut être satisfaite que par des axes permanens appartenant à un même plan directeur, et seulement, par conséquent, lorsque le point L, qui devient leur centre commun de rotation, est dans un des trois plans principaux et qu'on a

$$E = \frac{DD'}{M},$$

puisque

$$LO' = \frac{\frac{DD'}{M} - E}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}}.$$

La valeur de E étant ainsi déterminée, la courbe menée sur le plan des xy par tous les points qui jouissent de cette propriété, est évidemment une des sections coniques normales à tous les plans directeurs parallèles à l'axe des z: et cette courbe ne peut se trouver que parmi celles pour lesquelles E et $\frac{DD'}{M}$ sont de même signe, c'est-à-dire parmi les pre-

mières ellipses ou les premières hyperboles. En faisant $E = \frac{(H-K)(K-G)}{M}$ dans l'équation générale des premières ellipses pour lesquelles K est plus grand que H et G, on trouvera que celle de l'ellipse cherchée est

$$(K-H)p^2 + (K-G)q^2 - \frac{(K-H)(K-G)}{M} = 0,$$

et en la mettant sous cette forme,

$$\frac{Mp^2}{K-G} + \frac{Mq^2}{K-H} = 1,$$

on verra que son grand axe est placé sur l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand; en le prenant pour l'axe des x ou des p, G sera plus petit que H, la valeur de la moitié de ce grand axe sera $\sqrt{\frac{K-G}{M}}$, et celle de la moitié du petit $\sqrt{\frac{K-H}{M}}$, ce qui donne

$$\sqrt{\frac{K-G}{M} - \frac{K-H}{M}} = \sqrt{\frac{H-G}{M}}$$

pour la distance du centre au foyer.

Nous avons trouvé pour l'équation générale des premières hyperboles

$$Dp^2 - D'q^2 = E:$$

E étant positif, on a donc pour celle de l'hyperbole cherchée

$$(H-K)p^2 - (K-G)q^2 = \frac{(H-K)(K-G)}{M};$$

comme son axe transverse est l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand et qu'il est pris dans cette équation pour l'axe des x ou des p, G est encore plus petit que H et K, ce qui exige que H soit plus grand que K pour que E soit positif : ainsi, dans cette équation comme dans celle de

l'ellipse que nous venons de déterminer, G est la plus petite des trois quantités G, H, K; mais, dans l'ellipse, K est la plus grande des trois, et dans l'hyberbole, c'est H. Pour désigner les mêmes quantités par les mêmes lettres dans les deux cas, il est plus commode d'adopter les dénominations relatives à l'ellipse, où l'ordre alphabétique suit l'ordre des grandeurs relatives à ces trois quantités; alors il faut écrire, dans l'équation de l'hyberbole, H au lieu de K, et K au lieu de H; elle devient ainsi

$$(K-H)p^2-(H-G)q^2=\frac{(K-H)(H-G)}{M},$$

ou

$$\frac{Mp^2}{H-G}-\frac{Mq^2}{K-H}=1;$$

ce qui montre que le demi-axe transverse de cette hyperbole a pour valeur $\sqrt{\frac{H-G}{M}}$, c'est-à-dire qu'il est égal à la distance du centre au foyer de l'ellipse, en sorte que ses sommets sont aux foyers de l'ellipse. Son demi-axe conjugué a pour valeur $\sqrt{\frac{K-H}{M}}$, et celle de la distance du centre au foyer de cette hyperbole est par conséquent

$$\sqrt{\frac{H-G}{M}+\frac{K-H}{M}}=\sqrt{\frac{K-G}{M}},$$

qui est aussi la valeur du demi-grand axe de l'ellipse; en sorte que les sommets de cette ellipse sont aux foyers de l'hyperbole. Ces deux courbes sont d'ailleurs situées dans deux plans rectangulaires entre eux : l'ellipse, dans celui où sont toutes les premières ellipses, et qui est, comme nous l'avons vu, perpendiculaire à l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit; et l'hyperbole, dans celui qui est perpendiculaire à l'axe principal dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les deux autres, le seul où les sections

coniques auxquelles les plans directeurs sont normaux deviennent des hyperboles. Pour distinguer l'ellipse et l'hyperbole dont tous les points sont les centres de rotation de tous les axes permanens passant par ces points dans les plans normaux à ces courbes, je les désignerai sous le nom d'*ellipse principale* et d'*hyperbole principale.* Les propriétés qui les caractérisent ont été découvertes par M. Binet, qui les a exposées dans le Mémoire déjà cité.

En continuant de désigner par G la plus petite des trois quantités G, H, K, par H la moyenne, et par K la plus grande, et en prenant toujours aussi pour l'axe des p, soit à l'égard des premières ellipses, soit à l'égard des premières hyperboles, l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus grand, on pourra prendre l'axe principal dont le moment d'inertie est le plus petit pour l'axe de p, tant à l'égard des secondes ellipses qu'à celui des secondes hyperboles dont il est l'axe transverse.

Si l'on permute convenablement les lettres G, H, K, dans les valeurs de D et de D', coefficiens de p^2 et de q^2 dans l'équation

$$Dp^2 - D'q^2 = E$$

qui représente toutes ces courbes, et si l'on donne à E le signe convenable pour que sa valeur soit toujours positive, les équations de ces courbes seront, pour les premières ellipses,

$$D = H - K,\ D' = K - G,$$

et

$$(K - H)\,p^2 + (K - G)\,q^2 = E;$$

pour les premières hyperboles,

$$D = K - H,\ D' = H - G,$$

et

$$(K - H)\,p^2 - (H - G)\,q^2 = E;$$

pour les secondes ellipses,

$$D = H - G,\ D' = G - K,$$

et

$$(H - G)p^2 + (K - G)q^2 = E;$$

enfin pour les secondes hyperboles,

$$D = G - H,\ D' = H - K,$$

et

$$(H - G)p^2 - (K - H)q^2 = E.$$

CHAPITRE III.

Équation de la ligne sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des Axes permanens passant par un point donné.

Tous les axes permanens qui passent par un point donné A (*fig. 1*), dont X, Y, Z sont les coordonnées relatives aux trois axes principaux, sont compris, comme nous l'avons vu, dans la surface conique du second degré qui a pour équation

$$D\,X y z + D'\,Y x z + D''\,Z x y + D\,Y Z x + D'\,X Z y + D''\,X Y z = 0;$$

d'où il suit que tous leurs centres de rotation se trouvent sur une courbe qui est comprise dans la même surface, et qu'on peut représenter par le système formé de la réunion de cette équation avec une autre équation qu'il est facile d'obtenir de la manière suivante : $x;\ y;\ z$, étant les coordonnées du point O appartenant à cette courbe, et u la distance $A\,O$, on a

$$c = \frac{x - X}{u},\ c' = \frac{y - Y}{u},\ c'' = \frac{z - Z}{u},$$

et

$$u^2 = (x - X)^2 + (y - Y)^2 + (z - Z)^2;$$

mais nous avons trouvé une autre valeur de $AO = u$, qui devient

$$u = \frac{cc'D''}{M(cY - c'X)} - cX - c'Y - c''Z,$$

lorsqu'on y substitue au lieu de Z' sa valeur $-cX - c'Y - c''Z$; en éliminant c, c', c'', et multipliant par u, on en conclut

$$u^2 = \frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-X)(y-Y)}{Yx - Xy} - Xx - Yy - Zz + X^2 + Y^2 + Z^2;$$

et en égalant ces deux valeurs de u^2, on a l'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - Xx - Yy - Zz = \frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-X)(y-Y)}{Yx - Xy}$$

qui représente une surface du troisième degré, dont l'intersection avec la surface conique donne la courbe cherchée.

On peut, dans cette équation, remplacer la quantité

$$\frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-X)(y-Y)}{Yx - Xy},$$

par une de ces deux-ci,

$$\frac{D'}{M} \cdot \frac{(x-X)(z-Z)}{Xz - Zx}, \quad \frac{D}{M} \cdot \frac{(y-Y)(z-Z)}{Zy - Yz},$$

ces trois quantités étant égales en vertu de l'équation même de la surface conique, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer par un calcul fort simple.

On peut déduire directement de l'équation que nous venons de trouver, pour la courbe des centres, les résultats auxquels nous sommes déjà parvenus dans le cas où le point A est dans un des trois plans principaux, en prenant ce plan pour celui des $x\,y$. Cette manière d'arriver à ces résultats a en outre l'avantage de montrer plus clairement à quoi ils tiennent.

Quand le point A est dans le plan des $x\,y$, si l'on représente, comme nous l'avons fait, par p et q ses coordonnées

relatives aux deux axes principaux qui sont dans ce plan, on aura à ce point $X = p$, $Y = q$, $Z = 0$; l'équation de la surface conique devient alors

$$(D p y + D' q x + D'' p q) z = 0,$$

et se décompose en deux facteurs représentant deux plans, dont l'un est le plan même des $x y$, et l'autre a pour équation

$$D p y + D' q x + D'' p q = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi,

$$D p (y - q) + D' q (x - p) = 0,$$

puisque

$$D'' = - D - D'.$$

Ce plan passe donc par le point A, il est perpendiculaire sur celui des $x y$, et sa projection sur ce dernier plan forme avec l'axe des x un angle dont la tangente est égale à

$$- \frac{D' q}{D p}.$$

On en conclut aisément qu'il est perpendiculaire à la section conique tracée dans ce plan et passant par le point A, dont l'équation est

$$D p^2 - D' q^2 = E.$$

L'autre équation de la ligne des centres de rotation devient, pour les mêmes valeurs de X, Y, Z,

$$z^2 = \frac{D''}{M} \cdot \frac{(x-p)(y-q)}{q x - p y} - x(x-p) - y(y-q);$$

d'où il suit qu'on a pour la ligne des centres de rotation situés dans le plan des $x y$, l'équation du troisième degré

$$(q x - p y)[x(x-p) + y(y-q)] - \frac{D''}{M}(x-p)(y-q) = 0,$$

et que, pour trouver celle de la ligne des centres qui sont

dans le plan perpendiculaire à celui des $x\,y$, il faudra la rapporter à l'ordonnée z et à une abscisse t prise sur l'intersection de ces deux plans et comptée depuis le point A. En faisant, pour abréger,

$$\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2} = P,$$

on aura alors

$$x - p = \frac{D p t}{P},\ y - q = -\frac{D' q t}{P},$$

$$q x - p y = \frac{D p q t + D' p q t}{P} = -\frac{D'' p q t}{P},$$

et la valeur de z^2 se réduit à

$$z^2 = \frac{\frac{D D'}{M} + D' q^2 - D p^2}{\sqrt{D^2 p^2 + D'^2 q^2}}\, t - t^2;$$

équation d'une circonférence passant par le point donné A et dont le diamètre est égal au coefficient de t dans le premier terme de cette valeur de z^2.

Nous avons vu que les plans de ces circonférences sont normaux à une section conique qu'elles rencontrent chacune en un point par lequel passent toutes les droites situées dans ces plans, qui sont des axes permanens. La normale de la section conique à ce même point, que nous désignerons par n, a pour expression $q\sqrt{1 + \left(\frac{dq}{dp}\right)^2}$, ce qui donne $n = \sqrt{q^2 + \frac{D^2 p^2}{D'^2}}$ quand on y remplace $\frac{dq}{dp}$ par sa valeur $-\frac{D p}{D' q}$; et si l'on nomme a et b les demi-axes de cette courbe, on aura pour son équation $q^2 \pm \frac{b^2}{a^2} p^2 = \pm b^2$, qui doit être identique à $D p^2 - D' q^2 = E$, c'est-à-dire, à

$q^2 - \frac{D}{D'}p^2 = -\frac{E}{D'}$; on a donc $\pm\frac{b^2}{a^2} = -\frac{D}{D'}$, et $q^2 - \frac{D}{D'}p^2 = \pm b^2$. En substituant ces valeurs dans celle que nous venons de trouver pour le diamètre de la circonférence correspondante, après qu'on l'a écrite ainsi,

$$\frac{\frac{D}{M} + q^2 - \frac{D}{D'}p^2}{\sqrt{q^2 + \frac{D^2}{D'^2}p^2}},$$

elle devient

$$\frac{\frac{D}{M} \pm b^2}{n},$$

la normale n se rapportant au même axe principal auquel est relative la différence D des momens d'inertie des deux autres, et b étant celui des deux demi-axes de la section conique qui est perpendiculaire à ce même axe principal.

Nous avons déjà remarqué qu'il existait deux autres surfaces dont l'intersection avec la surface conique détermine, en général, la même courbe des centres de rotation; mais, lorsque le point A est dans l'un des plans principaux et que la surface conique se change en deux plans, ces deux autres surfaces se partagent aussi chacune en deux nappes indépendantes l'une de l'autre, qui ne peuvent pas être combinées arbitrairement avec les deux plans qu'elles doivent rencontrer dans les points où se trouvent les centres de rotation, chaque nappe correspondant seulement à un de ces plans.

Pour discuter plus facilement toutes les circonstances de cette réduction des surfaces du troisième degré à des surfaces dont les équations sont moins élevées, je prends de nouvelles coordonnées x', y', z', dont l'origine est au point donné A et dont les axes sont parallèles à ceux des x, y, z des calculs précédens, en sorte que $x = X + x'$, $y = Y + y'$, $z = Z + z'$;

alors l'équation générale de la surface conique prend cette forme très-simple,

$$D X y' z' + D' Y x' z' + D'' Z x' y' = 0 ;$$

et les trois équations du troisième degré sont

$$(Y x' - X y')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + X x' + Y y' + Z z') - \frac{D''}{M} x' y' = 0 ;$$

$$(X z' - Z x')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + X x' + Y y' + Z x') - \frac{D'}{M} x' z' = 0 ,$$

$$(Z y' - Y z')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + X x' + Y y' + Z z') - \frac{D}{M} y' z' = 0 .$$

Nous avons déjà vu ce qui résulte de la première, quand on fait $X = p$, $Y = q$, $Z = 0$ et qu'elle devient

$$(q x' - p y')(x'^2 + y'^2 + z'^2 + p x' + q y') - \frac{D''}{M} x' y' = 0 ;$$

alors l'équation de la surface conique se réduit à

$$(D p y' + D' q x') z' = 0 ,$$

et les deux autres équations du troisième degré se changent en

$$\left[x'^2 + y'^2 + z'^2 + \left(p - \frac{D'}{Mp}\right) x' + q y'\right] z' = 0 ,$$

$$\left[x'^2 + y'^2 + z'^2 + p x' + \left(q + \frac{D}{Mq}\right) y'\right] z' = 0 ,$$

qui se décomposent chacune en deux facteurs, dont l'un $z' = 0$ représente dans les deux cas le plan des xy, et dont l'autre donne une surface sphérique passant toujours par le point A, et dont le centre a pour coordonnées, à partir de ce point, $-\frac{1}{2}\left(p - \frac{D'}{Mp}\right)$, $-\frac{1}{2} q$, dans le premier cas, et $-\frac{1}{2} p$, $-\frac{1}{2}\left(q + \frac{D}{Mq}\right)$, dans le second.

Si l'on prend le second facteur $z' = 0$ de ces deux équations du troisième degré, il rendra identique celle de la surface conique, et les centres de rotation des axes permanens

passant par le point A, qui sont dans le plan des $x\,y$, resteront indéterminés; ce qui doit être, puisqu'ils sont compris, sur ce plan, dans la courbe dont l'équation

$$(qx'-py')(x'^2+y'^2+px'+qy')-\frac{D''}{M}x'y'=0$$

est essentiellement du troisième degré, et ne peut, en conséquence, être donnée par l'intersection du plan des $x\,y$ avec des surfaces sphériques.

Je ferai remarquer, au sujet de cette dernière équation, qu'on peut l'écrire ainsi,

$$1-\frac{py'}{qx'}-\frac{D''y'}{Mq(x'^2+y'^2+px'+qy')}=0,$$

et qu'on voit alors qu'elle est satisfaite en faisant $py'=qx'$, et x' et y' infinis. Elle a donc pour asymptote la droite représentée par cette dernière équation, qui est précisément celle qui passe par le point A et par le centre d'inertie du corps; ce qui était aisé à prévoir d'après ce que nous avons dit plus haut de cette droite.

Si l'on égale, au contraire, à zéro les premiers facteurs des mêmes équations, il faudra, pour que les équations des surfaces sphériques qui en résultent aient lieu, qu'on n'ait pas $z'=0$; elles ne détermineront donc des centres de rotation par leur intersection avec la surface conique, qu'autant qu'on les combinera avec l'autre facteur $Dpy'-Dqx'=0$ de l'équation de cette surface, équation qui représente le plan directeur dont le centre de convergence est au point A; et en effet, ces deux surfaces sphériques coupent ce plan dans la même circonférence que la surface exprimée par l'équation

$$(qx'-py')(x'^2+y'^2+z'^2+px'+qy')-\frac{D''}{M}x'y'=0,$$

puisque leurs équations ne diffèrent de cette dernière que parce que la quantité $\frac{D''x'y'}{qx'-py'}$ y est remplacée par une de

ces deux-ci, $\frac{D' x'}{p}, = -\frac{D y'}{q}$; et que ces trois quantités deviennent égales pour les points compris dans le plan directeur dont le centre de convergence est en A, en vertu de l'équation même de ce plan $D p y' + D' q x' = 0$, et de la relation $D + D' + D'' = 0$.

Supposons maintenant que le point donné A soit sur l'un des axes principaux, et qu'on prenne cet axe pour celui des x, il faudra faire $X = p$, $Y = 0$, $Z = 0$. L'équation de la surface conique se réduit alors à $y' z' = 0$, et les trois autres deviennent

$$\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 + \left(p + \frac{D''}{Mp}\right) x'\right) y' = 0,$$

$$\left(x'^2 + y'^2 + z'^2 + \left(p - \frac{D'}{Mp}\right) x'\right) z' = 0,$$

$$y' z' = 0.$$

Cette dernière équation exprime, comme celle de la surface conique, les deux plans coordonnés des $x y$ et des $x z$; quoiqu'il ne suive pas nécessairement de ce qu'on trouve ainsi la même équation $y' z' = 0$ pour deux surfaces qui doivent se rencontrer dans la ligne des centres de rotation des axes permanens passant par le point A, qu'on ait à-la-fois $y' = 0$ $z' = 0$ sur une des branches de cette ligne : il est à remarquer que le système de ces deux dernières équations représente l'axe des x dont tous les points sont, en effet, comme on l'a vu dans ce qui précède, des centres de rotation relativement à cet axe lui-même qui passe par le point A. La même observation s'applique au cas où l'on prend dans les deux premières équations du troisième degré leur second facteur, qui est y' dans l'une et z' dans l'autre, pour le combiner avec l'équation $y' z' = 0$, qui représente les deux plans dont se compose alors la surface conique. Mais l'on se tromperait fort, et l'on trouverait des points d'intersection qui ne seraient pas des

centres de rotation d'axes permanens passant par le point A, si l'on croyait que les premiers facteurs des mêmes équations peuvent se combiner arbitrairement avec ceux de l'équation $y' z' = o$. En effet, pour que la première des trois équations ci-dessus donne

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + \left(p + \frac{D''}{Mp}\right)x' = o,$$

il faut qu'on n'ait pas $y' = o$, et par conséquent la surface sphérique exprimée par cette équation ne doit être combinée qu'avec le plan représenté par celle-ci $z' = o$, c'est-à-dire avec le plan des $x\,y$; leur intersection est une circonférence dont l'équation est $y'^2 = -\left(p + \frac{D''}{Mp}\right)x' - x'^2$, qui passe par le point A et dont le diamètre est $-\frac{D''}{Mp} - p$. C'est sur cette circonférence que se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point A, qui sont situés dans le plan des $x\,y$.

De même, pour que le premier facteur

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + \left(p - \frac{D'}{Mp}\right)x'$$

de la seconde équation soit nul, il faut qu'on n'ait pas $z' = o$; il faudra donc réunir l'équation qu'on obtient, en l'égalant à zéro, avec $y' = o$, équation du plan des $x\,z$, pour avoir celle de la circonférence sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point A qui sont dans ce dernier plan. On trouve ainsi l'équation

$$z'^2 = \left(\frac{D'}{Mp} - p\right)x' - x'^2 = o,$$

qui est en effet celle de cette circonférence, comme on aurait pu le conclure de l'équation trouvée plus haut entre z et t, en y faisant $q = o$, $t = x'$, et $z = z'$.

RÉSUMÉ.

On sait qu'une ligne étant prise à volonté dans un corps, il peut arriver quatre cas:

1.° Qu'elle soit un axe permanent relativement à tous les points de sa longueur: ce cas ne peut avoir lieu que pour les axes principaux;

2.° Qu'elle soit un axe permanent pour un point de sa longueur, qui est toujours unique: c'est le cas de tous les axes permanens proprement dits;

3.° Qu'elle soit une limite d'axes permanens: il résulte des formules précédentes, et il est également aisé de conclure des théorèmes sur les axes principaux donnés par M. Binet, que cette propriété appartient exclusivement à toutes les droites passant par le centre d'inertie;

4.° Qu'elle ne tombe dans aucun des trois cas précédens: ce qui ne peut arriver, d'après ce qu'on vient de voir, qu'à des lignes qui ne passent pas par le centre d'inertie.

Par un point donné autre que le centre d'inertie, on ne peut donc faire passer que trois sortes de lignes, et on en peut toujours faire passer trois sortes, savoir :

Une infinité d'axes permanens: il y en a au moins trois qui ont leur centre de rotation à ce point;

Une ligne servant de limite à ces axes, c'est la droite qui joint le point donné au centre d'inertie;

Enfin des lignes qui ne sont ni axes permanens ni limites d'axes permanens.

J'ai trouvé,

1.° Que les premières forment par leur réunion une surface conique du second degré dont l'équation est très-simple;

2.° Que tous les axes permanens qui passent par le point donné sont compris dans deux plans rectangulaires, lorsque

ce point est situé sur un des plans principaux passant par le centre d'inertie : l'un des deux plans rectangulaires est ce plan principal lui-même; l'autre, qui lui est perpendiculaire, se trouve déterminé complétement par la situation du point donné et les valeurs des momens d'inertie des trois axes principaux;

3.° Que si l'on multiplie les trois différences entre les momens d'inertie relatifs aux trois axes principaux, respectivement par les cosinus des angles qu'ils forment avec la ligne qui joint le point donné au centre d'inertie, et qu'on divise les produits ainsi obtenus par les cosinus des angles compris entre les mêmes axes et une ligne quelconque passant par le point donné, cette ligne sera ou ne sera pas un axe permanent, suivant que la somme des quotiens résultant de ces divisions sera ou ne sera pas nulle, bien entendu que les différences entre les momens d'inertie relatifs aux trois axes principaux doivent être prises de manière que chaque moment d'inertie entre une fois positivement et une fois négativement dans ces différences;

4.° Que, dans le cas où l'on s'est assuré ainsi qu'une ligne donnée est un axe permanent, et qu'on veut déterminer son centre de rotation, il faut abaisser du centre d'inertie une perpendiculaire sur cette ligne, et prendre, à partir du point *K* (*fig. 1*) où elle la rencontre, une distance égale à la valeur de *KO* donnée à la page 116; l'autre extrémité *O* de cette distance sera le centre de rotation cherché;

5.° Que, dans tout plan mené par le point donné et le centre d'inertie, il y a un axe permanent passant par ce point et déterminé par les formules données pages 100-102;

6.° Que, dans le cas où le point donné est sur un des plans principaux, et où tous les axes permanens qui y passent sans être compris dans ce plan se trouvent dans un autre plan perpendiculaire au premier, les centres de rotation de ces axes

sont situés sur une circonférence qui passe par le point donné et y touche la droite qui y est élevée perpendiculairement au plan principal, droite qui est elle-même un axe permanent;

7.° Que les plans différens des plans principaux où se trouvent ainsi une infinité d'axes permanens menés par un même point situé dans leur intersection avec un plan principal, sont normaux à une section conique qui passe par ce point, et qui est comprise dans le plan principal;

8.° Que toutes celles de ces sections coniques qui sont comprises dans un même plan principal sont semblables entre elles, et ont leurs axes dans le rapport des racines carrées des différences entre le moment d'inertie relatif à ce plan principal et les momens d'inertie relatifs aux deux autres plans principaux;

9.° Que ces sections coniques sont des hyperboles sur le plan principal dont le moment d'inertie est intermédiaire entre les momens d'inertie des deux autres plans principaux et des ellipses sur ces derniers;

10.° Que si l'on veut trouver la valeur du moment d'inertie d'une ligne donnée qui satisfait au caractère auquel on reconnaît les axes permanens, il est aisé de la trouver par l'expression algébrique ou par la construction géométrique que nous avons données, aux pages 132 et 133, pour déterminer ce moment d'inertie;

11.° Que la ligne sur laquelle se trouvent tous les centres de rotation des axes permanens passant par un point donné, est déterminée par l'intersection d'une surface du troisième degré avec la surface conique qui comprend tous ces axes;

12.° Qu'il y a en général trois surfaces du troisième degré qui peuvent servir indifféremment à cette détermination;

13.° Que quand le point donné est dans un des plans principaux, et que la surface conique devient un système de deux plans, une des trois surfaces reste du troisième degré et

donne, par ses intersections avec les deux plans de ce système, tous les centres de rotation cherchés, tandis que les deux autres sont remplacées chacune par une surface sphérique et un plan qui se confond avec un des plans de la surface conique, en sorte que rien ne détermine plus les centres de rotation dont l'intersection de ces deux plans devrait donner le lieu, mais que ceux de l'autre plan de la surface conique continuent d'être déterminés par l'intersection commune de ce dernier et de la surface sphérique correspondante;

14.° Que, dans le cas où le point donné est sur un des axes principaux, et que la surface est remplacée par le système des deux plans principaux qui passent par cet axe, une des trois surfaces se change précisément dans ce même système et peut être regardée comme ne déterminant plus nécessairement des centres de rotation d'axes permanens passant par le point donné, mais qu'elle indique cependant par l'intersection des deux plans dont elle se compose ainsi que la surface conique, les centres de rotation situés à tous les points de l'axe principal sur lequel se trouve ce point donné;

15.° Que, dans le même cas, les deux autres surfaces sont remplacées par deux systèmes composés chacun d'un plan et d'une surface sphérique; qu'on retrouve ainsi les deux plans principaux dont l'intersection donne tous les centres de rotation situés sur l'axe principal qui passe par le point donné; que chaque surface sphérique ne doit être combinée qu'avec un des plans dont se compose alors la surface conique, et y détermine tous les centres de rotation des axes permanens passant par le point donné qui sont situés dans ce plan sans l'être sur l'axe principal mené par le même point.

SUITE DU MÉMOIRE INTITULÉ :

THÉORIE

DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR

DANS LES CORPS SOLIDES;

PAR M. FOURIER.

XII.

Des Températures terrestres, et du Mouvement de la Chaleur dans l'intérieur d'une sphère solide, dont la surface est assujettie à des changemens périodiques de température.

80. APRÈS avoir exposé les lois générales du mouvement de la chaleur dans les corps solides, il ne sera point inutile d'indiquer une des principales applications de cette théorie. On a choisi pour cet objet la question des températures terrestres. Aucune branche de l'étude de la nature ne nous intéresse davantage, et ne peut nous offrir un sujet plus digne de nos recherches. A la vérité, l'examen de cette grande question exigerait des observations exactes et multipliées, qui n'ont point encore été faites; mais on peut maintenant déterminer par le calcul les lois de la propagation de la chaleur dans le

globe terrestre, et ramener à une théorie commune les observations qui ont été recueillies jusqu'ici.

Les différens points de la surface de la terre sont inégalement exposés à l'action des rayons solaires. Les mouvemens que cette planète accomplit sur elle-même et dans son orbite, rendent très-variables les effets successifs de la chaleur du soleil. Si l'on plaçait des thermomètres dans les différens points de la partie solide du globe, immédiatement au-dessous de la surface, on remarquerait des changemens continuels dans chacun de ces instrumens. Ces mouvemens de la chaleur à la surface ont des relations nécessaires avec tous ceux qu'elle éprouve dans l'intérieur du globe. On se propose ici d'exprimer ces relations par l'analyse.

Les grandes variations de la température à la surface du globe sont périodiques : elles se reproduisent et redeviennent sensiblement les mêmes après l'intervalle d'une année. Ainsi la question consiste principalement à déterminer le mouvement de la chaleur dans un globe solide, d'un diamètre immense, dont la surface est assujettie à l'action périodique d'un foyer extérieur. On fait ici abstraction des causes propres qui pourraient faire varier la chaleur dans l'intérieur même de la terre; car elles n'ont qu'une influence extrêmement bornée sur le système général des températures. Au reste, il convient d'étudier séparément toutes les causes qui concourent aux températures terrestres, et de soumettre d'abord à une analyse rigoureuse les effets des causes principales. En comparant ensuite les résultats du calcul et ceux de l'observation, on distinguera les effets accidentels, et l'on parviendra à déterminer les lois constantes des grands mouvemens que les variations de température occasionnent dans les mers et dans l'atmosphère.

Si l'on suppose que tous les points de la surface d'un globe solide immense soient assujettis, par une cause extérieure

quelconque et pendant un temps infini, à des changemens périodiques de température pareils à ceux que nous observons, ces variations ne pourront affecter qu'une enveloppe sphérique dont l'épaisseur est infiniment petite par rapport au rayon; c'est-à-dire qu'à une profondeur verticale peu considérable la température d'un point aura une valeur constante qui dépend, suivant une certaine loi, de toutes les températures variables du point de la même verticale situé à la surface. Ce résultat important est donné par les observations, et l'on verra aussi qu'il est facile de le déduire de la théorie. Mais il faut remarquer que la valeur fixe de la température n'est point la même lorsqu'on change de verticale, parce qu'on suppose que les points correspondans de la surface éprouvent inégalement l'action du foyer extérieur. Si donc on fait abstraction de l'enveloppe du globe solide, on pourra dire que les divers points de sa surface sont assujettis à des températures constantes pour chacun de ces points, mais inégales pour des points différens. La question consistera maintenant à connaître quel doit être l'état intérieur résultant de l'état donné de la surface. Il faudra représenter par des formules générales le mouvement constant de la chaleur dans l'intérieur de la sphère, et déterminer la température fixe d'un point désigné. On voit, par cet exposé, que nous avons ici deux questions à traiter : dans la première, on considère les oscillations périodiques de la chaleur, dans l'enveloppe de la sphère, à des profondeurs accessibles; et dans la seconde, qui n'intéresse, pour ainsi dire, que la théorie, il s'agit de déterminer les températures fixes et inégales de la partie inférieure du solide qui ne participe point aux perturbations observées à la surface.

81. On supposera donc, en premier lieu, que la surface d'une sphère solide, d'un très-grand diamètre, est assujettie

en ses divers points à des changemens périodiques de température, analogues à ceux que l'on remarque vers la surface de la terre; et l'on déterminera quel est l'effet de ces variations à une profondeur peu considérable.

Il faut d'abord considérer que l'on doit ici faire abstraction du mouvement de la chaleur dans le sens horizontal. En effet, tous les points de la surface qui sont contigus, et compris dans une assez grande étendue, doivent être regardés comme également affectés par les causes extérieures : il en résulte que les points correspondans placés dans l'intérieur à une profondeur peu considérable ont aussi, dans le même instant, des températures sensiblement égales ; donc ils se communiquent des quantités de chaleur extrêmement petites. Il n'en est pas de même des points contigus d'une même ligne verticale ; leurs températures, prises dans un même instant, diffèrent entre elles de quantités incomparablement plus grandes que celles des points également distans de la surface. Par conséquent, le mouvement de la chaleur qu'il s'agit de connaître, pour une ligne verticale donnée, est sensiblement le même que si tous les points de la surface de la sphère subissaient des changemens périodiques entièrement semblables. Il reste donc à considérer le mouvement de la chaleur dans cette dernière hypothèse. Les points également distans du centre de la sphère conservent alors une température commune v qui varie avec le temps écoulé t. En désignant par x la distance au centre, on voit que v est une fonction de x et t qu'il faut déterminer. L'équation $\frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{dv}{dx}\right)$, que l'on a obtenue précédemment (art. 11), représente les variations instantanées des températures dans une sphère solide dont les couches sphériques sont inégalement échauffées, c'est-à-dire que, si l'on donnait actuellement aux points de la sphère placés à la distance x, une température v, v étant

une fonction de x donnée, et que l'on voulût connaître le résultat instantané de l'action mutuelle de toutes les particules, il faudrait ajouter à la température de chaque point la différentielle $dt.\frac{K}{CD}\left(\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dv}{dx}\right)$. On voit par-là que cette équation, que l'on avait trouvée pour le cas où le solide se refroidit librement après son immersion dans un liquide, exprime aussi la condition générale à laquelle la fonction v doit satisfaire, dans la question que l'on traite maintenant. On remplacera la variable x par $X-u$, X désignant le rayon total de la sphère, et u la distance perpendiculaire entre la surface et le point dont la température est v. On obtient par cette substitution, et en considérant X comme un très-grand nombre, $\frac{dv}{dt}=\frac{K}{CD}\frac{d^2v}{du^2}$. On aurait pu parvenir à ce même résultat, en considérant immédiatement le mouvement linéaire de la chaleur dans un solide terminé par un plan infini; mais il y a, dans la question des températures terrestres, divers points que l'on ne peut éclaircir qu'en employant l'équation plus générale qui convient à la sphère.

Il faut ajouter aux remarques précédentes, que l'on peut encore faire abstraction de l'état primitif dans lequel se trouvait le solide lorsqu'on a commencé à assujettir la surface aux variations périodiques de température. En effet, cet état initial a été continuellement changé, et pendant un temps infini, en sorte qu'il s'est transformé progressivement en un autre état, qui ne dépend plus que des températures variables de la surface, et qui est lui-même périodique. La différence entre cet état final et celui qui avait eu lieu au commencement, a diminué de plus en plus, et a disparu d'elle-même entièrement; elle résultait d'une chaleur excédante qui s'est dissipée librement dans l'espace extérieur ou dans le solide

infini. Au reste, ce même résultat, qu'il est facile d'apercevoir *à priori*, se déduit aussi du calcul. Il est exprimé par les formules générales que l'on obtient en ayant égard à l'état initial ; et l'on reconnaît facilement que les températures finales du solide sont périodiques, et redeviennent les mêmes après un intervalle de temps égal à celui qui détermine le retour des températures de la surface. Il a paru superflu d'entrer ici dans ce développement.

On voit maintenant que la fonction cherchée v de x et t est périodique par rapport au temps t, et qu'elle satisfait à l'équation générale

$$(e) \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{K}{CD}\,\frac{d^2v}{du^2} = k\,\frac{d^2v}{du^2}.$$

Elle satisfait aussi, lorsqu'on fait $u = 0$, à l'équation déterminée $v = \phi\,(t)$, ϕ étant une fonction périodique que l'on suppose connue. C'est au moyen de ces conditions qu'il faut déterminer la fonction v.

La nature de la fonction ϕ est telle, par hypothèse, qu'elle ne change point de valeur si l'on écrit $t + \theta$ au lieu de t, θ étant la durée de la période ; il doit en être de même de la fonction v.

On satisfait à l'équation (e) en supposant

$$v = a e^{-gu} \cos(2g^2 kt - gu), \text{ ou } v = a e^{-gu} \sin(2g^2 kt - gu).$$

Ces valeurs particulières se déduisent de celles que nous avons employées jusqu'ici ; il suffit de rendre les exposans imaginaires. Les quantités g et a sont arbitraires. On peut donc exprimer la valeur générale de v par l'équation suivante :

$$\begin{aligned}(e)\; v = {} & e^{-gu}\left[a\cos(2g^2kt - gu) + b\sin(2g^2kt - gu)\right] \\ & + e^{-g_1u}\left[a_1\cos(2g_1^2kt - g_1u) + b_1\sin(2g_1^2kt - g_1u)\right] \\ & + e^{-g_2u}\left[a_2\cos(2g_2^2kt - g_2u) + b_2\sin(2g_2^2kt - g_2u)\right] \\ & + \&c.\end{aligned}$$

En supposant $y = 0$, on aura l'équation de condition

$$\begin{aligned}\varphi t = {} & a \cos 2 g^2 k t + b \sin 2 g^2 k t \\ & + a_1 \cos 2 g_1^2 k t + b_1 \sin 2 g_1^2 k t \\ & + a_2 \cos 2 g_2^2 k t + b_2 \sin 2 g_2^2 k t \\ & + \&c.\end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit périodique, et qu'elle reprenne sa valeur lorsqu'on augmente t de l'intervalle θ, il suffit que $2 g^2 k \theta = 2 i \pi$, i étant un nombre entier quelconque. Si on prend pour g, g_1, g_2, &c. des nombres qui satisfassent à cette condition, la valeur générale de v donnée par l'équation (e) sera périodique aussi, et ne changera point lorsqu'on écrira $t + \theta$ au lieu de t; car cette substitution ne fera qu'augmenter d'un multiple de la circonférence entière toutes les quantités qui sont sous les signes sinus ou cosinus.

On a donc

$$\begin{aligned}\varphi t = a & + a_1 \cos\left(1 \frac{2\pi}{\theta} t\right) + b_1 \sin\left(1 \frac{2\pi}{\theta} t\right) \\ & + a_2 \cos\left(2 \frac{2\pi}{\theta} t\right) + b_2 \sin\left(2 \frac{2\pi}{\theta} t\right) \\ & + a_3 \cos\left(3 \frac{2\pi}{\theta} t\right) + b_3 \sin\left(3 \frac{2\pi}{\theta} t\right) \\ & + \&c.\end{aligned}$$

La fonction φt étant supposée connue, il sera facile d'en déduire les valeurs des coefficiens a_1, a_2, a_3, a_4, &c. b_1, b_2, b_3, b_4, &c. On trouvera (*voyez* article 31)

$\pi a = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\theta} \int \varphi t . dt$, $\pi a_1 = \frac{2\pi}{\theta} \int \varphi t . \cos\left(\frac{2\pi}{\theta} t\right) dt$, $\pi b_1 = \frac{2\pi}{\theta} \int \varphi t . \sin\left(\frac{2\pi}{\theta} t\right) dt$; et en général $\pi a_i = \frac{2\pi}{\theta} \int \varphi t . \cos\left(i \frac{2\pi}{\theta} t\right) dt$, $\pi b_i = \frac{2\pi}{\theta} \int \varphi t . \cos\left(i \frac{2\pi}{\theta} t\right) dt$,

Les intégrales doivent être prises depuis $\frac{2\pi}{\theta}t = 0$ jusqu'à $\frac{2\pi}{\theta}t = 2\pi$, ou depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \theta$. Les coefficiens étant ainsi déterminés, et les exposans $g, g_1, g_2, g_3, \ldots g_i \ldots$ étant $0, \sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}, \sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}, \sqrt{\frac{3\pi}{k\theta}}, \ldots \sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}, \ldots$ il ne reste rien d'inconnu dans la valeur de v. L'équation suivante fournit donc la solution complète de la question :

$$(E)\quad v = \frac{1}{\theta}\int \varphi t\,dt + \frac{2}{\theta}e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}}\left\{\begin{array}{l}\cos\left(\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int \varphi t\cos\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\\ \sin\left(\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int \varphi t\sin\left(\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\end{array}\right\}$$

$$+ \frac{2}{\theta}e^{-u\sqrt{\frac{2\pi}{k\theta}}}\left\{\begin{array}{l}\cos\left(2\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{2\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int \varphi t\cos\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\\ \sin\left(2\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{2\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int \varphi t\sin\left(2\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\end{array}\right\}$$

$$\vdots$$

$$+ \frac{2}{\theta}e^{-u\sqrt{\frac{i\pi}{k\theta}}}\left\{\begin{array}{l}\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int \varphi t\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\\ \sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t - u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int \varphi t\sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\end{array}\right\}$$

$$\vdots$$

82. Cette solution fournit diverses conséquences remarquables. Les quantités exponentielles

$e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}}$, $e^{-u\sqrt{2\frac{\pi}{k\theta}}}$, $e^{-u\sqrt{3\frac{\pi}{k\theta}}}$, &c., forment une suite décroissante, et la diminution est d'autant plus rapide que la quantité u est plus grande. Il en résulte que la température des points du solide placés à une profondeur un peu considérable est représentée sensiblement par les deux premiers termes de la valeur de v. En effet, il faut remarquer

que les quantités variables qui multiplient les exponentielles sont toutes affectées des signes cosinus ou sinus ; elles ne peuvent donc acquérir, lorsqu'on fait varier t ou u, que des valeurs comprises entre 1 et — 1. A l'égard des coefficiens qui contiennent le signe intégral, ils sont tous constans; donc les termes successifs de la valeur de v diminuent très-rapidement, si l'on augmente la valeur de n.

En donnant à cette quantité u une certaine valeur U, qu'il est aisé de déterminer, le second terme de la série devient une quantité extrêmement petite, et alors la valeur de v est constante, et demeure ainsi la même pour toutes les profondeurs qui surpassent U. Ainsi l'analyse nous fait connaître que la température des lieux profonds est fixe, et ne participe aucunement aux variations qui ont lieu à la surface.

83. De plus, cette température fondamentale équivaut à $\frac{1}{\theta}\int \varphi t.\, dt$, φt représentant la température variable du point de la surface, l'intégrale étant prise de $t = 0$ à $t = \theta$. Donc la température fixe des lieux profonds est la valeur moyenne de toutes les températures variables observées à la surface. Les observations ont donné depuis long-temps les mêmes résultats ; ils se présentent aujourd'hui comme des conséquences évidentes de la théorie mathématique de la chaleur.

84. En désignant par w la différence entre la température moyenne et celle des points qui sont placés à une profondeur u peu différente de U, on aura

$$(E') \qquad w = v - \frac{1}{\theta}\int \varphi t.\, dt =$$

$$e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}}\left\{\begin{array}{l} 2\cos\left(2\frac{\pi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right)\frac{1}{\theta}\int \varphi t \cos\left(2\frac{\pi t}{\theta}\right) dt \\ 2\sin\left(2\frac{\pi t}{\theta} - u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}\right)\frac{1}{\theta}\int \varphi t \sin\left(2\frac{\pi t}{\theta}\right) dt \end{array}\right\}$$

$= e^{-gu}[a \cos (2 g^2 k t - g u) + b \sin (2 g^2 k t - g u)]$;
a, b et g ayant les valeurs désignées précédemment par a_1, b_1 et g_1. Cette dernière équation peut être transformée en celle-ci :

$$w = v - \frac{1}{8}\int \varphi t . dt$$

$$= e^{-gu} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin \left(2 g^2 k t - g u + \text{arc tang} \frac{a}{b}\right).$$

Si maintenant on regarde u comme constante, et que l'on fasse varier t, la quantité w aura pour plus grande valeur $e^{-gu} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$. Donc la température d'un point placé à une profondeur assez considérable est alternativement plus grande ou moindre que la température moyenne ; la différence, qui est très-petite, varie comme le sinus du temps écoulé depuis l'instant où elle était nulle. Le *maximum* de la différence décroît en progression géométrique, lorsque la profondeur augmente en progression arithmétique.

Les différens points d'une même ligne verticale ne parviennent point tous en même temps à la température moyenne, en sorte que, si l'on observait dans le même instant les températures des points d'une verticale, on trouverait alternativement des points plus chauds et des points plus froids. Si l'on veut connaître à quelle distance sont deux points qui parviennent en même temps à la température moyenne, il faut écrire l'équation $\sin \left(2 g^2 k t - g u + \text{arc tang} \frac{a}{b}\right) = 0$, d'où l'on conclut que la différence $u' - u$ entre les profondeurs doit être telle, que l'on ait $g (u' - u) = i \pi$; i étant un nombre entier quelconque. Ainsi deux points dont la distance verticale est $\frac{\pi}{g}$, ont dans le même instant la température moyenne ; mais pour l'un cette température est croissante, et pour l'autre elle diminue lorsque le temps augmente.

On voit par-là que chaque point de l'intérieur du globe subit des variations de température analogues à celles que nous observons à la surface. Ces variations se renouvellent aussi après un même intervalle de temps, qui est la durée de l'année; mais elles sont d'autant moindres que les points sont placés à une plus grande profondeur, en sorte qu'elles deviennent insensibles lorsqu'on pénètre dans des souterrains profonds. Chaque point parvient, soit à son *maximum* de chaleur, soit à la température moyenne, à une époque qui dépend de la distance à la surface. Si l'on suivait cette température moyenne depuis l'instant où elle affecte un point donné de l'intérieur du globe, en passant avec elle dans les points inférieurs, on parcourrait la verticale d'un mouvement uniforme.

La durée de la période qui détermine le retour des températures de la surface, influe beaucoup sur l'étendue des oscillations et sur la distance des points qui atteignent en même temps leur *maximum* de chaleur. En effet, la plus grande variation ayant pour valeur $e^{-gu}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, ou $e^{-u\sqrt{\frac{\pi}{k\theta}}}$ $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$, il s'ensuit que, pour qu'elle demeurât la même lorsque θ augmente, il faudrait que le quotient $\frac{u}{\sqrt{\theta}}$ ne changeât point de valeur : donc les profondeurs pour lesquelles les plus grandes variations sont également insensibles, dépendent du nombre θ, et elles croissent comme les racines carrées de la durée des périodes. Il en est de même de la distance de deux points d'une même verticale qui atteignent en même temps leur *maximum* de température. Ainsi les petites variations diurnes de la chaleur pénètrent à des distances dix-neuf fois moins grandes que les variations annuelles, et les points qui atteignent en même temps leur *maximum* de la

chaleur du jour sont environ dix-neuf fois moins éloignés que ceux qui parviennent ensemble à leur *maximum* de la chaleur annuelle.

A l'égard de la constante k, qui représente $\frac{K}{CD}$, elle influe selon le même rapport que le nombre θ, et les oscillations de la chaleur sont d'autant plus amples et plus profondes que la masse qui est exposée à son action a une plus grande conducibilité.

Par exemple, si la constante k était infinie, l'état intérieur du solide serait par-tout le même que celui de la surface : on pourrait le conclure aussi de l'analyse précédente ; car, en supposant $k = \frac{1}{0}$ dans l'équation générale (E), tous les termes qui contiennent u disparaissent, quel que soit le temps t; et la valeur de v est la même que si l'on fait $u = 0$.

Les résultats précédens, déduits de l'équation (E), n'ont point lieu, en général, lorsque les points sont placés à de très-petites profondeurs : il faut alors employer les termes subséquens de la valeur de v. L'état variable des points voisins de la surface dépend de la fonction périodique qui détermine les températures extérieures ; mais, à mesure que la chaleur pénètre dans le solide, elle y affecte une disposition régulière, qui ne dépend que des propriétés les plus simples des sinus et des logarithmes, et ne participe plus de l'état arbitraire de la surface.

85. Il est facile de connaître les valeurs numériques des quantités que l'on vient de considérer : mais nous ne pouvons appliquer aujourd'hui cette théorie qu'aux substances solides qui ont été l'objet de nos propres expériences ; car ces quantités h et K, qui expriment des qualités spécifiques des corps, n'avaient jamais été mesurées. Nous déterminerons donc les

mouvemens périodiques de la chaleur dans un globe de fer d'un très-grand diamètre.

Pour trouver la conducibilité spécifique de cette substance, on a observé les températures fixes des divers points d'une armille de fer exposée à l'action permanente d'un foyer de chaleur. Du rapport constant $\frac{z_2 + z_4}{z_3}$, on a déduit la valeur approchée de $\frac{h}{K}$. Ensuite on a observé le refroidissement d'une sphère solide de fer : on a conclu la valeur numérique de $\frac{h}{CD}$. La comparaison de ces résultats a fourni la valeur de K, qui diffère peu de $\frac{3}{2}$. A l'égard des constantes C et D, on en connaissait déjà les valeurs approchées.

L'unité de longueur étant le mètre; l'unité de temps, une minute; l'unité de poids, un kilogramme; les valeurs approchées de h et K peuvent être exprimées ainsi : $h = \frac{1}{5}$, $K = \frac{3}{2}$. Quant aux valeurs approchées de C et D, on a $C = \frac{5}{24}$, $D = 7800$. L'unité qui sert à mesurer les quantités de chaleur, est la quantité nécessaire pour convertir un kilogramme de glace à la température o, en un kilogramme d'eau à la même température o.

Pour calculer l'effet des variations diurnes de la température, il faut prendre $\theta = 1440$ minutes. Si l'on fait ces substitutions, et que l'on cherche la valeur de g ou $\sqrt{\frac{CD\pi}{K\theta}}$, on trouvera qu'en supposant $u = 2^m,3025$, l'exponentielle e^{-gu} est environ $\frac{1}{100}$. Par conséquent, à cette profondeur de $2^m,3025$, les variations diurnes seront très-petites. On calculera les variations annuelles de température en

conservant les valeurs précédentes de K, C, D, et prenant $\theta = 365 \times 1440$ minutes : il sera facile de voir que ces variations sont très-peu sensibles à une profondeur d'environ 60 mètres.

Quant à la distance qui sépare deux points intérieurs de la même verticale qui parviennent en même temps à la température moyenne annuelle, elle a pour valeur $\frac{\pi}{g}$, et par conséquent diffère peu de 30 mètres.

Si l'on suivait la température moyenne à mesure qu'elle passe d'un point intérieur du globe à tous ceux qui sont placés au-dessous de lui, on descendrait d'un mouvement uniforme, en parcourant environ 30 mètres en six mois. Les substances qui forment l'enveloppe extérieure du globe terrestre ayant une conducibilité spécifique et une capacité de chaleur différentes de celles du fer, on observe que les variations diurnes ou annuelles deviennent insensibles à des profondeurs moins considérables, et que la propagation de la température moyenne s'opère plus lentement.

L'expérience nous a fait connaître depuis long-temps que la température des lieux profonds est invariable, et qu'elle est égale à la valeur moyenne des températures observées à la surface dans le cours d'une année; que les plus grandes variations des températures, soit diurnes, soit annuelles, diminuent très-rapidement à mesure que la profondeur augmente; que ces dernières pénètrent à des distances beaucoup plus considérables; qu'elles n'ont point lieu en même temps dans les différens points, et qu'à une certaine profondeur les époques des plus grandes et des moindres températures sont entièrement opposées. L'analyse mathématique fournit aujourd'hui l'explication complète de ces phénomènes : elle les ramène à une théorie commune et en donne la mesure exacte. Si ces résultats n'eussent point été connus, nous les déduirions

de la théorie, comme des conséquences simples et évidentes de l'équation générale que nous avons rapportée.

86. Nous allons maintenant indiquer une autre application des formules qui représentent le mouvement périodique de la chaleur dans un globe d'un très-grand diamètre. Il s'agit d'évaluer la quantité totale de chaleur qui, dans un lieu déterminé, pénètre la surface du globe terrestre pendant un an.

On ne peut connaître que par des observations assidues quel est, pour un lieu donné, l'ordre successif des températures, pendant le cours d'une année. A défaut de ces observations, qui n'ont point encore été faites avec une précision suffisante, nous choisirons pour exemple l'effet résultant d'une loi semblable à celle qui s'établit d'elle-même dans l'intérieur du solide. Cette loi consiste en ce que la différence de la température actuelle à la température moyenne augmente proportionnellement au sinus du temps écoulé depuis l'instant où cette température moyenne avait lieu.

Si l'on suppose que deux thermomètres soient placés en deux points très-voisins d'une même verticale, et que le premier soit immédiatement au-dessous de la surface, la marche comparée de ces instrumens fera connaître les effets respectifs de la chaleur extérieure et de la chaleur terrestre. Lorsque le thermomètre supérieur marquera une température plus élevée que celle du second, il s'ensuivra que la chaleur communiquée par les rayons solaires, ou d'autres causes extérieures, pénètre alors dans le globe et l'échauffe; mais, lorsque le thermomètre inférieur deviendra le plus élevé, on en conclura que la chaleur excédante que la terre avait acquise, commence à se dissiper dans l'atmosphère. La terre acquiert ainsi une chaleur nouvelle pendant une partie de l'année; elle la perd ensuite entièrement pendant l'autre partie de la même année. Cette période se trouve par-là

divisée en deux saisons contraires. La question consiste à exprimer exactement la quantité de la chaleur qui, traversant une surface d'une étendue donnée (un mètre carré), pénètre l'intérieur du globe, pendant la durée de l'échauffement annuel. Pour mesurer cette quantité de chaleur, on déterminera combien elle pourrait fondre de kilogrammes de glace.

Dans le cas que nous examinons, le mouvement périodique de la chaleur est exprimé par l'équation suivante :

$$w = v - \frac{1}{\theta} \int \varphi t . dt$$

$$= e^{-gu} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin\left(2 g^2 k t - g u + \text{arc tang } \frac{a}{b}\right).$$

Selon les principes que nous avons démontrés dans le cours de cet ouvrage, la quantité de chaleur qui, pendant un instant infiniment petit dt, passe d'un point de la verticale à un point inférieur, dans un filet solide dont la section est ω, a pour expression $-K \frac{dv}{du} \omega \, dt$: K représente la conducibilité intérieure (*voir* le lemme I.er, art. 4). Prenant la valeur de $\frac{dv}{du}$, on aura l'équation

$$-\frac{dv}{du} = e^{-gu} . g\sqrt{2} (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \sin\left[2g^2kt - gu - \text{arc tang}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\right].$$

L'échauffement annuel commence donc lorsqu'à la surface de la terre la quantité qui est sous le signe du sinus, étant nulle, commence à devenir négative. Il dure six mois, et le refroidissement a lieu pendant l'autre moitié de l'année. La vîtesse avec laquelle la chaleur pénètre dans l'intérieur, est proportionnelle à la valeur de $-\frac{dv}{du}$. Ce flux de chaleur, à la surface où la quantité u est nulle, est représenté par

$g\sqrt{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\sin\left[2g^2kt-\text{arc tang}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\right].$

Il faut maintenant, pour déterminer la quantité acquise pendant la durée de l'échauffement, multiplier l'expression précédente par dt, et intégrer depuis la valeur de t qui rend nulle la quantité $2g^2kt - \text{arc tang}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)$, jusqu'à la valeur de t qui rend cette même quantité égale à π.

Si l'on prend entre ces limites l'intégrale $-\int\frac{dv}{du}dt$, on aura $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\frac{\sqrt{2}}{gk}$. On voit, par l'expression générale de la valeur de w, que $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}$ représente le *maximum* de la différence entre la température variable et la température moyenne. Soit A cette plus grande variation, dont la valeur est donnée par l'observation, et M la quantité totale de chaleur qu'il s'agissait de déterminer. Il faudra multiplier l'expression précédente $\frac{A\sqrt{2}}{gk}$ par le nombre K qui mesure la conducibilité intérieure, et par l'étendue de la surface, qui est ici un mètre carré. En remarquant que l'on a désigné par k la quantité $\frac{K}{CD}$, et que $g=\sqrt{\frac{\pi CD}{K\theta}}$, on aura le résultat suivant : $M=A\sqrt{\frac{2K.\theta.CD}{\pi}}$.

La valeur de w, prise à la surface, est

$(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\sin\left[2g^2kt+\text{arc tang}\frac{a}{b}\right]$; et celle de $-\frac{dv}{du}$

est $g\sqrt{2}(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\sin\left[2g^2kt-\text{arc tang}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)\right].$

Si l'on suppose que le temps t commence lorsque w est nul,

c'est-à-dire lorsque la température a sa valeur moyenne, le terme arc tang $\frac{a}{b}$ s'évanouit : ainsi la quantité a est nulle. On aura donc

$v = b \sin 2g^2kt$, et $\frac{dv}{du} = gb\sqrt{2}\sin(2g^2kt + \frac{1}{4}\pi)$:

donc $\frac{dv}{du}$ commence à devenir positive lorsque $2g^2kt + \frac{1}{4}\pi = 0$; ce qui donne, en mettant pour g sa valeur, $t = -\frac{1}{8}\theta$.

Il suit de là que l'échauffement commence un huitième d'année après que la température de la surface est parvenue à la valeur moyenne : jusqu'à ce terme, l'intérieur de la terre étant plus échauffé que la surface, fait passer une partie de sa chaleur dans l'atmosphère ; mais ensuite le mouvement de la chaleur se fait en sens contraire, parce que la surface est devenue plus chaude que les couches inférieures. La saison du refroidissement commence donc un huitième d'année après que la température décroissante de la surface est parvenue à sa valeur moyenne, et cette saison dure une demi-année. Si l'on voulait appliquer ces résultats au climat de Paris, on pourrait supposer $A = 8^d$ (division octogésimale). A l'égard des constantes K, C, D, si l'on choisit celles qui conviennent à une masse solide de fer, on aura pour valeurs approchées

$$K = \frac{3}{2},\ C = \frac{5}{44},\ D = 7800.$$

Faisant ensuite $\theta = 60.24.365$, on trouvera

$$M = A\sqrt{\frac{2K.C.D.\theta}{\pi}} = 2856.$$

On voit, par cet exemple de calcul, que la théorie fournit le moyen de déterminer exactement la quantité totale de

chaleur qui passe dans le cours d'une demi-année de l'atmosphère à l'intérieur de la terre, en traversant une surface d'une étendue donnée (un mètre carré). Cette quantité de chaleur équivaut, dans le cas que nous venons d'examiner, à celle qui peut fondre environ 2856 kilogrammes de glace, ou une colonne de glace d'un mètre carré de base sur 3m, 1 de hauteur.

87. Il nous reste maintenant à considérer le mouvement constant de la chaleur dans l'intérieur du globe. On a vu que les perturbations périodiques qui se manifestent à la surface, n'affectent point sensiblement les points situés à une certaine distance au-dessous de cette surface. Il faut donc faire abstraction de l'enveloppe extérieure du solide, dans laquelle s'accomplissent les oscillations sensibles de la chaleur, et dont l'épaisseur est extrêmement petite par rapport au rayon de la terre. L'état du solide intérieur est très-différent de celui de cette enveloppe. Chaque point conservant une température fixe, la chaleur s'y propage d'un mouvement uniforme, et passe avec une extrême lenteur des parties plus échauffées dans celles qui le sont moins : elle pénètre à chaque instant et de plus en plus dans l'intérieur du globe pour remplacer la chaleur qui se détourne vers les régions polaires. On n'entreprendra point ici de traiter cette question dans toute son étendue, parce qu'elle nous paraît seulement analytique, et qu'elle n'a point d'ailleurs une connexion nécessaire avec les fondemens de la théorie : mais il convenait à l'objet de cet ouvrage de montrer que toutes les questions de ce genre peuvent maintenant être soumises à l'analyse mathématique.

On suppose que tous les points de la circonférence d'un grand cercle tracé sur la surface d'une sphère solide ont acquis et conservent une température commune; que tous les points de la circonférence d'un cercle quelconque tracé

sur la surface parallèlement au premier, ont aussi une température permanente et commune, différente de celle des points de l'équateur, et que la température fixe décroît ainsi depuis l'équateur jusqu'au pôle suivant une loi déterminée. La surface étant maintenue, durant un temps infini et par des causes extérieures quelconques, dans l'état que nous venons de décrire, il est nécessaire que le solide parvienne aussi à un dernier état, et alors la température d'un point intérieur quelconque n'éprouvera aucun changement. Il est manifeste que si par le centre d'un parallèle on décrit une circonférence d'un rayon quelconque, tous les points de cette circonférence auront la même température.

Cela posé, l'on va démontrer que l'équation suivante,

$$v = \cos x \int e^{y \cos r} d r,$$

représente un état particulier du solide qui subsisterait de lui-même s'il était formé : x désigne la distance d'un point du solide au plan de l'équateur, et y sa distance à l'axe perpendiculaire à l'équateur ; v est la température permanente du même point ; l'indéterminée r disparaît après l'intégration, qui doit être prise depuis $r = 0$ jusqu'à $r = \pi$. L'équation $v = \cos x \int e^{y \cos r} d r$ satisfait à la question, en ce que, si chaque point du solide recevait la température indiquée par cette équation, et que tous les points de la surface fussent entretenus par un foyer extérieur à cette température initiale, il n'y aurait dans l'intérieur de la sphère aucun changement de température. Pour vérifier cette solution, on établira, 1.° que l'équation $v = \cos x \int e^{y \cos r} d r$ satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 v}{d x^2} + \frac{d^2 v}{d y^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{d v}{d y} = 0 ;$$

2.° que l'état du solide est permanent lorsque cette dernière équation est satisfaite, et lorsque les points de la surface sont entretenus à leur température initiale.

En désignant par u la fonction de y, qui équivaut à l'intégrale définie $\int e^{y \cos r} dr$, on aura $v = u \cos x$; et substituant, on a $-u + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{du}{dy} = 0$, équation différentielle du second ordre à laquelle la valeur de u satisfait. Pour s'en assurer, on donnera à l'intégrale définie $\int e^{y \cos r} dr$ la forme exprimée par l'équation suivante,

$$\int e^{y \cos r} dr = \pi \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2.^2 4.^2} + \frac{y^6}{2.^2 4.^2 6^2} + \frac{y^8}{2.^2 4.^2 6.^2 8^2} + \ldots \right),$$

qu'il est facile de vérifier. Cette expression de la somme de la série

$$1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2.^2 4^2} + \frac{y^6}{2.^2 4.^2 6^2} + \ldots$$

est une conséquence évidente de la proposition générale énoncée dans l'article 53, et qui donne le développement de l'intégrale $\int du\, \varphi(t \sin u)$, φ étant une fonction quelconque. Or l'équation

$$u = \pi \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2.^2 4^2} + \frac{y^6}{2.^2 4.^2 6^2} + \ldots \right)$$

satisfait évidemment à l'équation différentielle

$$u = \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{1}{y} \cdot \frac{du}{dy}:$$

donc la valeur particulière donnée par l'équation $v = \int e^{y \cos r} dr$ satisfait à l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dv}{dy} = 0.$$

Cette dernière équation exprime la condition nécessaire pour que chaque point du solide conserve sa température. En effet, imaginons que, l'axe étant divisé en une infinité de parties égales dx, on élève dans le plan d'un méridien toutes

les coordonnées perpendiculaires à cet axe et qui passent par les points de division; et pareillement, que, le diamètre de l'équateur, dans le plan du même méridien, étant divisé en un nombre infini de parties égales dy, on élève, par tous les points de division, des perpendiculaires qui coupent les précédentes. On aura divisé ainsi l'aire du méridien en rectangles infiniment petits; et si le plan de ce méridien tourne sur l'axe, le solide sera divisé lui-même en une infinité d'élémens dont la figure est celle d'une armille.

Chacun de ces élémens est placé entre deux autres dans le sens des x, et entre deux autres dans le sens des y. La quantité de chaleur qui passe d'un élément à celui qui est placé après lui dans le sens des x, est égale à

$$-k\frac{dv}{dx}2\pi y\,dy.$$

Ce second élément transmet donc à celui qui le suit dans le sens des x, une quantité de chaleur exprimée par

$$-k\frac{dv}{dx}2\pi y\,dy-d\left[k\frac{dv}{dx}2\pi y\,dy\right],$$

d indiquant la différenciation par rapport à x. Donc l'élément intermédiaire acquiert, à raison de sa place dans le sens des x, une quantité de chaleur égale à $d\left(k\frac{dv}{dx}2\pi y\,dy\right)$. On voit de la même manière qu'un élément transmet à celui qui est placé après lui dans le sens des y, une quantité de chaleur exprimée par $-k\frac{dv}{dy}2\pi y\,dx$; que ce second élément communique à celui qui le suit dans le même sens, une quantité de chaleur égale à

$$-k\frac{dv}{dy}2\pi y\,dx-\delta\left(k\frac{dv}{dy}.\,2\pi y\,dx\right),$$

δ étant ici le signe de la différenciation par rapport à y. Donc

l'élément intermédiaire acquiert, à raison de sa place dans le sens des y, une quantité de chaleur égale à

$$\delta\left(k\,\frac{dv}{dy}\,2\,\pi\,y\,dx\right).$$

Il suit de là que la température de chaque point du solide sera invariable si l'on a l'équation

$$d\left(\frac{dv}{dx}\,y\,dy\right)+\delta\left(\frac{dv}{dy}\,y\,dx\right)=0,$$

ou
$$\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{1}{y}\cdot\frac{dv}{dy}=0,$$

et si en même temps tous les points de la surface sont exposés à une action extérieure qui les oblige de conserver leurs températures initiales. On pourrait aussi déduire cette équation de l'équation générale (E), art. 15.

88. Il est nécessaire de remarquer que l'équation $v=\cos x\int e^{y\cos r}\,dr$ n'exprime qu'un état particulier et possible; il y a une infinité de solutions pareilles, et cette dernière n'aurait lieu qu'autant que la température fixe diminuerait à la surface, depuis l'équateur jusqu'au pôle, suivant une loi conforme à cette même équation

$v=\cos x\int e^{y\cos r}\,dr$. On pourrait aussi choisir l'équation

$$v=a\cos n\,x\int e^{ny\cos r}\,dr,$$

ou
$$v=a\cos n\,x\left(1+\frac{n^2y^2}{2^2}+\frac{n^4y^4}{2^2\,4^2}+\frac{n^6y^6}{2^2\,4^2\,6^2}+\ldots\right),$$

dans laquelle a est une constante indéterminée, et n un nombre arbitraire; et l'on voit que la somme de plusieurs de ces valeurs particulières satisfait encore à l'équation aux différences partielles. Mais on n'a en vue dans cet article

que de faire distinguer, par l'examen d'un cas particulier, comment la chaleur se propage dans la sphère solide dont la surface est inégalement échauffée. C'est ce qu'on peut facilement reconnaître par l'analyse précédente.

Dans l'état particulier que nous considérons, qui est exprimé par l'équation $v = \cos x \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} \ldots\right)$, le rayon de la sphère étant pris pour l'unité, il est facile de voir que la température des points de la surface décroît depuis l'équateur jusqu'au pôle ; que si, par un point quelconque du plan de l'équateur, on élève une perpendiculaire jusqu'à la surface de la sphère, la température décroît comme le cosinus de la distance perpendiculaire à l'équateur, et que pour un parallèle quelconque la température augmente dans le plan de ce parallèle suivant le rayon, depuis le centre jusqu'à la surface. Ainsi la température du centre de la sphère est plus grande que celle du pôle et moindre que celle de l'équateur, et le point le moins échauffé de la sphère est celui qui est placé au pôle.

Pour connaître les directions suivant lesquelles la chaleur se propage, il faut imaginer que le solide est divisé, comme précédemment, en une infinité d'anneaux dont tous les centres sont placés sur l'axe de la sphère. Tous les élémens qui, ayant un même rayon y, ne diffèrent que par leur distance x à l'équateur, sont inégalement échauffés, et leur température décroît en s'éloignant de l'équateur. Un de ces élémens communique donc une certaine quantité de chaleur à celui qui est placé après lui, et ce second en communique aussi à l'élément suivant. Mais l'anneau intermédiaire donne à celui qui le suit plus de chaleur qu'il n'en reçoit de celui qui le précède ; résultat qui est indiqué par le facteur cos x, dont la différentielle seconde est négative. Les élémens du solide qui sont placés à la même

distance x de l'équateur et diffèrent par la grandeur du rayon y, sont aussi inégalement échauffés, et leur température va en augmentant à mesure qu'on s'éloigne de la surface. Chacun de ces anneaux concentriques échauffe celui qu'il renferme : mais il transmet à l'anneau qui est au-dessous moins de chaleur qu'il n'en reçoit de l'anneau supérieur; ce qui se conclut du facteur $1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \ldots$, dont la différentielle seconde est positive.

Il résulte de cette distribution de la chaleur, qu'un élément quelconque du solide transmet au suivant, dans le sens perpendiculaire à l'équateur, plus de chaleur qu'il n'en reçoit dans le même sens de celui qui le précède, et que ce même élément donne à celui qui est placé au-dessous de lui, dans le sens du rayon perpendiculaire à l'axe de la sphère, une quantité de chaleur moindre que celle qu'il reçoit en même temps et dans le même sens de l'anneau supérieur. Ces deux effets opposés se compensent exactement, et il arrive que chaque élément perd dans le sens parallèle à l'axe toute la chaleur qu'il acquiert dans le sens perpendiculaire à l'axe, en sorte que sa température ne varie point. On reconnaît distinctement, d'après cela, la route que suit la chaleur dans l'intérieur de la sphère. Elle pénètre par les parties de la surface voisines de l'équateur, et se dissipe par les régions polaires. Chacun des élémens infiniment petits placés dans l'intérieur du solide échauffe celui qui est placé au-dessous de lui et plus près de l'axe, et il échauffe aussi celui qui est placé à côté de lui plus loin de l'équateur. Ainsi la chaleur émanée du foyer extérieur se propage dans ces deux sens à-la-fois; une partie se détourne du côté des pôles, et une autre partie s'avance plus près du centre de la sphère. C'est de cette manière qu'elle se transmet dans toute la masse, et que chacun des

points, recevant autant qu'il perd, conserve sa température.

Le mouvement uniforme qu'on vient de considérer est extrêmement lent, si on le compare à celui qui s'accomplit dans l'enveloppe extérieure du globe. Le premier résulte de la différence des températures de deux parallèles voisins, et le second, de la différence des températures entre deux points voisins de la surface et placés dans une même verticale. Or cette différence prise entre deux points dont la distance est donnée, est incomparablement plus grande dans le sens vertical que dans le sens horizontal.

Indépendamment des changemens de température que la présence du soleil reproduit chaque jour et dans le cours de chaque année, toutes les autres inégalités qui affectent le mouvement apparent de cet astre, occasionnent aussi des variations semblables. C'est par-là que cette quantité immense de chaleur qui pénètre la masse du globe est assujettie dans tous ses mouvemens aux lois générales qui régissent l'univers. Toutes les causes qui font varier l'excentricité et les élémens de l'ellipse solaire, produisent autant d'inégalités correspondantes dans l'ordre des températures; cet ordre s'altère insensiblement, et se rétablit ensuite dans le cours de ces mêmes périodes qui conviennent aux diverses inégalités.

Le mouvement elliptique qui rend les saisons inégales, n'empêche point que la chaleur qui émane du soleil dans le cours de chaque année ne se distribue également entre les deux hémisphères; mais cette différence dans la durée des saisons influe sur la nature de la fonction périodique qui règle les températures de chaque climat. Il suit de là que le déplacement du grand axe de l'orbe solaire transporte alternativement d'un hémisphère à l'autre ces mêmes variations de température. Au reste, les différences dont il s'agit sont très-peu sensibles, et le progrès en est extrêmement lent. On

doit sur-tout les distinguer de celles qui résultent des causes locales, telles que la configuration du sol, son élévation dans l'atmosphère, la nature solide ou liquide de la surface qui reçoit la chaleur. C'est aux circonstances propres à chaque région qu'il faut attribuer les différences notables qu'on observe entre les températures moyennes des climats pareillement situés dans les deux hémisphères. Les effets des causes locales diffèrent de ceux dont on a parlé, en ce qu'ils ne sont point périodiques, et qu'ils affectent sensiblement la valeur de la température moyenne annuelle.

XIII.

Des Lois mathématiques de l'Équilibre de la Chaleur rayonnante.

89. Si l'on place divers corps, $M, N, P, \ldots$ dans un espace vide d'air, que termine de toutes parts une enceinte solide entretenue par des causes extérieures quelconques à une température constante 1, tous ces corps, quoique distans les uns des autres, prendront une température commune; et cette température finale, dont celle de chaque molécule s'approche de plus en plus, est la même que celle de l'enceinte. Ce résultat ne dépend ni de l'espèce ni de la forme des corps, ni du lieu où ils sont placés; quelles que soient ces circonstances, la température finale sera toujours commune et égale à celle de l'enceinte. Le fait général qu'on vient d'énoncer donne lieu à différentes questions que nous allons traiter dans cet article, en exposant la théorie de la chaleur rayonnante.

Il est certain que l'équilibre de température entre les corps distans s'établit par l'irradiation de la chaleur, en sorte que chaque portion infiniment petite de la surface des

corps est le centre d'un hémisphère composé d'une infinité de rayons. Il se présente d'abord la question de savoir si tous ces rayons ont une égale intensité, ou si leur intensité varie en même temps que l'angle qu'ils font avec la surface dont ils s'éloignent. En général, si deux surfaces infiniment petites s et σ sont inégalement échauffées, et présentées l'une à l'autre, la plus froide acquerra en vertu de leur action mutuelle une nouvelle quantité de chaleur, qui dépend de la distance y des deux surfaces; de l'angle p que fait avec s la ligne y, de l'angle φ que fait avec σ la même ligne y, de l'étendue infiniment petite s et σ de ces deux surfaces, enfin de leurs températures a et b. Nous démontrerons que le résultat de l'action mutuelle de s et σ est exprimé par $\frac{g s \sin p (a-b) \sigma \sin \varphi}{y^2}$. g est un coefficient constant qui mesure la conducibilité extérieure des deux surfaces. Ensuite nous ferons voir que ce théorème suffit pour expliquer distinctement comment s'établit et subsiste, dans tous les cas, l'égalité de température qu'on observe entre divers corps placés dans une même enceinte.

On ignore entièrement aujourd'hui la nature de cette force intérieure dont résulte l'émission de la chaleur, et la cause qui produit les réflexions à la surface. Parmi les physiciens qui ont traité de la chaleur, les uns la considèrent comme une matière propre qui traverse les milieux élastiques et les espaces vides; d'autres font consister sa propagation dans les vibrations d'un fluide extrêmement subtil. Quoi qu'il en soit, il est naturel de comparer les rayons de la chaleur à ceux de la lumière, et de supposer que les corps se transmettent mutuellement la chaleur dont ils sont pénétrés, de même que deux surfaces qui sont inégalement ou également éclairées s'envoient réciproquement leur lumière. C'est dans cet échange de rayons que consiste principalement l'hypo-

thèse proposée par M. le professeur Prevost, de Genève. Cette hypothèse fournit des explications claires de tous les phénomènes connus; elle se prête plus facilement qu'aucune autre aux applications du calcul : il nous paraît donc utile de la choisir, et l'on peut même l'employer avec avantage pour se représenter le mode de la propagation de la chaleur dans les corps solides. Mais, si l'on examine attentivement les lois mathématiques que suivent les effets de la chaleur, on voit que la certitude de ces lois ne repose sur aucune hypothèse physique. Quelque idée qu'on puisse se former de la cause qui lie tous les faits entre eux, et dans quelque ordre qu'on veuille disposer ces faits, pourvu que le système qu'on adopte les comprenne tous, on en déduira toujours les lois mathématiques auxquelles ils sont assujettis. Ainsi l'on ne peut point affirmer que les deux surfaces infiniment petites s et σ s'envoient toutes les deux des rayons de chaleur, quelles que soient leurs températures; on pourrait supposer indifféremment que celle dont la température est la plus élevée est la seule qui transmette à l'autre une partie de sa chaleur : mais, soit qu'on préfère l'une ou l'autre supposition, on ne peut douter que l'effet résultant de l'action des deux surfaces ne soit proportionnel à la différence des températures, aux sinus des angles d'émission et d'incidence, à l'étendue des surfaces, et réciproquement proportionnel au carré de la distance. En effet, il nous sera facile de prouver que, si ces conditions n'étaient point remplies, l'équilibre des températures ne pourrait pas subsister.

On exprime par le coefficient h la quantité de chaleur qui, pendant l'unité de temps, sort de l'unité de surface échauffée à la température 1, et s'échappe dans l'espace vide d'air. Pour faciliter l'application du calcul, on attribue à cet espace infini une température fondamentale désignée par 0, et l'on conçoit qu'une masse dont la température est a

envoie d'elle-même dans cet espace, quelles que soient d'ailleurs les températures de tous les corps environnans, une quantité de chaleur proportionnelle à la température a, et exprimée par $a\,s\,h$. s est l'étendue de la surface extérieure, et h le coefficient qui mesure la conducibilité.

90. Chaque partie infiniment petite ω d'une surface échauffée est le centre d'un hémisphère continuellement rempli par la chaleur rayonnante ; et si l'on pouvait recevoir toute la quantité que cette particule envoie à l'espace environnant pendant l'unité de temps, cette chaleur totale serait exprimée par $a\,\omega\,h$. L'intensité des rayons émis peut n'être pas la même dans tout l'hémisphère, et dépendre d'une manière quelconque de l'angle φ que la direction du rayon fait avec la surface. Pour mesurer l'intensité d'un rayon donné, on supposera que tous les autres qui remplissent en même temps l'hémisphère, contiennent autant de chaleur que lui. Dans cette supposition, la quantité totale envoyée par l'unité de surface pendant l'unité de temps ne sera plus h. On désignera par G cette chaleur totale, et l'on prendra G pour la mesure de l'intensité du rayon dont il s'agit. G est une fonction inconnue du sinus de φ. On aura généralement $G = a\,g\,F(\sin\varphi)$, la température étant désignée par a. Si dans la surface hémisphérique dont le centre est un point de la surface échauffée, on trace une zone qui ait pour hauteur l'arc $d\varphi$ (le rayon étant 1), on aura $2\pi\cos\varphi\,d\varphi$ pour la surface de cette zone. Il est facile d'exprimer la quantité totale de chaleur qui pendant une minute traverse cette zone. En effet, si tous les rayons qui traversent la surface hémisphérique 2π avaient la même intensité que ceux qui passent par la zone $2\pi.\cos\varphi\,d\varphi$, le produit de l'émission pendant l'unité de temps serait, par hypothèse, G ou $a\,g\,F(\sin\varphi)$: donc la chaleur totale qui dans le même

temps passe par la zone, est moindre que G dans le rapport des deux surfaces $2\pi \cos\varphi\, d\varphi$ et 2π. Cette chaleur totale est $\frac{2G\pi\cos\varphi\, d\varphi}{2\pi}$ ou $a\, g\, F(\sin\varphi)\cos\varphi\, d\varphi$. En intégrant cette différentielle depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on doit avoir la quantité $a\, h$: on trouve donc en premier lieu la condition suivante, $h = g\int d\varphi \cos\varphi\, F(\sin\varphi)$. Par exemple, si l'intensité était indépendante de l'angle d'émission et la même pour tous les rayons, on aurait $F\sin\varphi = 1$, et, en intégrant, $h = g$.

Si l'intensité est proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, ce qui est le cas de la nature, comme on le verra bientôt, on aura $F(\sin\varphi) = \sin\varphi$, d'où l'on conclut $h = \frac{1}{2}g$. L'équation $h = g\int d\varphi \cos\varphi\, F(\sin\varphi)$ exprime que h est l'intensité moyenne de tous les rayons émis. Lorsque l'intensité varie comme le sinus, elle est exprimée par $g\sin\varphi$ ou $2h\sin\varphi$: ainsi les rayons émis sous un angle égal à $\frac{1}{3}$ de droit ont une intensité égale à la valeur moyenne; et si tous les rayons étaient semblables à ceux qui sortent perpendiculairement de la surface, le produit de l'émission serait double de ce qu'il est en effet.

91. Ces principes étant établis, nous résoudrons successivement plusieurs questions particulières; et la comparaison des résultats fera connaître, sans aucun doute, la loi du décroissement de l'intensité des rayons.

1.° On suppose que deux surfaces planes parallèles et infinies soient entretenues à une température constante, et qu'ensuite on introduise dans l'espace vide d'air compris

entre ces deux plans un disque infiniment petit, dont la base soit située parallèlement aux deux surfaces (*fig. 1*); il s'agit de déterminer la température finale que ces plans échauffés communiquent au disque. a désigne la température constante des plans, μ est le rayon infiniment petit de la base du disque, dont l'épaisseur est elle-même infiniment petite par rapport à μ. La conducibilité h des deux surfaces échauffées est supposée la même que celle du disque. On fait abstraction de la propriété que toutes ces surfaces pourraient avoir de réfléchir une partie de la chaleur incidente, c'est-à-dire qu'on suppose qu'aucun rayon de chaleur envoyé au disque ne peut être réfléchi. On verra par la suite que la propriété dont il s'agit, à quelque degré que les corps en jouissent, n'apporte aucun changement à l'équilibre de la chaleur rayonnante. f est la distance connue du centre du disque à l'un des plans; r désigne la distance variable du disque à un point m du plan; x, la distance de m au point fixe o; et φ, l'angle entre r et x. G ou $a\,g\,F\,(\sin\varphi)$ désigne, comme précédemment, l'intensité du rayon émis sous l'angle φ à la température a, et l'on a l'équation de condition $h = g\int d\varphi \cos\varphi\, F\,(\sin\varphi)$, l'intégrale étant prise de $\varphi = 0$ à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Cela posé, le point m envoie au disque infiniment petit un rayon de chaleur qui, traversant la surface sphérique dont le rayon est r, occupe une surface égale à $\pi\,\mu^2 \sin\varphi$. En effet, la forme de ce rayon étant celle d'un cône dont les côtés font un angle infiniment petit, le rapport de la surface de la base à celle de la section perpendiculaire est celui du rayon au sinus de l'angle φ. Désignons par ω la portion infiniment petite du plan qui envoie la chaleur de m en μ sous l'angle φ. Si tous les rayons qui traversent la surface hémisphérique $2\pi r$ avaient la même intensité que le rayon dont il s'agit, le produit de

l'émission serait $\omega\, G$: donc la quantité totale de chaleur qui, partant de ω, tombe sur le disque, est $\frac{\omega\, G\, \pi\, \mu^2 \sin\varphi}{2\, \pi\, r^2}$.
Or tous les points de la couronne circulaire $2\, \pi\, x\, d\, x$, qui a son centre au point o et pour hauteur $d\, x$, envoient leurs rayons au disque sous l'angle φ. On remplacera donc ω par $2\, \pi\, x\, d\, x$; ensuite on mettra au lieu de G sa valeur $a\, g\, F(\sin\varphi)$. On a donc la différentielle $\frac{2\, \pi\, x\, d\, x.\, a\, g\, (F \sin\varphi).\mu^2 \sin\varphi}{2\, r^2}$. Si l'on met au lieu de x et de r leurs valeurs f cotang. φ et f cosèc. φ, la différentielle précédente deviendra $-a\, g\, \pi\, \mu^2 \int d\, \varphi \cos\varphi$ $F(\sin\varphi)$; ou faisant $\sin\varphi = z$, $-a\, g\, \pi\, \mu^2\, d\, z\, F\, z$. Si l'on veut connaître l'action exercée sur le disque par un plan circulaire dont le rayon est X, on désignera par Z la dernière valeur du sinus de φ, et l'on prendra l'intégrale précédente depuis $z = 1$ jusqu'à $z = Z$, ou, ce qui est la même chose, on prendra l'intégrale $a\, g\, \pi\, \mu^2 \int d\, z\, F\, z$ de $z = Z$ à $z = 1$. De plus, on aura $g = \frac{h}{\int d\, z\, F\, z}$, l'intégrale étant prise de $z = 0$ à $z = 1$. Donc la quantité totale de chaleur que le disque reçoit du plan circulaire est $a\, h\, \pi\, \mu^2 \frac{\int_1 dz F z}{\int_2 dz F z}$: la première intégrale est prise depuis $z = Z$ jusqu'à $z = 1$, et la seconde, depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$.

Si l'intensité des rayons est indépendante de l'angle d'émission, la quantité de chaleur que le disque reçoit du plan circulaire est $a\, h\, \pi\, \mu^2\, (1 - \sin\Phi)$, ou $a\, h\, \pi\, \mu^2$ sin verse Υ, en désignant par Φ la dernière valeur de la variable φ, et par Υ la moitié de l'angle dont le sommet est au centre du disque et dont les côtés embrassent le plan.

Si l'intensité décroît comme le sinus de l'angle d'émission, on trouve $a\, \pi\, h\, \mu^2 \cos^2\Phi$, ou $a\, \pi\, h\, \mu^2 \sin^2\Upsilon$.

Si l'on éloigne de plus en plus le disque du plan échauffé,

toutes les autres conditions demeurant les mêmes, l'action du plan décroît dans le premier cas comme le sinus verse du demi-angle au centre, et dans le second, comme le carré du sinus du demi-angle au centre. Dans l'un et l'autre cas, si le plan est infini, la quantité de chaleur que le disque reçoit est $a\,h\,\pi\,\mu^2$, et ne dépend nullement de la distance f.

En général, quelle que soit la fonction F (sin φ), l'expression $a\,h\,\pi\,\mu^2\;\dfrac{\int_1 dz\,F(z)}{\int_2 dz\,F(z)}$ se réduit à $a\,h\,\pi\,\mu^2$ lorsque le plan circulaire est infini; car les termes de la première intégrale deviennent les mêmes que les termes de la seconde. Si donc on suppose que l'intensité des rayons varie suivant une fonction quelconque de l'angle d'émission, et si l'on place le disque parallèlement au plan infini à une distance quelconque, la quantité de chaleur envoyée au disque pendant l'unité de temps sera $a\,h\,\pi\,\mu^2$. Il en sera de même du plan infini supérieur au disque : donc la quantité totale de chaleur reçue par le disque sera $2\,a\,h\,\pi\,\mu^2$.

Soit b la température finale que le disque doit acquérir. La surface totale étant $2\,\pi\,\mu^2$, et la conducibilité h, il s'en échappera pendant l'unité de temps une quantité de chaleur égale à $2\,b\,h\,\pi\,\mu^2$. Or, pour que la température acquise par le disque soit permanente, il faut qu'il reçoive autant de chaleur qu'il en perd; on a donc $2\,b\,h\,\pi\,\mu^2 = 2\,a\,h\,\pi\,\mu^2$, et $b = a$.

Il suit de là que le disque infiniment petit placé parallèlement aux deux plans en un point quelconque de l'espace qu'ils comprennent, parviendra toujours à une température finale égale à celle des deux plans. Ce résultat ne dépend point de la loi suivant laquelle l'intensité des rayons peut décroître à mesure qu'ils deviennent plus obliques.

92. On place une molécule sphérique infiniment petite au centre d'un espace terminé par une surface sphérique qu'on entretient à la température constante a. Il s'agit de déterminer la température finale de la molécule. La conducibilité des surfaces est désignée par h; ρ est le rayon de la molécule; on exprime par G ou $a\,g \sin\varphi$ l'intensité du rayon émis sous l'angle φ; et l'on a, comme précédemment,

$$h = g \int d\varphi \cos\varphi \, F(\sin\varphi).$$

Une portion infiniment petite ω de la surface intérieure de la sphère envoie des rayons de chaleur qui remplissent continuellement l'hémisphère dont le rayon est r. Le rayon qui, parti de ω, tombe sur la molécule, occupe sur la surface hémisphérique égale à $2\pi r^2$ une portion égale à $\pi \rho^2$. Si tous les rayons sortis de ω avaient l'intensité G, la quantité totale de chaleur envoyée par ω pendant l'unité de temps serait ωG. Donc le rayon qui tombe sur la molécule fournit pendant ce même temps une quantité de chaleur égale à $\omega G \frac{\pi \rho^2}{2\pi r^2}$. On a aussi, $\sin\varphi$ étant 1, $G = a g F(1) = \frac{a h F(1)}{\int d\varphi \cos\varphi F(\sin\varphi)}$. Donc la chaleur que la portion ω donne à la molécule est $\omega a h \frac{F(1)}{\int d\varphi \cos\varphi F(\sin\varphi)} \cdot \frac{\pi \rho^2}{2 r^2}$. Le rapport de la surface sphérique à ω étant $\frac{4\pi r^2}{\omega}$, on aura pour l'expression de la chaleur totale reçue par la molécule, $2\pi a h \rho^2 \cdot \frac{F(1)}{\int d\varphi \cos\varphi F(\sin\varphi)}$; ou faisant $\sin\varphi = z$, $2 a \pi h \rho^2 \frac{F(1)}{\int dz Fz}$, l'intégrale étant prise de $z = 0$ à $z = 1$. Soit b la température finale acquise par la molécule : elle dissiperait par sa surface une quantité de chaleur égale à $4 b \pi \rho^2 h$. Donc on aura l'équation

$4\,b\,\pi\,\rho^2\,h = 2\,a\,\pi\,h^2\rho^2 . \frac{F(1)}{\int dz\,Fz}$, ou $b = \frac{1}{2}\,a\,\frac{F(1)}{\int dz\,Fz}$.

Si l'intensité des rayons ne varie point, on a $F(z) = 1$ et $b = \frac{1}{2}\,a$. Il arriverait donc que la molécule placée au centre de la sphère prendrait une température finale égale à la moitié de celle de l'enceinte.

Si l'intensité des rayons décroît proportionnellement au sinus de l'obliquité, on a $F(z) = z$, et $b = a$. Dans ce cas, la molécule acquiert et conserve une température égale à celle de l'enceinte.

93. On propose maintenant de déterminer l'action d'un plan circulaire sur une molécule sphérique placée dans l'axe du plan.

On désigne, comme ci-dessus, par x, r, f, φ, les quantités relatives à la position de la molécule, et à celle du point qui lui envoie de la chaleur. h est la conducibilité de la surface, a la température du plan, G ou $a\,g\,F(\sin\varphi)$ l'intensité du rayon émis par le plan sous l'angle φ.

On trouve facilement, pour l'expression de la quantité de chaleur envoyée à la molécule par la couronne dont la hauteur est dx, la différentielle suivante :

$$2\,\pi\,x\,d\,x .\, a\,g\,F(\sin\varphi)\,\frac{\pi\,\rho^2}{2\pi r^2},$$

$$\text{ou } \pi\,d\,(x^2)\,a\,g\,F(\sin\varphi)\,\frac{\rho^2}{2r^2}.$$

Mettant pour x et r leurs valeurs f cot. φ et f cosée. φ, on aura la différentielle $-\,a\,\pi\,\rho^2\,g.\,F(\sin\varphi).\,\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sin\varphi}$; ou faisant $\sin\varphi = z$, $-\,a\,\pi\,\rho^2\,g.\,\frac{dz\,Fz}{z}$. Mettant pour g sa valeur $\frac{h}{\int dz\,Fz}$, l'intégrale étant prise de $z = 0$ à $z = 1$,

on aura pour l'expression de la chaleur totale reçue par la molécule, $-a \pi \rho^2 h \dfrac{\int_1 \frac{dz}{z} F z}{\int_2 dz F z}$; l'intégrale au numérateur doit être prise de $z = 1$ à $z = Z$, dernière valeur de z, et la seconde, de $z = 0$ à $z = 1$. On peut donc remplacer cette expression par celle-ci : $a \pi \rho^2 h \dfrac{\int_1 \frac{dz . F z}{z}}{\int_2 dz F z}$; la première intégrale doit être prise de $z = Z$ à $z = 1$, et la seconde, de $z = 0$ à $z = 1$.

Si l'intensité des rayons émis est la même pour toutes les obliquités, on a $F z = 1$, et la quantité de chaleur reçue par la molécule est $a \pi \rho^2 h \log. \left(\frac{1}{\sin \Phi} \right)$, en désignant par Φ la dernière valeur de φ. L'action du disque sur la molécule est donc toujours proportionnelle au logarithme de la sécante du demi-angle au centre. Si, en conservant la distance f, on faisait varier le rayon du disque, et que les distances extrêmes R, R', R'',... augmentassent comme les nombres 1, 2, 4, 8, 16,... les quantités de chaleur reçues augmenteraient comme les nombres naturels. On pourrait donc rendre ces quantités aussi grandes qu'on le voudrait.

Il suit de là que si tous les rayons qui s'échappent d'un point d'une surface échauffée avaient une égale intensité, on pourrait, au moyen d'un plan circulaire entretenu à la température constante a, communiquer à la molécule sphérique une température b supérieure à a, et aussi grande qu'on voudrait. En effet, la molécule laisserait échapper par sa surface une quantité de chaleur égale à $4 b h \pi \rho^2$: écrivant donc $4 b h \pi \rho^2 = a \pi \rho^2 h \log. \left(\frac{1}{\sin \Phi} \right)$, on a $\sin \Phi = e^{-4 \cdot \frac{b}{a}}$. Ainsi l'on pourrait toujours déterminer

l'angle Φ en sorte que la température b reçût une valeur quelconque.

Il est facile de voir que ce résultat est entièrement contraire aux faits, et que, par conséquent, l'intensité des rayons émis n'est point la même pour tous les rayons.

Si dans l'expression $a \pi \rho^2 h \dfrac{\int_1 \frac{dz\,Fz}{z}}{\int_2 dz\,Fz}$ on suppose $Fz = z$, c'est-à-dire, si l'intensité décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission, on trouvera après l'intégration $2 a \pi \rho^2 h (1 - \sin \Phi)$. Dans cette seconde hypothèse, l'action du disque est proportionnelle au sinus verse du demi-angle au centre : elle est toujours moindre que $2 a \pi \rho^2 h$.

Si le plan échauffé est infini, la chaleur qu'il donne à la molécule est $2 a \pi \rho^2 h$, quelle que soit d'ailleurs la distance f. En supposant au-dessus de la molécule un second plan infini, également entretenu à la température a, la quantité totale de chaleur reçue par la molécule sera $4 a \pi \rho^2 h$. Si la température acquise était b, cette même molécule perdrait $4 b \pi \rho^2 h$. Donc $b = a$, et par conséquent, si l'on place une molécule sphérique en un point quelconque de l'espace compris entre deux plans entretenus à une température constante, elle acquerra une température égale à celle des deux plans. Ce résultat doit avoir lieu si l'intensité des rayons varie comme le sinus de l'angle d'émission.

94. On déterminera encore l'action d'une surface cylindrique sur une molécule sphérique placée dans un point de son axe.

Le point m (*fig.* 2) envoie à la molécule un rayon de chaleur dont la longueur est r, et qui fait avec la surface dont il sort un angle φ. Il en est de même de tous les points qui sont placés

comme le point m dans une zone cylindrique dont le rayon est f et la hauteur $d\,x$. Il suit de là que la quantité de chaleur envoyée par la zone à la molécule dont le rayon est ρ, a pour expression $\frac{\pi\rho^2}{2\pi r^2}.\,a\,g\,F(\sin\varphi).\,2\,\pi\,f\,d\,x$. On mettra au lieu de x et r leurs valeurs f cotang. φ et f coséc. φ : on trouvera alors $\frac{f\,d\,x}{r^2} = -d\,\varphi$. Donc la différentielle précédente deviendra $-a\,g\,\pi\,\rho^2\,d\,\varphi\,F(\sin\varphi)$. Prenant donc l'intégrale depuis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\varphi = \Phi$, ou prenant l'intégrale avec un signe contraire, depuis $\varphi = \Phi$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, on aura la quantité de chaleur envoyée à la molécule par la partie de la surface cylindrique qui est située à la gauche. Cette quantité est $\frac{a\pi\rho^2 h\int d\varphi F(\sin\varphi)}{\int d\varphi\cos\varphi F(\sin\varphi)}$; l'intégrale du numérateur est prise de $\varphi = \Phi$ à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; et celle du dénominateur, depuis $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. On aura un résultat analogue pour la partie de la surface cylindrique qui est à la droite de la molécule. L'action totale de cette surface sera exprimée par la somme des deux termes.

Si $F(\sin\varphi) = 1$, l'action totale de la surface cylindrique sur la molécule sera $a\,\pi\,\rho^2\,h\,(\Psi + \Psi')$, en désignant par Ψ et Ψ' (*fig. 3*) les angles que font avec la perpendiculaire les deux rayons qui, partant de la molécule, aboutissent aux extrémités du cylindre. Cette action est donc proportionnelle, toutes choses d'ailleurs égales, à l'angle au centre, c'est-à-dire, à celui qui a son sommet à la molécule, et dont les côtés comprennent la surface cylindrique. Si la longueur de cette surface est infinie, la quantité de chaleur reçue par la molécule est $a\,\pi\,\rho^2\,h\,\pi$. La quantité qu'elle laisserait échapper si elle avait la tempé-

rature b serait $4\pi\rho^2 hb$: on a donc $b = a\frac{\pi}{4}$. Donc la molécule placée en un point quelconque de l'axe d'une surface cylindrique échauffée, acquerrait une température moindre que celle de l'enceinte dans la raison des nombres π et 4, en supposant que l'intensité des rayons fût constante sous tous les angles d'émission.

Si cette intensité est proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, on aura $F(\sin\varphi) = \sin\varphi$, et l'on trouvera, pour exprimer l'action de la surface cylindrique, la quantité suivante, $a\pi\rho^2 h(2\sin\Psi + 2\sin\Psi')$. Les deux angles Ψ et Ψ' qui, dans le cas précédent, entrent dans la valeur de l'action totale, sont ici remplacés par leurs doubles sinus. Lorsque la longueur de la surface échauffée est infinie, la mesure de la quantité de chaleur reçue est $4a\pi\rho^2 h$; et comme la molécule ayant la température b dissiperait une quantité de chaleur égale à $4b\pi\rho^2 h$, il s'ensuit que $b = a$. Donc, si l'on place une molécule sphérique dans l'axe d'une surface cylindrique dont la température est fixe, la molécule acquerra la température de l'enceinte, en supposant que l'intensité des rayons émis décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission.

95. Nous déterminerons en dernier lieu quelle est, dans les deux hypothèses précédentes, la température que doit acquérir une molécule sphérique lorsqu'on la place dans l'axe d'une enveloppe cylindrique fermée à ses deux extrémités par des plans circulaires.

Il résulte des théorèmes précédens (art. 93 et 94) que si l'intensité des rayons varie proportionnellement au sinus de l'angle d'émission, l'action de l'enveloppe E (*fig. 4*) équivaut à $a\pi\rho^2 h(2\sin\Psi + 2\sin\Psi')$; que l'action du plan B est $a\pi\rho^2 h(2 - 2\sin\Phi)$ ou $a\pi\rho^2 h(2 - 2\sin\Psi)$, et que

celle du plan B' est $a\pi\rho^2 h(2 - 2\sin\Psi')$. Donc l'action totale de l'enceinte est $4a\pi\rho^2 h$; et, par conséquent, la molécule, étant placée en un point quelconque de l'axe, doit acquérir une température égale à celle que conserve l'enceinte. Ce résultat ne dépend ni des dimensions ni du rapport de la longueur du cylindre au diamètre de la base. Mais, si l'intensité était invariable quel que fût l'angle d'émission, l'action de l'enveloppe serait, comme on l'a vu précédemment, $a\pi\rho^2 h(\Psi + \Psi')$; celle du plan B serait $a\pi\rho^2 h$ $\log.\left(\frac{1}{\sin\Psi}\right)$; celle du plan B' serait $a\pi\rho^2 h \log.\left(\frac{1}{\sin\Psi'}\right)$.
Donc l'action totale des surfaces serait

$$a\pi\rho^2 h(\Psi - \log.\sin\Psi + \Psi' - \log.\sin\Psi').$$

Désignant par b la température finale de la molécule, on aurait

$$b = \frac{1}{4}a(\Psi - \log.\sin\Psi + \Psi' - \log.\sin\Psi').$$

Cette température dépendrait donc de la position de la molécule et de la forme de l'enceinte; elle pourrait devenir, ou moindre que celle de l'enveloppe, ou infiniment plus grande, si l'on plaçait la molécule au centre, ou si on la rapprochait de l'une des bases. Or ce résultat est entièrement contraire aux observations communes : il est donc impossible de supposer que les rayons de chaleur qui sortent sous divers angles d'un même point de la surface des corps, ont une égale intensité.

96. Nous allons présentement démontrer qu'en supposant l'intensité décroissante et proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, il doit s'établir entre tous les corps placés dans un même lieu une température commune, indépendante de leur forme, de leur nombre et de leur situation. Soient deux surfaces

planes infiniment petites s et σ, placées à une distance finie; c'est-à-dire que les dimensions des deux figures sont incomparablement plus petites que leur distance y. On suppose que l'une des surfaces est entretenue à la température finie a; il s'agit de trouver combien la seconde σ en reçoit de chaleur dans un temps donné. On n'a point égard ici à la partie de cette chaleur qui pourrait être réfléchie par σ; on veut connaître la quantité totale qui tombe sur cette surface. Soient p l'angle que la distance y fait avec s, et φ l'angle qu'elle fait avec σ. Il est évident qu'on peut prendre pour les termes de la distance y deux points quelconques des deux figures s et σ, et que l'on doit regarder comme nulles les variations que les changemens de ces points occasionneraient dans la longueur y et dans les angles p et φ. Chaque portion infiniment petite ω prise sur la surface échauffée est le centre d'un rayon de chaleur qui tombe sur σ. Il faut d'abord connaître combien ce rayon contient de chaleur. Si par un point de la surface σ on mène dans le rayon une section qui soit perpendiculaire à sa direction, il est facile de voir que l'étendue de cette section est $\sigma \sin \varphi$. En effet, les lignes dont le rayon est formé faisant entre elles un angle infiniment petit, on considérera, selon les principes du calcul différentiel, la forme de ce rayon comme prismatique. Or, si l'on mène dans un prisme oblique une section perpendiculaire à l'arête, l'étendue de cette section est $\sigma \sin \varphi$, en désignant par σ la surface de la base et par φ l'angle que fait l'arête avec la base. Pour rendre ce résultat évident, il faut, après avoir divisé le prisme oblique en deux parties au moyen de la section perpendiculaire, transposer ces deux parties, en sorte qu'elles forment un prisme droit ayant pour base les deux sections perpendiculaires : la hauteur du nouveau prisme devient alors égale à la longueur du prisme oblique; donc le rapport des hauteurs respectives de ces deux solides est le rapport inverse de leurs

bases, c'est-à-dire que la surface de la section perpendiculaire équivaut à $\sigma \sin \phi$. Au reste, cette proposition se conclut facilement de la comparaison des pyramides qui, ayant leur sommet en ω (*fig.* 5), ont pour base la surface inclinée mn, ou les trois surfaces mp, rt, qn, perpendiculaires à l'axe y; il est évident que la dernière raison de ces solides est l'unité. Maintenant le rayon qui tombe sur la base $\sigma \sin \phi$ appartient à un hémisphère dont la surface est $2\pi y^2$. La direction de ce rayon faisant avec le plan dont il sort un angle p, son intensité est $agF(\sin p)$; a est la température et g un coefficient constant. Donc la quantité de chaleur envoyée par la portion ω est $\omega\, a\, g\, F(\sin p)\cdot \frac{\sigma \sin \phi}{2\pi y^2}$. Si l'on multiplie cette quantité par le rapport de s à ω, on aura la quantité totale de chaleur que s envoie à σ : cette quantité est

$$\frac{ag}{2\pi}\, s . F . (\sin p)\, \sigma \sin \phi.$$

Supposons maintenant que la surface σ soit aussi à la température a, il est visible qu'elle enverra à s une quantité de chaleur égale à $\frac{ag}{2\pi} \sigma . F(\sin \phi) s . \sin p$.

On voit distinctement par ces deux résultats que si la fonction $F(\sin \phi)$ est le sinus même, l'action de s sur σ sera égale à celle de σ sur s, et que, si cette fonction n'est pas proportionnelle au sinus, les deux actions ne seront point égales. Or il est facile de reconnaître que cette égalité des deux actions réciproques est précisément ce qui constitue l'équilibre des températures. Donc il est nécessaire que l'intensité des rayons qui s'échappent ensemble d'un point d'une surface, soit proportionnelle au sinus de l'angle d'émission.

On a vu précédemment (art. 90, page 182) que le coefficient g est donné par l'équation $h = g\int d\phi \cos \phi\, F(\sin \phi)$, de sorte que l'on a ici $g = 2h$. Donc l'action de s sur σ est

$\frac{s.\sin p.a:h.\sigma.\sin\varphi}{\pi y^2}$. Si les deux surfaces ont des températures inégales a et b, le résultat de leur action mutuelle sera, comme nous l'avons annoncé, proportionnel à

$$\frac{s \sin p\,(a-b)\,h\sigma.\sin\varphi}{y^2}.$$

97. Supposons maintenant qu'un espace vide d'air soit terminé de toutes parts, et que l'enceinte qui le renferme soit, par une cause extérieure quelconque, maintenue à une température fixe a : il faut déterminer l'état final auquel un corps parviendrait si on le plaçait dans un point de cet espace.

Il est visible que l'état dont il s'agit est celui que le corps conserverait sans aucun changement, si on le lui donnait d'abord, et si on le plaçait ensuite dans un point de l'espace échauffé. Or on peut s'assurer facilement que cela aurait lieu si chaque point du corps recevait d'abord la température a de l'enceinte. En effet, une partie infiniment petite quelconque σ de la surface de ce corps est exposée à l'action d'une infinité de petites surfaces s, s', s'', s'''...; elle envoie à chacune d'elles, d'après le théorème précédent, une quantité de chaleur exactement égale à celle qu'elle en reçoit. Donc cette partie σ de la surface du corps ne peut éprouver aucun changement de température. Le corps lui-même, dont tous les points intérieurs ont la température commune a, doit donc aussi conserver cette même température; donc il tendrait continuellement à l'acquérir, si son état initial était différent.

Ces résultats sont entièrement indépendans de la forme de l'enceinte, de celle du corps et du lieu où on le place. Ainsi tous les points de l'espace dont il s'agit ont une même température, savoir, celle que prendraient les molécules que l'on y placerait, et cette température de l'espace est celle de

l'enceinte qui le borne. Lorsque plusieurs corps ont acquis la température commune de l'espace dans lequel ils ont été placés, ils conservent toujours cette température. Un élément quelconque de la surface d'un de ces corps est le centre d'une infinité de rayons qui composent un hémisphère continuellement rempli de chaleur. L'intensité d'un rayon est proportionnelle au sinus de l'angle qu'il fait avec l'élément de la surface dont il sort. Ce même rayon est toujours accompagné d'un rayon contraire qui, ayant la même intensité, se meut dans le sens opposé, et s'avance vers la surface dont le premier s'éloigne. C'est ainsi que chaque point de la surface d'un corps est le centre de deux hémisphères qui se pénètrent mutuellement; l'un est composé des rayons émis et l'autre des rayons contraires envoyés par les autres corps.

98. Si l'on imagine une surface plane infiniment petite ω tracée dans l'espace et pouvant être librement traversée par les rayons de chaleur, lorsque l'équilibre de température sera établi, cet élément recevra une infinité de rayons sur les deux côtés opposés A et A' de sa surface. Ce disque infiniment petit est donc en même temps le centre d'un hémisphère composé de rayons qui tombent sur le côté A de la surface, et celui d'un hémisphère composé de rayons qui s'éloignent de cette même surface A; et il est très-facile de voir que l'intensité de ces rayons incidens ou émis est nécessairement proportionnelle au sinus de l'angle d'incidence ou d'émission. Donc ce côté A de la surface de l'élément ω produit exactement le même effet que si ω faisait partie de la surface d'un corps solide, parvenu à la température commune. Le même raisonnement s'applique à toutes les parties d'une surface quelconque qui, ayant été tracée dans l'espace, serait traversée dans tous les sens par les rayons de chaleur. Donc, si des corps placés dans l'espace ont acquis des températures

égales, et si l'on supprime tout-à-coup un de ces corps, l'équilibre de la chaleur s'établira et subsistera de la même manière qu'auparavant. En effet, les surfaces qui terminent la portion de l'espace que le corps occupait, recevront ou transmettront des quantités de chaleur exactement égales à celles que le corps recevait lui-même, ou envoyait aux corps environnans dont la température était égale à la sienne. Il faut bien remarquer que cette compensation ne peut avoir lieu qu'autant que l'intensité des rayons décroît suivant la loi que nous avons démontrée. Dans toute autre hypothèse, l'effet des rayons envoyés par un corps solide parvenu à la température commune ne serait point le même que celui des rayons qui, après la suppression du corps, traversent librement l'espace qu'il occupait. On voit d'après cela pourquoi le déplacement de diverses masses parvenues à des températures égales n'apporte aucun changement dans l'équilibre de la chaleur.

99. Il faut considérer maintenant que les rayons de chaleur qui tombent sur la surface d'un corps ne pénètrent point tous au-delà de la surface qui les reçoit: une partie de cette chaleur est réfléchie dans l'espace environnant, et s'ajoute à celle que le corps lui-même lui envoie. Cette propriété dépend de l'état de la surface sur laquelle tombent les rayons de chaleur. La quantité des rayons réfléchis est très-grande lorsque la surface est métallique et exactement polie. On remarque aussi des différences considérables dans les quantités de chaleur que les divers corps peuvent envoyer, à températures égales. Ainsi deux surfaces planes, égales et également échauffées, envoient à l'espace environnant des quantités de chaleur très-inégales si l'une est polie et l'autre dépolie ou couverte d'un enduit. Or les observations nous ont appris qu'il y a une relation constante entre la propriété

de réfléchir les rayons et celle de les transmettre. Cette même cause, inconnue jusqu'ici, qui s'oppose à l'admission des rayons incidens et en réfléchit une partie, est également contraire à la projection des rayons que les corps échauffés tendent à envoyer dans l'espace; elle tend aussi à les réfléchir vers l'intérieur des corps, et ne laisse échapper dans l'espace qu'une partie de ces rayons. Toutes les fois que, par un changement quelconque opéré à la surface, on diminue la faculté d'admettre les rayons incidens, on diminue aussi, et dans le même rapport, la faculté de les projeter au dehors. Si l'élément ω de la surface d'un corps parvenu à la température commune de l'espace reçoit un rayon R (*fig. 6*), qui fait avec la surface un angle φ, ce rayon se divise en deux parties $R\alpha$ et $R(1-\alpha)$, dont l'une poursuit sa route en pénétrant dans la masse, et l'autre se réfléchit, comme la lumière, sous le même angle φ. Puisqu'on suppose que le corps est parvenu à la température de l'espace, il suit des principes que nous avons exposés qu'il doit y avoir en même temps un second rayon r égal au précédent, et qui tombe aussi sur la surface en faisant avec elle l'angle φ, suivant une direction contraire à celle du rayon réfléchi $R(1-\alpha)$. Ce rayon incident alterne r se divise, comme le précédent, en deux parties, dont l'une $r\alpha$ pénètre dans la masse et l'autre $r(1-\alpha)$ suit une route contraire à celle du rayon incident R. Si la surface au point ω n'avait point la propriété de s'opposer à l'émission de la chaleur, la température du corps étant devenue constante il s'échapperait sous l'angle φ un rayon R' égal à R, et suivant une direction contraire: mais ce rayon projeté R' est, comme le rayon incident R, divisé en deux parties $R'\alpha$ et $R'(1-\alpha)$; l'une poursuit sa route et s'éloigne du corps, tandis que l'autre partie $R'(1-\alpha)$ se réfléchit vers l'intérieur, en suivant la même route que le rayon r. Enfin un quatrième rayon r' égal à R tend également à

sortir sous le même angle φ, suivant une direction opposée à celle de r: mais il se divise en deux parties $r'\alpha$ et $r'(1-\alpha)$, dont l'une s'éloigne du corps et dont l'autre est réfléchie vers l'intérieur de la masse.

On voit par-là que le point ω envoie selon la direction de r' les deux rayons $r'\alpha$ et $R(1-\alpha)$, et qu'il envoie aussi selon la direction de R' les deux rayons $R'\alpha$ et $r(1-\alpha)$. Ce même point reçoit dans l'intérieur du solide selon la direction R les deux rayons $R\alpha$ et $r'(1-\alpha)$; enfin il reçoit selon la direction r les deux rayons $r\alpha$ et $R'(1-\alpha)$. Comme les quantités R, r, R', r', sont égales par l'hypothèse, il s'ensuit que l'élément ω reçoit sous l'angle φ un rayon égal à R, et qu'il envoie aussi sous cet angle un même rayon R; c'est ce qui aurait lieu si la surface était entièrement privée de la propriété de réfléchir les rayons. Donc l'existence de cette propriété, et son plus ou moins d'intensité, n'apportent aucun changement dans l'équilibre de la chaleur.

Il n'en serait pas de même si la fraction α qui convient aux rayons incidens R et r, n'était point la même que celle qui convient aux rayons projetés R' et r'. Il arriverait alors que la quantité de chaleur admise différerait de la quantité de chaleur émise, et la température du corps ne serait point constante. Supposons, par exemple, que le corps M, parvenu à la température commune A de l'espace, soit tout-à-coup remplacé par un corps N de même forme, de même substance et de même température que le premier, mais qui en diffère par l'état de la surface. Ce corps N ne pourrait point conserver la température A, si le changement de la surface qui augmente ou diminue la facilité de réfléchir les rayons, ne modifiait pas également la facilité de les émettre dans l'espace : or il est entièrement contraire aux faits de supposer que le corps N prenne une température différente de A; donc il n'y a

aucun doute que la surface réfléchissante n'exerce également son action contre les rayons qui tendent à pénétrer dans le solide, et contre ceux qui tendent à en sortir. Il suit de là que, dans l'équilibre de la chaleur, l'intensité des rayons émis décroît proportionnellement au sinus de l'angle d'émission, quelle que soit d'ailleurs la nature des surfaces; il faut seulement concevoir que les rayons réfléchis s'ajoutent à ceux que le corps envoie de lui-même, et que ces deux parties composent le rayon émis, dont l'intensité décroît comme le sinus de l'angle d'émission.

Cette propriété de repousser les rayons incidens, qui varie beaucoup avec l'état des surfaces et qui n'apporte aucun changement dans l'état d'équilibre, a une influence considérable sur les progrès de l'échauffement et du refroidissement. Si le corps M, placé dans l'espace dont la température commune est A, a lui-même une température inférieure B, les rayons R et R' n'auront plus la même intensité, et il est facile de voir que l'augmentation de chaleur produite par le rayon R sera proportionnelle à $\alpha\,(R - R')$. Donc la masse s'échauffera d'autant plus vîte que la fraction α approchera plus de l'unité. Si la surface jouissait à un très-haut degré de la propriété de réfléchir la chaleur, le coefficient α serait très-petit, et le corps s'échaufferait ou se refroidirait avec une extrême lenteur.

Ainsi, lorsque, dans un espace vide d'air que termine une enceinte solide entretenue à une température constante, on place plusieurs masses solides qui diffèrent par la substance et par la figure ou par l'état des surfaces, ces divers corps, quelle que soit leur température initiale, tendent continuellement à acquérir une température commune, qui est celle de l'enceinte. Ils s'échauffent ou se refroidissent plus ou moins lentement, selon qu'ils jouissent à un plus haut degré de la propriété de réfléchir les rayons incidens; mais cette qualité

n'influe ni sur la valeur de la température finale, ni sur la loi du décroissement de l'intensité des rayons émis dans l'état d'équilibre. Si, par exemple, l'un de ces corps réfléchit toute la chaleur qui lui est envoyée, en sorte que la valeur de a soit nulle, il n'acquerra jamais la température commune; mais il contribuera également à l'équilibre de la chaleur, en réfléchissant les rayons qui tombent sur lui, et dont il ne change point la température.

Il faut bien remarquer que les rayons qui sortent de l'intérieur du solide, et qui, après avoir rencontré une surface propre à les réfléchir, changent de direction, en continuant de se propager dans l'espace, conservent toujours leur température primitive; celle de la surface réfléchissante ne peut ni augmenter ni diminuer la température des rayons réfléchis, en sorte que le corps qui absorbe ces derniers rayons, en reçoit la même impression que s'ils lui étaient envoyés directement. Ce fait est connu depuis long-temps, et se manifeste dans les observations sur la réflexion du froid; il est devenu très-sensible dans plusieurs expériences que nous avons faites récemment pour observer les lois de l'émission de la chaleur. Par exemple, on a transporté un plateau de glace *G* (*fig. 7*) dans une pièce fermée, dont toutes les parties avaient acquis une température constante supérieure à o. On y avait placé un thermoscope *T* très-sensible et qui était devenu stationnaire. Lorsqu'on présentait le plateau *G* à une certaine distance du thermoscope, l'indice se mettait aussitôt en mouvement, et se rapprochait de la boule. En effet, avant que le plateau de glace fût apporté, la boule du thermoscope recevait de toutes parts des rayons également chauds; et comme elle envoyait elle-même une quantité de chaleur égale à celle qu'elle recevait, elle conservait sa température: mais, lorsque la masse *G* était placée, cette masse interceptait une partie des rayons qui tombaient auparavant sur la boule, et ces

rayons étaient remplacés par des rayons plus froids, sortis de la glace. C'est pour cela que la température du thermoscope s'abaissait jusqu'à ce que la quantité de chaleur envoyée par la boule devînt égale à celle qu'elle recevait. On approchait ensuite une surface métallique polie *M*, propre à réfléchir sur la boule *T* les rayons sortis du corps glacé *G*; alors la température du thermoscope s'abaissait de nouveau d'une quantité considérable. En effet, en plaçant le miroir *M*, on interceptait encore une partie des rayons que la boule *T* recevait des corps environnans; ces rayons étaient remplacés par ceux qui sortaient de l'intérieur même du miroir, et aussi par ceux qui, sortis de la masse froide *G*, se réfléchissaient à la surface du miroir et tombaient sur la boule *T*. Cette boule recevait donc, après qu'on avait approché le miroir, plus de rayons froids et moins de rayons chauds qu'auparavant; c'est pour cette raison que la présence du miroir *M* fait toujours abaisser la température. Lorsque le miroir *M* n'était point placé, la boule *T* se trouvait seulement exposée aux émanations d'un plateau de glace; mais, lorsque le miroir était en *m*, cette boule se trouvait, pour ainsi dire, placée entre deux masses froides, en sorte qu'elle perdait une nouvelle partie de sa chaleur.

Avant qu'on plaçât le miroir *M*, il était ordinairement entretenu à la température de l'appartement: mais nous avons plusieurs fois échauffé ce miroir de quelques degrés au-dessus de cette température commune; dans cet état on le plaçait en *m*, et il arrivait encore que la boule *T* se refroidissait très-sensiblement. Les rayons plus chauds sortis du miroir même ne suffisaient point pour compenser l'effet des rayons émanés du plateau et réfléchis par sa surface sur la boule *T*. Nous avons toujours observé que, si l'on approchait de *T* le miroir *Mm*, en plaçant cette dernière surface de telle manière qu'elle ne pût réfléchir sur *T* les rayons émanés de *Gg*, la tempéra-

ture du thermoscope s'élevait, le miroir *M m* étant plus échauffé que les corps environnans : mais, lorsqu'on mettait cette même surface *M m* dans la situation propre à réfléchir sur la boule *T* les rayons sortis de *G g*, la température du thermoscope s'abaissait.

Si ensuite on enlevait le plateau de glace, l'indice du thermoscope commençait aussitôt à se mouvoir ; il s'élevait jusqu'à ce qu'il marquât une température supérieure à celle de l'appartement. Enfin, en retirant le miroir, l'indice se rapprochait de la boule, et marquait la température commune. Au reste, ces résultats sont connus de tous les physiciens qui ont observé attentivement les effets de la chaleur. Ils s'expliquent très-facilement, lorsque l'on considère que la température des surfaces réfléchissantes n'influe point sur celle des rayons réfléchis.

100. Pour achever cette théorie de l'équilibre de la chaleur rayonnante, il nous reste à découvrir la cause qui fait diminuer l'intensité des rayons émis proportionnellement au sinus de l'angle d'émission. On parviendra à l'explication mathématique de ce phénomène, en examinant comment toutes les molécules infiniment voisines de la surface concourent à l'émission perpendiculaire ou oblique de la chaleur.

Supposons que le plan *A B (fig. 8)* termine une masse solide échauffée qui conserve la température *a*, et sépare cette masse du milieu environnant qui conserve la température o ; chaque point du plan *A B* pourra être regardé comme le centre d'un hémisphère continuellement rempli de chaleur. La question consiste à comparer l'intensité des rayons obliques à celle des rayons perpendiculaires.

Il résulte, en premier lieu, de toutes les observations, qu'il n'y a qu'une couche extrêmement mince des corps opaques qui puisse contribuer à la projection immédiate de

la chaleur. Ainsi, en concevant le solide divisé en un très-grand nombre de couches parallèles d'une très-petite épaisseur, on voit que la couche extrême terminée par le plan *A B* est la seule qui puisse porter immédiatement jusque dans le vide la chaleur dont elle est pénétrée. Mais les différentes parties de cette dernière couche ne concourent point également à cet effet, quoiqu'elles aient toutes la même température que les points de la surface. Les points qui sont situés à la superficie, envoient la chaleur dans tous les sens avec une égale facilité : ceux qui sont un peu au-dessous de la surface, n'envoient pas aussi facilement la chaleur au-delà des limites du corps ; celle qu'ils projettent s'arrête en partie sur les molécules solides qui les séparent de l'espace extérieur : il n'y a qu'une partie de cette chaleur projetée qui parvient jusqu'à l'espace et qui s'y répand. De plus, ces mêmes points envoient moins de chaleur jusqu'aux limites du corps en suivant une direction oblique, que selon la perpendiculaire. Cette différence provient encore de l'interposition des molécules solides, qui sont en plus grand nombre dans les directions obliques.

Chaque point de la normale *o m* envoie perpendiculairement à la surface, suivant *m o*, une certaine quantité de chaleur; et chaque point de cette même normale envoie aussi jusque dans l'espace *E* une certaine quantité de chaleur suivant une direction oblique, parallèle à une ligne donnée *C D*. Soit μ la quantité totale de chaleur que le filet solide *o m* projette jusque dans l'espace extérieur *E*, perpendiculairement à la surface *A B*; et soit ν la quantité totale de chaleur que le même filet solide projette jusque dans l'espace, selon la direction parallèle à *C D* : on va démontrer qu'on a toujours l'équation $\nu = \mu \sin \varphi$, φ étant l'angle que *C D* fait avec le plan. Le même raisonnement pouvant s'appliquer à tous les filets perpendiculaires dont la base est sur le plan *A B*,

on en conclura que la quantité totale de chaleur qui traverse le plan selon la direction perpendiculaire, est à la quantité totale qui le traverse selon la direction parallèle à CD, dans le rapport de 1 à $\sin \varphi$: tout se réduit donc à comparer les quantités μ et ν.

Supposons qu'à la distance $o\alpha$ (*fig.* 9) la molécule α puisse envoyer selon la normale, et jusque dans l'espace extérieur, une quantité de chaleur désignée par l'ordonnée αp. Concevons en général que l'on ait décrit une courbe $m p q$, dont chaque ordonnée αp ou βq représente la quantité de chaleur qui peut être envoyée dans l'espace, selon la normale, par la molécule α ou β placée à l'extrémité de l'abscisse qui répond à cette ordonnée αp ou βq. La ligne $m p q$ dépend, suivant une loi inconnue, de la nature de la substance solide, et l'on peut dire que chacune de ces substances a une certaine courbe qui lui est propre. Le point d'intersection entre la courbe et l'axe $o m$ est le dernier point de cette normale qui puisse projeter une partie de la chaleur jusque dans l'espace E; celle qui est envoyée par les autres points plus éloignés de o, ne parvient point jusqu'aux limites du solide. Il est facile de voir que la quantité totale de chaleur μ envoyée perpendiculairement par la ligne $o m$ dans l'espace E est représentée par l'aire comprise entre $o m$ et $m p q$.

On trouvera maintenant la quantité totale ν que cette même ligne envoie à l'espace parallèlement à la direction CD, en concevant une seconde courbe $m' p' q'$, dont les ordonnées représentent les quantités de chaleur envoyées selon la direction CD. Ainsi, pour connaître combien le point α' envoie de chaleur parallèlement à CD jusque dans l'espace E, on menera par ce point α' l'oblique $\alpha' a'$ parallèle à CD; ensuite on portera cette ligne $\alpha' a'$, de o en α, sur l'axe de la première courbe. L'ordonnée αp désignera la quantité de chaleur envoyée obliquement. On élevera donc en α' l'ordonnée $\alpha' p'$ égale à αp.

On construirait par ce moyen la seconde courbe $m' p' q'$, et l'aire comprise entre cette courbe et la normale $o\, m'$ exprimerait le produit total ν de l'émission oblique. Or, si l'on compare ces deux courbes, on voit que pour une même abscisse $\alpha\, p$ ou $\alpha'\, p'$ les ordonnées correspondantes sont dans un rapport constant, qui est celui de 1 à sin φ. Donc ce rapport est celui des aires μ et ν; ainsi l'on a cette relation, $\nu = \mu \sin \varphi$.

On obtient aisément ce résultat sans employer les constructions. En effet, soit $\varphi\, \alpha$ la fonction inconnue qui exprime combien le point placé au-dessous de la surface, à une distance perpendiculaire α, peut envoyer de chaleur au-delà de cette surface, selon la direction de la normale; et soit a la plus grande valeur que puisse avoir α, c'est-à-dire que, si la distance α est plus grande que a, la valeur de $\varphi\, \alpha$ est toujours nulle. L'intégrale $\int d\alpha\, \varphi\, \alpha$, prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = a$, donnera la valeur de la quantité totale μ envoyée perpendiculairement dans l'espace par le filet solide $o\, m$. Mais, si l'émission est oblique, le même point α se trouvera distant du point de la surface où il dirige ses rayons d'une quantité égale $\frac{\alpha}{\sin \varphi}$; donc il ne pourra envoyer dans l'espace extérieur qu'une quantité de chaleur exprimée par $\varphi\left(\frac{\alpha}{\sin \varphi}\right)$. L'intégrale $\int d\alpha\, \varphi\left(\frac{\alpha}{\sin \varphi}\right)$, prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = a$, sera donc la valeur du produit total ν de l'émission oblique. Soit $\frac{\alpha}{\sin \varphi} = \beta$: on aura

$$\int d\alpha\, \varphi\left(\frac{\alpha}{\sin \varphi}\right) = \sin \varphi . \int d\beta\, \varphi\, \beta,$$

et cette seconde intégrale devra être prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = a$; ou, ce qui est la même chose, depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = a \sin \varphi$. Mais il est évident, d'après l'hypothèse,

que toute valeur de β plus grande que $a \sin \varphi$ donnerait des valeurs nulles pour $\varphi(\beta)$: donc l'intégrale $\int d\beta\, \varphi\, \beta$ peut être prise depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = a$; ainsi elle ne diffère point de $\int d\alpha\, \varphi\, \alpha$ prise depuis $\alpha = 0$ jusqu'à $\alpha = a$. On a donc $v = \sin \varphi \int d\alpha\, \varphi\, \alpha = \mu \sin \varphi$.

Il suit de là que, sans connaître la fonction $\varphi\, \alpha$, qui varie avec la nature de chaque substance solide, on est assuré que la quantité totale de chaleur qui sort perpendiculairement d'une surface échauffée, est plus grande que la quantité qui sort obliquement de cette même surface, et que le rapport de ces deux quantités est celui du rayon au sinus de l'angle d'émission.

On voit maintenant que l'on pourrait parvenir de différentes manières à déterminer cette loi du décroissement de l'intensité des rayons. Nous avons obtenu ce résultat en considérant l'égalité qui s'établit entre les températures des corps placés dans une enceinte commune; nous aurions pu le déduire de l'examen même de la cause qui le produit; enfin il est expressément indiqué par les expériences, comme le prouvent les ouvrages de MM. Leslie, Rumford, et Prevost de Genève.

L'existence de cette loi est une conséquence certaine des causes qui déterminent la propagation de la chaleur dans les corps solides. C'est pour cette raison que le théorème énoncé en la page 180 nous a paru avoir une connexion nécessaire avec la matière que nous traitons, quoiqu'il se rapporte au mouvement de la chaleur dans le vide. Nous aurions regardé comme incomplète la théorie de la propagation de la chaleur dans les solides, si nous n'avions point considéré la loi à laquelle cette propagation est assujettie dans l'enveloppe extrêmement mince qui termine les corps, et si nous n'avions point expliqué comment ces mêmes corps solides parviennent, indépendamment du contact, à l'équilibre de température.

Nous devons donc espérer que cette partie de notre ouvrage ne sera point regardée comme étrangère à l'objet principal que nous nous sommes proposé.

Le traité que M. le professeur Prevost a publié en 1809 sur la chaleur rayonnante, contient l'exposition des phénomènes connus qui dépendent de cette théorie. L'auteur a donné le premier une hypothèse physique qui explique très-clairement la réflexion apparente du froid et toutes les circonstances de l'équilibre de la chaleur. M. le docteur Leslie, d'Édimbourg, et M. le comte de Rumford, ont enrichi cette branche de la physique d'un grand nombre de faits nouveaux. Toutes ces découvertes ont été préparées et excitées par les recherches de M. M.-A. Pictet, à qui l'on doit des expériences capitales, et qui a fait connaître le premier toute l'importance des recherches de ce genre (*Essai sur le feu*, publié en 1790).

MM. Leslie et Prevost avaient déjà considéré comme indiquée par les observations la loi du décroissement de l'intensité des rayons obliques. Le premier attribue d'abord cette loi à l'émission de la lumière. Voici ses expressions: « Puis- » que le boulet devenu rouge ne se distingue pas d'un disque » lumineux, il s'ensuit que la lumière est émise avec moins » d'abondance dans les directions obliques, et que la densité » des rayons est à peu près comme le sinus de leur déviation » de la perpendiculaire. »

M. Prevost, après avoir cité ces mêmes expressions, ajoute: « Voilà une analogie dont on peut faire l'application au calo- » rique rayonnant, et, en effet, des expériences que nous rap- » porterons portent à croire que l'émission du calorique est » assujettie à la même loi. » Et plus loin: « J'ai dit ci-dessus » qu'il paraissait, par quelques expériences de M. Leslie, que » le calorique émanait avec plus d'abondance selon la direc- » tion perpendiculaire à la surface qui l'émet, que selon toute

» autre direction : voici les expériences qui rendent ce fait » probable. »

Elles consistent principalement dans l'observation qu'a faite M. Leslie, de l'effet produit par une surface échauffée à laquelle on donnait des situations plus ou moins obliques.

On place un miroir métallique concave *m* (*fig.* 10), d'une forme parabolique, devant une surface plane échauffée *vv*, dont les rayons, réfléchis par le miroir, échauffent la boule *t* d'un thermoscope placé près du foyer. Deux plans *e e* interceptent une partie des rayons envoyés par le plan échauffé *vv*, et ces écrans sont séparés par un intervalle *n n*, qui laisse parvenir une partie des rayons en *m m m*. Après avoir observé et mesuré l'effet que produisent sur le thermoscope les rayons émanés du plan échauffé dans la position *v v*, on change cette position, et l'on donne à la surface la direction *v′ v′*, sans changer la place du centre. On observe alors que l'effet produit sur le thermoscope est à très-peu près le même qu'auparavant.

Il faut supposer, 1.° que la température de la surface est la même en *v v* et en *v′ v′*, ou qu'on tient compte de la diminution de température; 2.° que le déplacement n'est point assez grand pour que la ligne *v′ n*, qui passe par l'extrémité du plan échauffé et celle de l'écran, cesse de rencontrer le miroir.

M. Leslie, après avoir rapporté ces expériences, et remarqué des circonstances accessoires qui lui paraissent devoir se compenser presque exactement, ajoute : « Je suis disposé à » compenser ce déficit par ce que j'ai remarqué ci-dessus. » Nous pouvons donc conclure en général que l'action éloi- » gnée d'une surface échauffée est équivalente à celle de sa » projection orthographique, et doit être estimée par la gran- » deur visuelle de la source. »

On voit par ces citations qu'en observant les effets des

rayons obliques, on a été naturellement conduit à leur attribuer une intensité variable et proportionnelle au sinus de l'angle d'émission.

L'action de la chaleur rayonnante est assujettie dans les espaces vides d'air aux lois mathématiques que nous avons exposées : mais, lorsqu'elle se propage dans l'atmosphère, elle suit des lois différentes et beaucoup moins simples, qui sont aujourd'hui presque entièrement ignorées. L'air interposé reçoit en partie la chaleur rayonnante, et il agit ensuite lui-même sur les corps voisins. Nous avons plusieurs fois constaté par des expériences attentives cette influence marquée de la présence de l'air. Comme l'emploi des miroirs concaves complique les résultats en même temps qu'il les rend plus sensibles, nous avons mesuré l'action directe d'une surface échauffée sur la boule d'un thermoscope qu'on plaçait à différentes distances. On a apporté un soin extrême dans ces observations ; et l'on a reconnu que les lois qui seraient observées dans les espaces vides sont notablement altérées par l'action de l'air intermédiaire. Ainsi l'effet produit par une surface inclinée se rapproche visiblement de celui de la projection orthographique ; mais il y a toujours une différence très-sensible entre les deux résultats.

Pour rendre plus manifeste cet effet de l'interposition de l'air, on avait introduit dans une enveloppe conique, et vers le sommet en *t* (*fig. 11*), la boule d'un thermoscope ; on plaçait ensuite ce récipient à côté et au-dessus d'une surface échauffée *v v*; un écran *e e* empêchait les rayons sortis de *v v* de tomber directement sur la surface intérieure du récipient. On a toujours remarqué que la boule du thermoscope s'échauffait rapidement, et il a été facile de reconnaître que cela provenait de l'air intermédiaire *m m m*, qui, étant échauffé, montait dans le récipient. Ainsi tout corps exposé dans l'air à l'action directe d'une surface échauffée éprouve en même temps celle

d'une masse fluide qui l'environne de toutes parts, et cet effet accessoire est une partie notable de l'effet principal.

Ces mêmes expériences qui avaient pour objet de mesurer avec précision l'action directe d'une surface échauffée sur la boule du thermoscope, nous ont donné lieu d'examiner comment l'accroissement de la distance, en augmentant la quantité d'air interposé, concourt à la diminution de l'effet produit : mais nous avons obtenu des résultats sensiblement différens de ceux qui auraient lieu d'après la règle proposée par M. Leslie, et qu'il a conclue de quelques-unes de ses observations sur la chaleur réfléchie.

Quant à l'action des rayons solaires, elle doit, à plusieurs égards, être distinguée de celle de la chaleur obscure. Nous appelons ainsi celle qui, ne pouvant traverser directement les liquides diaphanes, ne rend point les corps visibles. Pour faire connaître la nécessité de cette distinction, il nous suffira de rapporter l'expérience suivante, que nous avons faite récemment.

On a placé au-devant de la boule d'un thermoscope un plateau de glace transparente, d'une épaisseur assez considérable ; on a ensuite approché rapidement au-devant du plateau une plaque de fer très-échauffée, mais non lumineuse ; on n'a remarqué aucun mouvement dans l'indice du thermoscope (la boule était garantie, de toutes parts, de l'accès de l'air échauffé, et l'on avait pris toutes les précautions requises). On a ensuite retiré la plaque échauffée, et on l'a remplacée par la flamme d'une bougie ordinaire : aussitôt l'indice du thermoscope s'est mis en mouvement. On a répété plusieurs fois ces épreuves, et l'on n'a pu observer quelque mouvement dans le thermoscope qu'en faisant rougir la plaque métallique. L'instrument était très-sensible, car l'étendue d'un degré octogésimal était d'environ deux pouces ; et il était aussi très-mobile, car l'indice commençait à marcher lorsqu'on présentait

la main étendue au-devant de la boule à quatre ou cinq pieds de distance.

Il résulte de cette expérience et de plusieurs autres que la chaleur rayonnante, qui ne pénètre point directement les liquides diaphanes, soit parce qu'elle manque de vîtesse, soit pour toute autre cause, ne se comporte point dans l'air et dans les solides transparens comme celle qui émane des foyers lumineux. Il faudra donc avoir égard à cette distinction lorsqu'on entreprendra de déterminer l'action des rayons solaires sur l'atmosphère et sur les eaux. Ces recherches ne peuvent être fondées que sur une longue série d'observations. Au reste, elles n'appartiennent point à la matière que nous traitons aujourd'hui. Il faut bien remarquer qu'en soumettant au calcul la question des températures terrestres, nous avons écarté tout ce qu'il pourrait y avoir d'hypothétique et d'incertain dans la mesure de l'effet des rayons solaires. En effet, on peut regarder l'état de la surface du globe comme donné par les observations, et il s'agit ensuite d'en déduire l'état des molécules intérieures. Cette dernière question dépend entièrement de notre théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides.

XIV.

Comparaison des Résultats de la Théorie avec ceux de diverses Expériences.

101. Il nous reste à comparer les résultats que fournit l'analyse avec ceux de nos propres expériences. Ces observations ont été faites avec beaucoup de soin, et souvent répétées. Le nouveau degré de précision que nous sommes parvenus à leur donner, nous a fait reconnaître une conformité encore plus exacte entre les faits et la théorie. Pour établir avec

ordre cette comparaison, nous avons considéré, dans les diverses questions, les résultats les plus remarquables et qu'on peut constater avec précision. Ainsi, la théorie faisant connaître que les températures fixes de divers points placés à distances égales sur la circonférence de l'armille forment une série récurrente (art. 10), nous avons cherché à vérifier ce résultat en mesurant les températures a, b, c, d, de quatre points consécutifs, et en comparant le quotient $\frac{a+c}{b}$ au quotient $\frac{b+d}{c}$, qui doit être le même que le précédent.

Il n'est pas moins facile d'observer, pendant le refroidissement de l'armille, les températures A et A' de deux points situés aux deux extrémités d'un même diamètre, et de les comparer aux températures B et B' de deux autres points situés aux extrémités d'un autre diamètre. Les deux sommes $A+A'$ et $B+B'$ doivent tendre de plus en plus à devenir et à demeurer égales pendant la durée du refroidissement (art. 37). Il faut examiner si cette relation, donnée par la théorie, se manifeste dans les expériences.

On a vu aussi que le système variable des températures des différens points d'un corps donné s'approche continuellement d'un état régulier et final, dans lequel les rapports des températures ne changent plus avec le temps, chacune d'elles décroissant comme l'ordonnée d'une même logarithmique dont le temps est l'abscisse. Il s'agit donc d'observer les températures v_1, v_2, v_3, v_4, &c. d'un point déterminé, correspondantes aux temps t_1, t_2, t_3, t_4, &c., et de comparer entre elles les quantités $\frac{\log v_1 - \log v_2}{t_2 - t_1}$, $\frac{\log v_2 - \log v_3}{t_3 - t_2}$, &c. afin de reconnaître si ces quantités sont ou deviennent sensiblement égales, comme la théorie le suppose.

En général, le calcul nous apprenant que la chaleur affecte

toujours dans l'intérieur des solides une disposition régulière et symétrique, il est intéressant de rendre ces propriétés sensibles par l'expérience, et de pouvoir distinguer à quelque caractère certain si le système des températures est entré et persiste dans cet état régulier, indépendant de l'échauffement initial.

Nous n'avons pas eu seulement pour but dans ces expériences de vérifier les résultats remarquables de la théorie; nous les avons encore choisies telles qu'on pût connaître pour une substance (le fer) les trois qualités spécifiques qu'il est nécessaire de mesurer pour faire l'application des formules. Ces élémens sont la conducibilité propre, la conducibilité extérieure et la capacité spécifique de chaleur.

La première expérience a été faite sur un anneau de fer poli, exposé par un de ses points à l'action d'une chaleur constante. On a placé sur trois supports de bois sec un anneau de fer poli d'environ un pied de diamètre; son plan est horizontal; il est percé de six trous, comme on le voit dans la *figure 12*. Les trois premiers occupent le quart de la circonférence, et leur distance est du huitième de cette circonférence; les trois autres leur sont diamétralement opposés (1). Les trous ne pénètrent point jusqu'à la surface inférieure, mais seulement au-delà du milieu de l'épaisseur. On a placé dans l'armille divers thermomètres, en sorte que le centre du réservoir de chacun correspondît au milieu de l'épaisseur; on a ensuite rempli avec du mercure les trous où l'on avait mis les thermomètres; ceux qui restaient et qui n'avaient pas de thermomètres ont aussi été remplis avec du mercure. On a échauffé l'anneau en plaçant au-dessous une lampe d'Argant

(1) Le diamètre total mp est $0^m,345$; le diamètre intérieur nr est $0^m,293$; l'épaisseur mn est $0^m,026$; la hauteur pq, $0^m,040$: pour chacun des trous le diamètre est $0^m,0145$; la hauteur, $0^m,0240$.

dont on pouvait augmenter ou diminuer la flamme. On observait la température de l'appartement au moyen d'un thermomètre libre ; l'air était tranquille ; on tenait échauffée une pièce voisine du lieu de l'expérience, et l'on entr'ouvrait, lorsqu'il était nécessaire, la porte de communication avec cette étuve. On est parvenu ainsi à retenir dans un degré fixe la température de l'air. Le point au-dessous duquel on avait mis le foyer était très-voisin d'un des thermomètres placés dans l'armille, et l'on réglait continuellement l'activité de la flamme, en sorte que ce thermomètre marquait un degré fixe. En apportant beaucoup de soin dans ces expériences, on est parvenu, après des tentatives réitérées, à entretenir dans un état fixe, pendant plus de cinq heures consécutives, la température de l'air et celle du thermomètre voisin du foyer. Les thermomètres plus éloignés se sont élevés successivement ; leur mouvement s'est ralenti de plus en plus, ensuite il a cessé. Les températures ont été stationnaires pendant un long temps, et alors on les a observées. On a fait plusieurs expériences de ce genre, en variant la position des foyers, celle des thermomètres, et l'état des surfaces, qui étaient très-polies, ou enduites, ou recouvertes de diverses enveloppes. Quelquefois on a exposé l'anneau à l'action constante de plusieurs foyers appliqués à des points différens. Dans tous ces cas, on observait les températures stationnaires A, B, C de trois thermomètres consécutifs, et, retranchant la température commune de l'air, on comparait les trois élévations a, b, c, afin de connaître le rapport $\frac{a+c}{b}$. Chaque expérience donnait au moins une valeur de ce rapport, et l'on a remarqué en effet que cette valeur était constante (*voir* art. 10), et qu'elle ne dépendait ni de l'intensité des foyers, ni des points où ils étaient placés. Mais ce quotient change avec l'état des surfaces, et il varie aussi lorsque la distance de

deux thermomètres consécutifs devient plus grande. En désignant par q la valeur que prend ce rapport lorsque la distance de deux thermomètres est un huitième de la circonférence, et par r la valeur qui convient à une distance double, on a trouvé par la théorie la relation suivante $q = \sqrt{r+2}$; ce qui est exactement conforme aux observations (*voy.* art. 10, et ci-dessous, page 218).

On va maintenant rapporter les résultats numériques des six observations qui ont été faites sans que l'état des surfaces fût changé. 1.° Les thermomètres *a, b, c, d,* étaient placés comme l'indique la *figure 13*. Le foyer permanent était au-dessous du point f voisin du point c; le thermomètre c, qui était en ce dernier point, a marqué constamment $99^d \frac{1}{3}$ à l'échelle octogésimale, et la température permanente de l'air était de $17^d \frac{2}{3}$. Il s'est écoulé $4^h\ 24'$ depuis le moment où l'on a posé le foyer jusqu'à celui où l'on a mesuré les températures stationnaires : on les a trouvées alors telles qu'elles sont indiquées dans la table ci-jointe. Les points 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, désignent les points de division de la circonférence, partagée en huit parties égales ; $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$, désignent les quantités dont la température de ces points surpasse la température de l'air. Le point c correspond au point 0, et l'on connaît par l'expérience les quatre quantités z_0, z_2, z_3, z_4.

Le thermomètre	marque	Excès de la température du point sur celle de l'air.	Température de l'air.
c	$99^d \frac{1}{3}$.	$z_0 = 81^d \frac{2}{3}$.	
b	66^d.	$z_2 = 48^d \frac{1}{3}$.	
d	$50^d \frac{7}{12}$.	$z_3 = 32^d \frac{11}{12}$.	$17^d \frac{2}{3}$.
a	44^d.	$z_4 = 26^d \frac{1}{3}$.	

Il résulte de la théorie (art. 10) que les élévations $z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7$, forment une série récurrente, et

que le quotient $\frac{z_2+z_4}{z_3}$ est un nombre constant qui ne dépend que de la nature et des dimensions de l'anneau, et se trouverait toujours le même, de quelque côté qu'on plaçât les foyers de chaleur constante. On avait pour objet de trouver ce quotient, afin de le comparer à celui que donneraient d'autres observations : on n'avait alors que quatre thermomètres que l'on pût appliquer à l'armille; mais on pouvait suppléer au nombre des thermomètres en variant les observations.

On a trouvé $\frac{z_2+z_4}{z_3}=2,2683$, valeur du quotient cherché. On pouvait d'abord vérifier ce résultat par le calcul suivant. On a vu que le quotient $\frac{z_2+z_4}{z_3}$ serait différent si la distance de deux thermomètres consécutifs, au lieu d'être égale au huitième de la circonférence, était égale à la quatrième partie de cette circonférence. On suppose qu'il y ait un thermomètre au point 6, et l'on désigne par z_6 l'élévation de la température de ce point au-dessus de celle de l'air. Soient $\frac{z_2+z_4}{z_3}=q$ et $\frac{z_2+z_6}{z_4}=r$; il est facile de trouver (*voyez* art. 10) entre q et r la relation suivante :

$$q=\omega+\frac{1}{\omega} \text{ et } r=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}.$$

Éliminant ω, on a $=q\sqrt{r+2}$. Ainsi en déterminant r on en pourra conclure une nouvelle valeur de q.

Pour trouver r on aura les deux équations

$$\frac{z_2+z_6}{z_4}=r \text{ et } \frac{z_4+z_0}{z_6}=r;$$

éliminant z_6, qui est inconnue, on a $r^2 z_4-r z_2=z_4+z_0$.

On peut donc obtenir la valeur de r au moyen de z_0, z_3, z_4, comme on a obtenu celle de q au moyen de z_2, z_3, z_4. En faisant ce calcul, on a trouvé $r = 3,140$; et de l'équation $q = \sqrt{r+2}$, on a conclu $q = 2,2673$. Cette seconde valeur diffère extrêmement peu de la première. Au reste, il est probable que cette conformité résulte en partie de la compensation fortuite des erreurs.

On a fait diverses expériences du même genre, en variant la position des quatre thermomètres. Quelquefois on a placé plusieurs foyers, en apportant la plus grande attention pour que les thermomètres demeurassent stationnaires; ce à quoi l'on peut toujours parvenir. On a changé aussi la température de l'appartement, et l'on a prolongé la durée de l'état fixe des températures. Voici les résultats qu'on a obtenus :

La première expérience que nous venons de rapporter a donné deux valeurs de q; savoir : $q = 2,267$, et $q = 2,268$.

Une seconde expérience a donné deux valeurs de q exprimées ainsi : $q = 2,29$, et $q = 2,28$.

Une troisième expérience a aussi donné deux valeurs de q, savoir : $q = 2,32$, et $q = 2,30$.

Une quatrième, où l'on n'avait employé que trois thermomètres, a donné une seule valeur; savoir : $q = 2,284$.

Une cinquième expérience a donné deux valeurs, savoir : $q = 2,29$, et $q = 2,29$.

Enfin la dernière expérience, que nous allons rapporter, a donné deux autres valeurs de q, savoir : $q = 2,32$, et $q = 2,31$.

On a placé quatre thermomètres aux points *a, b, c, d* (*fig.* 14) et le foyer au-dessous du point *f*: l'échauffement a duré $5^h\ 2'$. Alors on a observé les températures, qui étaient toutes stationnaires depuis environ $50'$. La table suivante indique ces températures fixes.

Le thermomètre	marque	Excès de la température du thermomètre sur celle de l'air.	Température de l'air.
a	117^{d}	$98^{d},67$.	
b	$78^{d},87$.	$60^{d},54$.	$18^{d},33$.
c	$60^{d},14$.	$41^{d},81$.	
d	$59^{d},10$.	$40^{d},77$.	

Le quotient q ou $\frac{a+c}{b}$ est 2,320 ; le quotient r ou $\frac{a+d}{c}$ est 3,335. Et si l'on calcule une seconde valeur de q au moyen de la relation $q = \sqrt{r+2}$, on trouve $q = 2,3098$.

Les six expériences ont donné onze valeurs du nombre q, qui peuvent servir à déterminer ce nombre très-exactement. L'erreur sera moindre que la quatre-vingt-dixième partie de la valeur du nombre, si l'on emploie les expériences faites en divers temps ; et si l'on ne se sert que des expériences faites le même jour, l'erreur sur la valeur de q sera beaucoup moindre que la deux-centième partie de cette valeur. On peut donc calculer avec précision le rapport $\frac{h}{k}$ des deux conducibilités (*voyez* art. 8).

Nous ferons remarquer que la valeur numérique de q, changeant avec l'état des surfaces (art. 8), a dû subir quelque altération dans notre armille. Les premières expériences ont été faites en 1806 et les dernières en 1811 : dans cet intervalle on entretenait de temps à autre l'état net et poli de la surface ; mais on n'a pu éviter quelque léger changement. C'est pour cela que les deux valeurs de q conclues d'une seule expérience sont en général plus voisines que celles qui ont été données par des expériences différentes. Au reste, on ne pouvait point attendre des résultats plus conformes entre eux, soit à cause des erreurs provenant des thermomètres, soit à raison des circonstances propres à l'expérience. En effet, les

résultats théoriques auxquels nous sommes parvenus, supposent que l'air est déplacé avec une vîtesse uniforme; mais le courant d'air qui s'établit près de la surface de l'anneau, et emporte dans le sens vertical les molécules échauffées devenues plus légères, a une vîtesse moindre dans les parties dont la température est moins élevée. Les points de l'anneau situés dans une même section perpendiculaire à l'axe n'ont point, comme on le suppose, une égale température. La différence, quelque petite qu'elle soit, influe sur les valeurs des températures fixes; il en est de même des interruptions qu'éprouve la masse de l'anneau, à raison des trous qui reçoivent les thermomètres et sont remplis de mercure; enfin il doit s'écouler une petite quantité de chaleur dans les supports. Toutes ces circonstances doivent altérer les résultats, et les éloigner de ceux que donne la théorie. On voit cependant qu'elles n'empêchent point qu'on n'obtienne des valeurs très-voisines des véritables.

102. On a observé aussi le mouvement de la chaleur dans cette même armille qui a servi aux expériences précédentes. Ce solide avait été placé sur trois supports de bois sec; son plan était horizontal, et l'on avait mis quatre thermomètres *a*, *b*, *c*, *d* (*fig.* 15) aux points désignés par ces lettres dans la figure; ensuite on avait rempli de mercure les trous *a*, *b*, *c*, *d*, et les deux autres *m* et *n*, qui n'avaient point de thermomètres. Un cinquième thermomètre était libre et servait à mesurer la température du lieu de l'expérience. La pièce où l'on observait était assez vaste, et l'on prenait soin de ne pas agiter l'air. Elle communiquait avec une seconde pièce échauffée, et l'on ouvrait, lorsqu'il était nécessaire, la porte de communication, afin d'obtenir une température constante; ce qui a eu lieu en effet.

Le point *f* ayant été exposé pendant 26′ environ à la

flamme d'une lampe d'Argant, les thermomètres *c*, *b*, *d*, *a*, se sont élevés successivement. Après 26′ écoulées, on a ôté le foyer, et dans ce moment, à $7^h\ 31'$, le thermomètre *c* marquait $127^d\ \frac{2}{3}$ environ, et les autres marquaient exactement, savoir :

	b	$55^d\ \frac{1}{2}$.
	a	25^d
	d	$35^d\ \frac{5}{6}$.
celui de la chambre désigné par	*t*	$18^d\ \frac{1}{2}$.

A $7^h\ 34'$ le thermomètre *c* était descendu à $111^d\ \frac{2}{3}$ environ ; et les autres thermomètres marquaient exactement, savoir :

b	$57^d\ \frac{4}{5}$.
c	26^d
d	$37^d\ \frac{5}{6}$.
t	$18^d\ \frac{1}{2}$.

On a commencé à mesurer les températures avec le plus grand soin ; une personne observait un seul thermomètre, et toutes étaient averties au même instant par celle qui observait le temps écoulé. On remarquait aussitôt la position du mercure dans le thermomètre, et l'on en tenait note.

La table suivante contient ces résultats.

TEMPS. heures.	minutes.	THERMOMÈTRE *c.*	THERMOMÈTRE *b.*	THERMOMÈTRE *a.*	THERMOMÈTRE *d.*	THERMOMÈTRE *t.*	SOMME $\frac{1}{2}(a+c)$.	SOMME $\frac{1}{2}(b+d)$.	DIFFÉRENCE des demi-sommes.
7	39.	89d $\frac{5}{6}$.	59.	28.	40 $\frac{2}{3}$.	18 $\frac{1}{2}$ un peu haut.	58,916.	49,833.	+ 9,083.
7	45.	75 $\frac{5}{6}$.	56 $\frac{1}{2}$.	30 $\frac{1}{2}$.	42 $\frac{1}{3}$.	18 $\frac{1}{2}$ *id.*	53,167.	49,417.	+ 3,750.
7	51.	66 $\frac{1}{4}$.	53 $\frac{1}{3}$.	32 $\frac{1}{4}$.	42 $\frac{1}{3}$.	18 $\frac{1}{2}$ *id.*	49,250.	47,833.	+ 1,417.
7	56.	60.	50 $\frac{1}{2}$.	33 $\frac{2}{3}$.	41 $\frac{5}{6}$.	18 $\frac{1}{2}$ *id.*	46,833.	46,167.	+ 0,666.
8	1.	55 $\frac{1}{10}$.	47 $\frac{1}{6}$.	34 $\frac{1}{2}$.	41 $\frac{9}{11}$.	18 $\frac{1}{4}$.	44,800.	44,483.	+ 0,317.
8	5.	51 $\frac{5}{6}$.	45 $\frac{4}{5}$.	34 $\frac{5}{6}$.	40 $\frac{1}{3}$.	18 $\frac{1}{4}$.	43,333.	43,067.	+ 0,266.
8	12.	47.	43.	35.	38 $\frac{14}{15}$.	18 $\frac{3}{4}$.	41,000.	40,967.	+ 0,033.
8	17.	43 $\frac{5}{6}$.	41.	34 $\frac{7}{8}$.	38.	18 $\frac{3}{4}$.	39,354.	39,500.	— 0,146.
8	21.	42 $\frac{1}{2}$.	39 $\frac{4}{5}$.	34 $\frac{1}{2}$.	37 $\frac{1}{6}$.	18 $\frac{3}{4}$.	38,500.	38,483.	+ 0,017.
8	25.	40 $\frac{1}{2}$.	37 $\frac{3}{4}$.	34 $\frac{1}{4}$.	36 $\frac{1}{3}$.	18 $\frac{3}{4}$.	37,375.	37,041.	+ 0,334.
8	27.	39 $\frac{7}{10}$.	37.	34.	35 $\frac{14}{15}$.	18 $\frac{3}{4}$.	36,850.	36,467.	+ 0,383.
8	34.	37 $\frac{1}{3}$.	36.	33 faible.	34 $\frac{11}{15}$.	19 faible.	35,167.	35,367.	— 0,200.
8	38.	36.	35.	32 $\frac{3}{4}$.	33 $\frac{3}{5}$.	19 un peu faible.	34,365.	34,300.	+ 0,065.
8	43.	34 $\frac{1}{2}$.	33 $\frac{5}{6}$.	32 $\frac{1}{5}$.	33 $\frac{1}{6}$.	19 *id.*	33,350.	33,500.	— 0,150.
8	oublié.	33 $\frac{5}{6}$.	33 $\frac{1}{6}$.	31 $\frac{3}{4}$.	32 $\frac{11}{15}$.	19 *id.*	32,791.	32,950.	— 0,159.
8	50.	33.	32 $\frac{2}{5}$.	31 $\frac{1}{4}$.	32.	19 *id.*	32,125.	32,200.	— 0,075.
8	53.	32.	31 $\frac{4}{5}$.	31 $\frac{1}{15}$.	31 $\frac{2}{3}$.	19 *id.*	31,533.	31,733.	— 0,200.
9.		30 $\frac{3}{8}$.	30 $\frac{2}{3}$.	30 $\frac{1}{4}$.	30 $\frac{1}{3}$ un peu fort.	19 *id.*	30,312.	30,500.	— 0,188.
9	24.	27 $\frac{1}{2}$.	27 $\frac{5}{6}$.	27 $\frac{5}{6}$.	27 $\frac{2}{3}$.	19 *id.*	27,666.	27,750.	— 0,084.
9	29.	27.	27 $\frac{1}{3}$.	27 $\frac{1}{4}$.	27 $\frac{1}{4}$.	19 *id.*	27,125.	27,291.	— 0,166.
9	34.	26 $\frac{1}{2}$.	26 $\frac{5}{6}$ un peu fort.	26 $\frac{3}{4}$.	26 $\frac{1}{2}$.	19 *id.*	26,625.	26,666.	— 0,041.

L'expérience a été terminée à $10^h\ 28'$ du soir.

Nous avons vu (art. 37) que la loi de la propagation de la chaleur dans une armille devient de plus en plus simple, à mesure que le refroidissement s'opère, et qu'après un certain temps écoulé la chaleur est distribuée symétriquement. Dans ce dernier état, qui dure jusqu'à la fin du refroidissement, la circonférence est divisée en deux parties inégalement échauffées. Tous les points d'une moitié de l'armille ont une température supérieure à la température moyenne, et tous les points de la moitié opposée ont des températures inférieures à cette valeur moyenne. La quantité de la différence est représentée par le sinus de l'arc compris depuis chaque point jusqu'à l'extrémité du diamètre mené par le point qui a la température moyenne. On avait pour but, dans l'expérience précédente, de connaître le moment où le solide commence à entrer dans l'état que nous venons de décrire. Comme la température moyenne équivaut, dans cet état, à la demi-somme des températures de deux points situés aux extrémités d'un même diamètre, et que par conséquent cette demi-somme est la même pour deux points quelconques, pourvu qu'ils soient opposés, on a choisi cette propriété comme l'indice de la disposition symétrique qu'il s'agit de rendre sensible. Tout se réduit donc à observer pour le même instant la valeur de la différence de la demi-somme des températures $a+c$, et la demi-somme des températures $b+d$, et à examiner au moyen des résultats précédens s'il arrive, après un certain temps, que ces températures deviennent et demeurent égales. Or les résultats des expériences sont à cet égard très-remarquables, et ne laissent aucun doute sur cette distribution régulière de la chaleur.

En effet, lorsqu'on a éloigné le foyer à $7^h\ 31'$, la demi-somme $\frac{1}{2}(a+c)$ valait environ $76^d\ \frac{1}{3}$, et la demi-

somme $\frac{1}{2}(b+d)$ valait $45^d \frac{2}{3}$. Ces deux quantités, loin d'être égales, différaient de $30^d \frac{2}{3}$. A $7^h\, 34'$ la demi-somme $\frac{1}{2}(a+c)$ valait environ $68^d \frac{5}{6}$, et la demi-somme $\frac{1}{2}(b+d)$ valait environ $47^d \frac{5}{6}$: ainsi la différence était encore de 21^d. En continuant jusqu'à la fin de l'expérience cette comparaison des deux demi-sommes, il est facile de juger si elles tendent à devenir égales, et restent sensiblement dans cet état d'égalité; ou si, au contraire, elles peuvent se séparer, et donner des différences croissantes de signe opposé.

On a marqué dans la table, pour chaque valeur du temps écoulé, la valeur correspondante de la demi-somme $\frac{1}{2}(a+c)$, celle de la demi-somme $\frac{1}{2}(b+d)$, et la différence des deux valeurs. On voit par cette table que la différence des demi-sommes, qui était d'abord $30^d\, 66$, a été réduite en $3'$ à 21^d; elle est devenue 9^d pendant les $5'$ suivantes, et elle a ensuite continué à décroître : mais elle n'a pu acquérir aucune valeur négative de quelque étendue. Cette différence des demi-sommes a passé en $26'$ de la valeur de 30^d à celle d'un demi-degré environ ; elle a conservé des valeurs très-petites, qui se sont abaissées successivement au-dessous d'un tiers et d'un cinquième de degré. Il faut ajouter que les valeurs apparentes de cette différence résultent en majeure partie des erreurs presque inévitables des instrumens et des observations. D'ailleurs on a fait l'expérience dans l'air tranquille, au lieu de déterminer un courant d'air d'une vîtesse uniforme; il était facile de prévoir que l'omission de cette condition n'aurait point une influence considérable sur les résultats.

On a souvent répété des expériences de ce genre, en faisant varier toutes les circonstances, ou successivement, ou ensemble.

On a plusieurs fois employé six thermomètres dont trois étaient opposés à trois autres; alors on a comparé les trois demi-sommes, et l'on a toujours reconnu qu'elles tendaient rapidement à devenir égales, et qu'ensuite elles demeuraient dans cet état pendant toute la durée de l'expérience. On a échauffé l'anneau au moyen de deux foyers, et d'autres fois on a transporté le foyer en divers endroits, afin d'occasionner le plus d'inégalité possible dans la distribution de la chaleur. Enfin on a fait concourir le frottement à la production de la chaleur; et, de quelque manière que l'anneau ait été échauffé, on a toujours observé que les demi-sommes convergent rapidement vers une valeur commune, en sorte qu'on a reconnu par le fait l'impossibilité d'obtenir un résultat différent de celui que l'analyse nous a fait connaître. Au reste, l'observation de ces faits n'ajoute rien à la certitude des conséquences théoriques: elles dérivent nécessairement du principe de la communication de la chaleur; elles ont toute l'exactitude de ce principe, et seraient assujetties aux mêmes corrections, si des expériences ultérieures en faisaient connaître la nécessité.

103. On a exposé pendant 30′ environ à l'action d'un foyer de chaleur une masse de fer de forme sphérique, et dont la surface avait été polie avec le plus grand soin : le diamètre de la sphère est d'environ 4 pouces (1); un thermomètre exactement construit pénétrait au-delà du centre de la sphère; le trou cylindrique qui recevait ce thermomètre était rempli de mercure.

L'expérience avait lieu dans l'air tranquille, au milieu d'une pièce assez vaste, entretenue à une température constante.

(1) Le diamètre de la sphère est de $0^{m},1106$; le diamètre du trou cylindrique est de $0^{m},015$; la profondeur de ce trou est de $0^{m},080$; le poids du solide, sans celui du mercure, est de $5310^{gr},7$.

Le thermomètre libre qui indiquait la température de l'air marquait $12^d \frac{1}{2}$.

La température de la sphère s'est élevée au-delà de 100^d (division octogésimale). Alors on l'a séparée du foyer et on l'a exposée isolément à l'air; elle était suspendue par deux cordons de soie, qui passaient dans deux anneaux extrêmement petits fixés à la surface. On a essuyé la surface, afin de faire disparaître les taches que la flamme aurait pu laisser. Le thermomètre s'est abaissé successivement. La table suivante donne, 1.° les valeurs du temps, 2.° les élévations correspondantes du thermomètre de la sphère depuis 63^d jusqu'à 43^d, 3.° les élévations du thermomètre libre.

Valeurs du temps t.	Différence des temps.	Valeur de z, température de la sphère. Le thermomètre marque	Valeur de a, température de la chambre. Le thermomètre marque	Valeur de y, élévation au-dessus de la température de l'air.	Valeur de α dans l'équation $y = A\alpha^t$.
$8^h\ 41'$.		63^d.	$12^d \frac{1}{2}$.	50,5.	
	$17' \frac{1}{2}$.				0,99406.
$8^h\ 58' \frac{1}{2}$.		58^d.	$12^d \frac{1}{2}$.	45,5.	
	$20'$.				0,99420.
$9^h\ 18' \frac{1}{2}$.		53^d.	$12^d \frac{1}{2}$.	40,5.	
	$22' \frac{1}{3}$.				0,99416.
$9^h\ 40' \frac{5}{6}$.		48^d.	$12^d \frac{1}{2}$.	35,5.	
	$26' \frac{1}{2}$.				0,99422.
$10^h\ 7' \frac{1}{3}$.		43^d.	$12^d \frac{1}{2}$.	30,5.	

En résolvant la question de la propagation de la chaleur dans une sphère, nous avons remarqué que les températures se rapprochent continuellement du système durable dans lequel elles décroissent en même temps, sans que leurs rapports soient changés (art. 45 et 47). Alors ces températures varient depuis le centre jusqu'à la surface, de même que le rapport du sinus à l'arc varie depuis une extrémité de la demi-circonférence jusqu'à l'extrémité d'un certain arc moindre que

cette demi-circonférence. Chacune des températures en particulier, et par conséquent la température moyenne, décroît comme l'ordonnée d'une logarithmique dont le temps est l'abscisse. On peut reconnaître, au moyen de l'observation, le moment où cette distribution régulière de la chaleur est établie. En effet, il suffit d'examiner si le mouvement du thermomètre peut être représenté par une logarithmique; car cette dernière propriété n'appartient qu'à l'état régulier dont il s'agit. Soient z_1 et z_2 deux températures indiquées par le thermomètre de la sphère et correspondantes aux temps t_1 et t_2; soient a la température constante de l'air, et y l'élévation $z-a$. Si la valeur de y est donnée par l'équation $y = A\,\alpha^t$, A étant une quantité constante et α une fraction, on aura $y_1 = A\,\alpha^{t_1}$ et $y_2 = A\,\alpha^{t_2}$: d'où l'on tire $\log \alpha = \frac{\log y_1 - \log y_2}{t_2 - t_1}$. En prenant les deux températures 63^d et 58^d qui donnent 50,5 et 45,5 pour les deux valeurs y_1 et y_2, on trouve pour la fraction α, 0,99406.

Si l'on fait le même calcul pour l'intervalle suivant, c'est-à-dire en prenant $y_1 = 45{,}5$, $y_2 = 40{,}5$, et $t_2 - t_1 = 20'$, on trouve une seconde valeur de α. Le troisième intervalle donne $\alpha = 0{,}99416$; le quatrième, $\alpha = 0{,}99422$. On a rapporté dans la table précédente ces différentes valeurs de α.

On voit par ces résultats que si l'on considère deux élévations consécutives, par exemple $50^d\,\frac{1}{2}$ et $45^d\,\frac{1}{2}$, comme les deux termes extrêmes d'une progression géométrique, et que l'on insère entre eux un nombre de moyens proportionnels géométriques égal au nombre de minutes écoulées moins un, on trouve pour la raison de la progression une fraction α qui diffère très-peu de celle qu'on aurait trouvée pour l'intervalle suivant, formé des élévations $45^d\,\frac{1}{2}$ et $40^d\,\frac{1}{2}$. Le mouvement du thermomètre peut donc sensiblement être représenté par une courbe logarithmique. En effet, si l'on

suppose dans l'équation $y = A\alpha^t$, $A = 50{,}406$ et $\alpha = 0{,}99415$, on aura les valeurs suivantes, qui diffèrent très-peu de celles que l'on a observées.

Valeurs observées.	Valeurs déduites de l'équation.	Différences.
50,5.	50,406.	0,094.
45,5.	45,500.	0,000.
40,5.	40,466.	0,034.
35,5.	35,500.	0,000.
30,5.	30,352.	0,148.

Le refroidissement depuis 63^d jusqu'à 43^d a duré plus de $86'$, et dans cet intervalle le mouvement du thermomètre est exprimé par l'équation $y = A\alpha^t$, à moins d'un sixième de degré près, erreur qui n'est pas la deux-centième partie de la température observée.

Au reste, il y a diverses circonstances qui troublent ici le mouvement de la chaleur et doivent altérer un peu l'exactitude des résultats. La partie de la masse qui est formée du mercure et du thermomètre est dans un état bien différent de celui que la théorie considère, et le thermomètre n'indique pas exactement la température moyenne du solide; mais la cause qui influe le plus sur les résultats, est la diminution continuelle de la vîtesse de l'air. Ses molécules qui s'échauffent à la surface de la sphère sont emportées vers le haut par un courant dont la vîtesse se ralentit à mesure que le corps devient plus froid. Or il y a une partie de la chaleur perdue par la surface qui dépend de la vîtesse du courant; par conséquent le refroidissement devient moins prompt, et la fraction α par laquelle on doit multiplier la température pour connaître ce qu'elle devient après une minute, acquiert des valeurs de plus en plus grandes. Cet effet s'est manifesté dans toutes nos observations; mais il est peu sensible dans celle-ci, parce que l'on s'est borné à un intervalle de 20^d. La loi

du refroidissement dans un air tranquille diffère donc un peu de celle qu'on observerait si le corps était exposé à un courant d'air invariable. Il serait facile de déterminer cette première loi avec une approximation suffisante, et l'on en conclurait les différences qui existent entre les résultats de la première hypothèse et ceux de la seconde; mais nous ne nous sommes point proposé de traiter cette question, qui se rapporte à la propagation de la chaleur dans les fluides.

Indépendamment de l'expérience précédente, on en a fait plusieurs du même genre sur des sphères de diverses dimensions. Lorsqu'on a commencé ces observations, on prenait soin d'échauffer les solides uniformément, en les retenant dans un bain de mercure entretenu à une température permanente. Après que l'immersion avait duré un temps assez considérable, et que le thermomètre plongé dans la masse indiquait constamment la température requise, on retirait ce solide, et on le suspendait au milieu de l'air plus froid, afin d'observer les abaissemens successifs du thermomètre. On a toujours remarqué que la valeur de la fraction α augmente, quoique très-lentement, à mesure que la durée du refroidissement augmente. Cette valeur peut être regardée comme constante, lorsque la différence des deux températures extrêmes n'est pas considérable. On a plusieurs fois, dans nos expériences, observé les abaissemens du thermomètre de degré en degré, depuis 100^d jusqu'à 12^d ou 15^d. On est parvenu dans tous les cas à des résultats semblables à ceux que l'on vient d'exposer. On a enfoncé les sphères dans un liquide entretenu à une température constante, ou on les a entourées de sable ou de limaille continuellement échauffés. On a placé au-dessous une lampe allumée que l'on retirait ensuite. On n'a point remarqué dans les résultats de différence qui pût être attribuée à la manière dont le solide avait été échauffé. Il paraît que la diffusion de la chaleur dans la

masse s'opère assez facilement, et que, dans une sphère de dimensions médiocres, les températures arrivent bientôt à cet état où elles sont représentées par les quotiens du sinus par l'arc. On peut dans ces expériences, et sans craindre d'altérer la précision des résultats, suspendre les corps dans l'air, et les échauffer au moyen d'une ou de plusiers lampes d'Argant; on retire ensuite les foyers, et l'on attend que le refroidissement ait duré quelque temps avant d'observer les abaissemens du thermomètre. Nous avons fait aussi d'autres expériences afin de connaître les effets de la chaleur dans des solides de diverses formes et dimensions, dans différens liquides, dans les fluides élastiques et dans les vides : mais ces observations sont imparfaites et mériteraient peu l'attention du lecteur; elles n'ont point d'ailleurs un rapport direct avec la matière que nous avons traitée dans ces mémoires. On rapportera seulement deux observations faites avec beaucoup de soin sur une sphère et sur un cube de fer.

104. On a placé dans l'air, entretenu à une température constante, une sphère solide de fer d'environ deux pouces de diamètre (1); la surface était parfaitement polie, et l'on y avait fixé deux anneaux très-petits, où l'on passait deux cordons destinés à suspendre la masse. La sphère est percée d'un trou cylindrique où l'on mettait un thermomètre. Le centre du réservoir coïncide avec le centre de la sphère, et l'on remplissait le trou avec du mercure. On a placé sous la sphère une lampe allumée. Le thermomètre s'est élevé à plus de 103^{d}; on a retiré le foyer, et l'on a observé, assez long-temps après, les températures suivantes :

(1) Le diamètre de la sphère est de $0^{m},0552$; le diamètre du trou cylindrique est de $0^{m},015$; la profondeur de ce trou est de $0^{m},038$; le poids de la sphère, sans celui du mercure, est de $653^{gr},7$.

A $6^h\ 34'$ le thermomètre a passé à . . . . . 63^d.

A $7^h\ 7'\ 40''$ le thermomètre a passé à . . . 43^d.

L'expérience a eu lieu dans l'air tranquille. Un poêle échauffait une pièce voisine, et l'on entr'ouvrait, s'il était nécessaire, la porte de communication, afin de maintenir la température de l'appartement, qui était de $12^d\ \frac{3}{16}$.

On a exposé de la même manière à l'action du foyer, et dans des circonstances semblables, une masse cubique de fer dont la surface avait été exactement polie; le côté du cube est d'environ deux pouces (1). Le thermomètre dont on s'est servi pour la sphère a été placé dans le cube, au milieu du trou cylindrique qui pénétrait un peu au-delà du centre et que l'on a rempli avec du mercure; le thermomètre s'est élevé à 80^d (une plus grande élévation ne changerait pas les résultats). Alors on a éloigné le foyer, et l'on a observé, quelque temps après, les températures suivantes :

A $8^h\ 17'\ 36''$ le thermomètre a passé à . . . 63^d.

A $8^h\ 56'\ 40''$ le thermomètre a passé à . . . 43^d.

Le thermomètre placé dans l'air marquait $12^d\ \frac{3}{8}$.

Ainsi la température s'est abaissée de 63^d à 43^d en $33'\ 40''$ pour la sphère, et de 63^d à 43^d en $39'\ 4''$ pour le cube, dont le côté est sensiblement égal au diamètre de la sphère.

En comparant ces résultats, il est nécessaire de remarquer, comme on l'a fait précédemment (art. 101), que plusieurs circonstances concourent à en altérer l'exactitude. Il faut observer sur-tout que la partie du solide qui est formée de mercure, se trouve dans un état très-différent de celui que la théorie suppose; et les dimensions des trous cylindriques sont telles dans les différens solides, que la cause précédente a

(1) Le côté du cube est de $0^m,05535$; le diamètre du trou cylindrique est de $0^m,015$; la profondeur de ce trou est de $0^m,042$; le poids du cube, sans celui du mercure, est de 1245^{gr}.

d'autant plus d'effet que les corps ont de moindres dimensions: cette cause tend à augmenter le rapport des durées du refroidissement.

105. Nous terminons ici toutes nos recherches sur la propagation de la chaleur dans les corps solides. La table placée à la fin de cet ouvrage indique l'ensemble et les résultats généraux de notre théorie. Aucun ne nous paraît plus remarquable que cette déposition régulière que la chaleur affecte toujours dans l'intérieur des solides, et que l'analyse mathématique, devançant toutes les observations, nous fait connaître aujourd'hui. Pour représenter généralement cet effet, il faut concevoir que tous les points d'un corps d'une figure donnée, par exemple d'une sphère ou d'un cube, ont d'abord reçu des températures différentes, qui diminuent toutes en même temps, lorsque le corps est placé dans un milieu plus froid. Or le système des températures initiales peut être tel, que les rapports établis primitivement entre elles se conservent sans aucune altération pendant toute la durée du refroidissement. Cet état singulier, qui jouit de la propriété de subsister lorsqu'il est formé, peut être comparé à la figure que prend une corde sonore lorsqu'elle fait entendre le son principal. Le même état est susceptible aussi de diverses formes, analogues à celles qui répondent dans la corde élastique aux sons subordonnés. Il y a donc pour chaque solide une infinité de modes simples suivant lesquels la chaleur peut se propager et se dissiper, sans que la loi de la distribution initiale éprouve aucun changement. Si l'on formait dans le solide un seul de ces états simples, toutes les températures s'abaisseraient en même temps, en conservant leurs premiers rapports, et chacune d'elles diminuerait comme l'ordonnée d'une même logarithmique, le temps étant pris pour abscisse.

De quelque manière que les différens points d'un corps

aient été échauffés, le système initial et arbitraire des températures se décompose en plusieurs états simples et durables, pareils à ceux que nous venons de décrire. Chacun de ces états subsiste indépendamment de tous les autres, et n'éprouve d'autres changemens que ceux qu'il éprouverait s'il était seul. La décomposition dont il s'agit n'est point un résultat purement rationnel et analytique, elle a lieu effectivement et résulte des propriétés physiques de la chaleur. En effet, la vîtesse avec laquelle les températures décroissent dans chacun des systèmes simples n'est pas la même pour les différens systèmes; elle est extrêmement grande pour les états subordonnés. Il arrive de là que ces derniers états n'ont une influence sensible que pendant un certain intervalle de temps: ils finissent en quelque sorte par disparaître, et s'effacent pour ne laisser subsister visiblement que l'état principal. On en tire cette conséquence, que, de quelque manière que la chaleur initiale ait été répartie entre les points du solide, elle ne tarde point à se distribuer d'elle-même suivant un ordre constant. Le système des températures passe dans tous les cas possibles à un même état déterminé par la figure du solide et indépendant du système initial : on peut connaître par l'observation le moment où cet état principal est formé; car, lorsqu'il a lieu, la température d'un point quelconque décroît comme les puissances successives d'une même fraction. Il suffit donc de mesurer la température variable d'un point du solide, afin de distinguer le moment où la loi précédente commence d'être observée.

La propriété que la chaleur a d'affecter dans les solides une distribution régulière indépendante des causes extérieures, se manifeste encore lorsque les températures sont devenues permanentes. Ainsi, lorsqu'un cylindre ou un prisme métallique d'une longueur considérable est exposé par une extrémité à l'action durable et uniforme d'un foyer de chaleur,

chaque point du solide acquiert une température fixe. La loi suivant laquelle la chaleur se distribue est d'autant plus simple que les points observés sont plus éloignés de l'extrémité échauffée. L'état du solide, dans la partie qui est soumise à l'influence prochaine du foyer, se compose de plusieurs états particuliers dont chacun peut subsister indépendamment des autres; mais les températures prises à une certaine distance de l'origine jusqu'à l'extrémité opposée ne forment plus qu'un système unique et principal, qui serait encore le même si l'on changeait d'une manière quelconque l'action permanente du foyer.

Les phénomènes dynamiques présentent aussi des propriétés analogues, telles que l'isochronisme des dernières oscillations ou la résonnance multiple des corps sonores. Ces résultats, que des expériences journalières avaient rendus manifestes, ont été ensuite expliqués par le calcul. Ceux qui dépendent du mouvement de la chaleur ne peuvent être constatés que par des observations plus attentives; mais l'analyse mathématique, empruntant la connaissance d'un petit nombre de faits généraux, supplée à nos sens et nous rend en quelque sorte témoins de tous les changemens qui s'accomplissent dans l'intérieur des corps. Elle nous dévoile cette composition harmonique des mouvemens simples auxquels la chaleur est assujettie, soit qu'elle se propage uniformément pour entretenir des températures fixes, soit qu'elle tende et se dispose par degrés insensibles à ce dernier état.

Des observations plus précises et plus variées feront connaître par la suite si les effets de la chaleur sont modifiés par des causes que l'on n'a point aperçues jusqu'ici, et la théorie acquerra une nouvelle perfection par la comparaison continuelle de ses résultats avec ceux des expériences; elle expliquera des phénomènes importans que l'on ne pouvait point encore soumettre au calcul; elle apprendra à déterminer les

effets variables des rayons solaires, les changemens que subit la température dans l'intérieur du globe terrestre, aux sommités des montagnes, à différentes distances de l'équateur, et les grands mouvemens que les variations de la chaleur occasionnent dans l'océan et dans l'atmosphère ; elle servira à mesurer la conducibilité intérieure ou extérieure des différens corps et leur capacité de chaleur, à distinguer toutes les causes qui modifient l'émission de la chaleur à la surface des solides et à perfectionner les instrumens thermométriques. Cette théorie excitera dans tous les temps l'attention des géomètres, elle les intéressera par les difficultés d'analyse qu'elle présente et par la grandeur et l'utilité qui lui sont propres. Aucun sujet n'a des rapports plus étendus avec l'étude de la nature et les progrès de l'industrie; car l'action de la chaleur est toujours présente, elle pénètre les corps et les espaces, elle influe sur les procédés de tous les arts et concourt à tous les phénomènes de l'univers.

TABLE DES MATIÈRES

CONTENUES DANS LA SUITE DU MÉMOIRE INTITULÉ :

THÉORIE

DU MOUVEMENT DE LA CHALEUR

DANS LES CORPS SOLIDES.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	
80.	153.	XII. *Des Températures terrestres, et du Mouvement de la Chaleur dans l'intérieur d'une sphère solide dont la surface est assujettie à des changemens périodiques de température.*
	155.	REMARQUES générales sur la question des températures terrestres.
81.	155.	On suppose que tous les points de la surface d'une sphère d'un très-grand diamètre ont une température commune v, qui est une fonction périodique du temps écoulé. Cette fonction $\varphi(t)$ ne change point de valeur lorsqu'on écrit $t+\theta$ au lieu de t. θ est une constante égale à la durée de la période. Quelles que soient les températures primitives des molécules du solide, elles s'approchent de plus en plus d'un certain état périodique qui ne dépend que des variations auxquelles la surface est assujettie. Cet état est représenté par l'équation suivante :

$$v=\frac{1}{\theta}\int\varphi t.\,dt+\Sigma\left\{\frac{2}{\theta}e^{-u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}}\left[\begin{array}{l}\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t-u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int\varphi t.\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\\ \sin\left(i\frac{2\pi}{\theta}t-u\sqrt{i\frac{\pi}{k\theta}}\right)\int\varphi t.\cos\left(i\frac{2\pi}{\theta}t\right)dt\end{array}\right]\right\}$$

v est la température que doit prendre après le temps t la couche sphérique qui est placée au-dessous de la surface à la profondeur u. Il faut développer le signe Σ en mettant au lieu de i les valeurs successives 1, 2, 3, 4,.... i...... 160.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	
82.	160. – 161.	Lorsqu'on donne à la variable u une valeur un peu considérable, les termes placés sous le signe Σ s'évanouissent presque entièrement, d'où il suit que les variations périodiques de la surface deviennent insensibles à une certaine profondeur.
83.	161. – 161.	La température permanente des lieux profonds étant exprimée par le premier terme de la valeur de v, est égale à la valeur moyenne de toutes les températures que l'on observerait à la surface pendant la durée θ de la période.
84.	161 – 164.	Lorsque la profondeur est telle, que les variations périodiques ne sont pas entièrement insensibles, mais seulement ont de petites valeurs, ces variations $v - \frac{1}{\theta}\int \varphi(t)\,dt$, ou w, sont exprimées par le premier des termes qui entrent sous le signe Σ. Cette différence w entre la température d'un point intérieur et la température moyenne varie avec le temps, et comme le sinus du temps qui s'est écoulé depuis l'instant où elle était nulle. Elle reprend toutes ses premières valeurs pendant la durée θ de la période suivante. Le *maximum* de la différence w n'est pas le même pour différentes profondeurs; il décroît en progression géométrique à mesure que la profondeur augmente de quantités égales. Les différens points d'une même verticale ne parviennent point dans le même temps à la température moyenne, et cette dernière température passe d'un point à un autre avec une vîtesse uniforme. La durée θ de la période et la conducibilité du solide influent beaucoup sur la profondeur à laquelle les variations deviennent insensibles, et sur la distance des deux points d'une même verticale qui atteignent en même temps la température moyenne.
85.	164. – 167.	On applique ces résultats à une masse sphérique homogène de fer, dont la surface serait assujettie à des variations diurnes et annuelles de température. Ayant déterminé, par les expériences rapportées dans ce mémoire, la valeur approchée du nombre K, on trouve que les variations diurnes sont presque nulles à $2^m,3$, et que les variations annuelles sont insensibles à 60 mètres environ. La température moyenne descend dans l'intérieur du globe avec une vîtesse d'environ 30 mètres en six mois.
	167.	On applique la solution générale au cas où les températures de la surface varieraient comme les sinus des temps écoulés. La durée θ de la période est partagée en deux saisons égales. Pendant la première le globe s'échauffe, le foyer lui communiquant une nouvelle quantité de chaleur; pendant la seconde le

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	

solide perd cette même chaleur qu'il avait acquise et la rend à l'espace extérieur.

86. Le globe commence à s'échauffer un huitième d'année après que la température de la surface a passé au-dessus de sa valeur moyenne; il commence à se refroidir six mois après. On peut déterminer toute la quantité de chaleur qui, pendant la saison de l'échauffement, pénètre dans le solide en traversant une portion déterminée de la surface.

Dans le climat où la température annuelle s'élève de 8d (octogésim.) au-dessus de la valeur moyenne, la chaleur totale qui pénètre pendant le cours d'une année une surface d'un mètre carré, serait pour un globe de fer équivalente à 2856, c'est-à-dire qu'elle pourrait fondre 2856 kilogrammes de glace. 171.

87. 171. La température fixe des lieux profonds n'est point la même dans tous les climats, et elle diminue à mesure que l'on s'éloigne de l'équateur. Si l'on fait abstraction de l'enveloppe sphérique dont les points sont assujettis à des variations périodiques de température, on peut considérer le globe terrestre comme une sphère solide dont les points situés à la surface sont entretenus à des températures fixes, mais qui diffèrent d'un point à un autre. On peut déterminer par le calcul l'état des molécules intérieures.

x désigne la distance d'un point du solide au plan de l'équateur, et y la distance de ce point à l'axe de l'équateur. X et Y sont les valeurs de x et de y pour les points de la surface. Des causes extérieures quelconques retiennent tous les points de la surface situés sur un même parallèle, à une température commune et fixe $F(X)$; il en est de même de chacun des parallèles, en sorte que la loi suivant laquelle les températures diminuent, depuis le pôle jusqu'à l'équateur, est représentée par la fonction connue $F(X)$; quelles que soient les températures initiales des points intérieurs, elles changent continuellement et elles s'approchent de plus en plus d'un état final permanent.

Cet état est exprimé par l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y}\,\frac{dv}{dy} = 0.$$

v est la température fixe du point dont les coordonnées sont x et y.

On peut assigner pour une valeur particulière de v la fonction $\cos x \int e^{y \cos q}\, dq$, ou

$$\cos x \left(1 + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^4}{2^2 4^2} + \frac{y^6}{2^2 4^2 6^2} + \&c.\right).$$

Si donc on donne aux différens points d'une sphère solide les

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	
	175.	températures exprimées par cette fonction, et si l'on maintient ensuite dans leur état actuel les températures de la surface, il ne pourra y avoir aucun changement dans l'intérieur de la sphère.
88.	175. 179.	Cette solution, quoique particulière, fait connaître comment la chaleur pénètre par les régions équatoriales, et s'avance de plus en plus dans l'intérieur du globe pour remplacer celle qui se détourne et se dissipe vers les pôles.
89.	179. 182.	XIII. *Des Lois mathématiques de l'Équilibre de la Chaleur rayonnante.* Principe général de l'équilibre des températures.
90.	182. 183.	Mesure de l'intensité des rayons de chaleur.
91.	183.	Un plan circulaire étant maintenu à la température α, on place en un point de la perpendiculaire élevée par le centre du cercle sur son plan un disque infiniment petit, dont le rayon est μ et dont le plan est parallèle à celui du cercle. La quantité de chaleur que le plan envoie sur le disque est : $a\,h.\,\pi.\,\mu^2\,\frac{\int_1 dz\,Fz}{\int_2 dz\,Fz}$. h est la conducibilité de la surface échauffée ; z est le sinus de l'angle φ que fait avec le plan la direction d'un rayon qui ayant son centre sur ce plan, embrasse le disque infiniment petit ; Fz ou $F(\sin\varphi)$ représente la loi indéterminée suivant laquelle l'intensité varie avec l'angle φ. Z ou sin Φ représente la valeur extrême de z, ou celle qui répond à un point de la circonférence qui termine le plan. L'intégrale $\int_1$ doit être prise depuis $z = Z$ jusqu'à $z = 1$, et l'intégrale $\int_2$ doit être prise depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1$. Si l'intensité des rayons est constante, quel que soit l'angle φ, l'action du plan sur le disque est $a\,h\,\pi\,\mu^2$ sin verse Ψ ; en désignant par Ψ la moitié de l'angle dont le sommet est au centre du plan, et dont les côtés comprennent le disque. Si l'intensité décroît comme le sinus de l'angle d'émission, c'est-à-dire si $F(\sin\varphi) = \sin\varphi$, l'action du plan sur le disque est $a\,h\,\pi\,\mu^2\sin^2\Psi$. Si le plan circulaire a un rayon infini, l'action totale du plan sur le disque est toujours $a\,h\,\pi\,\mu^2$; cela a lieu quelle que soit la distance du disque à la surface échauffée, et quelle que soit la fonction de sin φ qui exprime la loi des intensités.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	
	186.	Si en un point quelconque de l'espace compris entre deux surfaces planes, parallèles et infinies, maintenues à la température a, on place un disque infiniment petit parallèlement aux plans, il acquerra et conservera une température a égale à celle des deux surfaces. Ce résultat a lieu quelle que soit la fonction $F(\sin\varphi)$.
92.	187. 188.	Si l'on place une molécule sphérique, dont le rayon est ρ, au centre d'une enceinte sphérique entretenue par une cause quelconque à la température a, l'action de la surface intérieure de la sphère sur la molécule sera $2\,a\,\pi\,h\,\rho^2.\,\dfrac{F(1)}{\int dz\,F(z)}$. L'intégrale est prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=1$. Si l'intensité des rayons était la même pour tous les angles φ, la molécule acquerrait la moitié seulement de la température de l'enceinte. Si l'intensité des rayons décroît proportionnellement à $\sin\varphi$, la molécule acquerra une température égale à celle de l'enceinte.
93.	188. 190.	L'action d'un plan circulaire sur une molécule sphérique placée en un point de l'axe du plan est $a\,h\,\pi\,\rho^2\,\dfrac{\int_1 \frac{dz.\,Fz}{z}}{\int_2 dz.\,Fz}$. La première intégrale est prise de $z=Z$, valeur extrême, jusqu'à $z=1$; et la seconde, de $z=0$ à $z=1$. Si l'intensité des rayons émis est invariable, l'action de la surface échauffée est $a\,h\,\pi\,\rho^2.\log\left(\dfrac{1}{\sin\Phi}\right)$, Φ étant la valeur extrême de φ. La molécule pourrait acquérir, en vertu de l'action du plan, une température infiniment plus grande que a. Si l'intensité des rayons émis est proportionnelle au sinus de l'angle d'émission, l'action du plan sur la molécule est $2\,a\,\pi\,\rho^2\,h\,(1-\sin\Phi)$; et si, dans ce même cas, on place une molécule sphérique en un point quelconque de l'espace compris entre les deux surfaces échauffées, cette molécule acquerra et conservera la température a des deux surfaces.
	190.	Si l'on place une molécule sphérique en un point quelconque de l'axe d'une enveloppe cylindrique entretenue à la température a, on déterminera facilement l'action de cette enveloppe sur la molécule.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	

Si l'intensité des rayons émis est invariable, l'action de la sur-
face sur la molécule sera $a\pi\rho^2 h\,(\Psi+\Psi')$. Ψ et Ψ' sont les
angles que font avec la perpendiculaire abaissée de la molécule
sur la surface, des lignes qui, partant de cette molécule, abou-
94. tissent aux deux extrémités de la surface. Dans ce cas, la longueur
de l'enveloppe étant infinie, la molécule acquerrait une tempé-
rature moindre que a dans la raison de π à 4.
Si l'intensité des rayons émis décroît comme le sinus de l'angle
d'émission, l'action de l'enveloppe sur la molécule est

$$a\pi\rho^2 h\,(2\sin\Psi+2\sin\Psi');$$

et si la longueur du cylindre est infinie, la molécule acquiert et
192. conserve la température a de la surface échauffée.

192. Si l'on place une molécule sphérique en un point quelconque
de l'axe d'une enveloppe cylindrique fermée par deux plans cir-
culaires, et que cette enceinte soit maintenue par une cause ex-
térieure quelconque à la température a, il est facile de connaître
la température que la molécule doit acquérir, soit que l'intensité
95. des rayons ne dépende point de l'angle d'émission, soit qu'elle
varie proportionnellement au sinus de cet angle. Dans le pre-
mier cas, la température acquise dépend de la place qu'occupe
la molécule, et elle peut être ou moindre ou infiniment plus
grande que a; dans le second cas, la température acquise est
toujours égale à celle de la surface échauffée, en quelque lieu
193. que l'on place la molécule.

193. On suppose qu'une enceinte d'une figure quelconque termi-
nant de toutes parts un espace vide d'air soit maintenue à une
température constante a, et que l'on mette en un point de cet
espace un corps d'une figure quelconque. On prouve que ce corps
doit acquérir et conserver la même température que l'enceinte,
si l'intensité des rayons émis décroît proportionnellement au
sinus de l'angle d'émission. Dans ce cas, la partie infiniment
petite s de la surface du corps reçoit d'une portion infiniment
petite σ de l'enceinte autant de chaleur qu'elle lui en envoie.
Cette égalité des actions réciproques qui constitue l'équilibre
n'a lieu qu'autant que l'intensité décroît proportionnellement au
96. sinus de l'angle d'émission; elle ne peut résulter d'aucune autre
loi.
Ce résultat de l'action mutuelle de deux surfaces infiniment
petites s et σ, dont l'une a la température a et l'autre la tempéra-
ture b, est $\dfrac{s\sin p\,(a-b)\,h\,\sigma\sin\varphi}{y^2}$; y est la distance des deux
élémens s et σ; p est l'angle que fait la distance y avec s; φ est

NUMÉROS des articles. | NUMÉROS des pages.

l'angle que fait y avec σ; h est la conducibilité des deux surfaces. Cette proposition est indépendante de toute hypothèse physique sur la nature de la chaleur; elle contient la théorie mathéma-
196. tique de l'équilibre de la chaleur rayonnante.

97. 196. Lorsque l'équilibre des températures est formé, on peut concevoir qu'une portion infiniment petite quelconque de la surface extérieure du corps ou de l'enceinte est le centre d'un hémisphère continuellement rempli de rayons de chaleur; l'intensité du rayon est proportionnelle au sinus de l'angle que fait sa direction avec la surface dont il s'éloigne. A chacun des rayons émis correspond un rayon incident qui a la même intensité que lui, et qui, suivant une route opposée, pénètre la surface dans le
197. point même dont s'éloigne le rayon émis.

98. 197. Cet équilibre s'établit de la même manière lorsque les corps changent de lieu; il ne dépend ni de la forme ni du nombre
198. de ces corps.

99. 198. Toute modification de la surface des corps qui augmente la faculté de réfléchir une partie des rayons incidens, diminue aussi, et dans le même rapport, la faculté de projeter dans l'espace la chaleur intérieure. Cette relation est connue des physiciens, et elle est prouvée par l'expérience. Il en résulte que l'équilibre de la chaleur rayonnante subsiste dans tous les corps, de la même manière que s'ils étaient tous privés de la propriété
204. de réfléchir les rayons de chaleur à leur surface.

100. 204. Examen de la cause qui rend l'intensité des rayons émis d'autant moindre que leur direction est plus oblique. La loi mathématique du décroissement de cette intensité est indiquée par des expériences déjà publiées : elle est une conséquence nécessaire du mode de propagation de la chaleur à travers la surface
213. des corps solides.

213. XIV. *Comparaison des Résultats de la Théorie avec ceux de diverses Expériences.*

On a mesuré avec beaucoup de soin les températures stationnaires d'un anneau de fer très-poli exposé à l'action constante d'un ou de plusieurs foyers de chaleur. La circonférence était divisée en plusieurs parties égales, et l'on observait les températures fixes de plusieurs points de division. On a toujours remarqué entre ces températures les relations que la théorie avait fait connaître.

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	
101.	221.	Ainsi l'on a mesuré les élévations de trois thermomètres consécutifs; et en divisant la somme des élévations du premier et du troisième par celle du second, on a trouvé pour quotient un nombre très-voisin de 2, 3. On a mesuré onze valeurs de ce rapport prises dans des circonstances très-différentes : trois thermomètres consécutifs quelconques donnent toujours ce même quotient, et il ne dépend ni du nombre des foyers, ni de leur intensité, ni du lieu où ils sont placés. Chacune des onze valeurs observées ne s'éloigne pas de la valeur moyenne de la quatre-vingt-dixième partie de cette valeur; et si l'on n'emploie que les expériences faites le même jour; cette différence est moindre que la deux-centième partie de la valeur cherchée.
102.	221.	On a observé les températures variables de ce même anneau pendant qu'il se refroidissait librement dans l'air. Les thermomètres *A* et *A'* étaient placés aux extrémités d'un même diamètre; deux thermomètres *B* et *B'*, et deux autres *C* et *C'*, étaient aussi placés respectivement aux deux extrémités d'un diamètre. On mesurait dans le même instant les trois élévations a et a', b et b', c et c' des six thermomètres, et l'on comparait les trois demi-sommes $\frac{1}{2}(a+a')$, $\frac{1}{2}(b+b')$, $\frac{1}{2}(c+c')$. On a toujours remarqué que ces demi-sommes, qui étaient d'abord très-inégales, tendaient rapidement à devenir les mêmes et persistaient ensuite dans cet état. Quoiqu'on ait fait un grand nombre d'expériences de ce genre, on n'a jamais observé que les demi-sommes, après s'être approchées d'une valeur moyenne, s'en écartassent de plus d'un sixième de degré de l'échelle octogésimale. On a donc reconnu par le fait l'impossibilité d'obtenir un résultat différent de celui que la théorie indique. 226.
103.	226.	On a observé la température décroissante d'une masse sphérique de fer poli qui, après avoir été échauffée, était exposée isolément à l'air froid. Il s'est écoulé plus de 86' pendant que la température s'est abaissée de $63^{d.\ octog.}$ à 43^{d}, et l'on a mesuré les températures intermédiaires. Pendant toute la durée du refroidissement, l'état du solide a été exactement représenté par l'équation exponentielle que donne la théorie. En comparant les températures observées avec celles que l'on aurait pu déduire du calcul, on n'a trouvé que des différences moindres qu'un sixième de degré. Plusieurs expériences de ce genre ont donné des résultats également conformes à ceux de la théorie. 231.
	231.	On a rapporté aussi deux expériences faites avec beaucoup de soin, pour comparer les durées du refroidissement dans une

NUMÉROS des articles.	NUMÉROS des pages.	
104.	233.	sphère solide de fer, poli et un cube de même matière dont le côté est égal au rayon de la sphère. Ces diverses expériences ont eu pour but de vérifier les résultats les plus remarquables de la théorie, et de fournir pour une substance déterminée (le fer) les valeurs numériques des coefficiens h et K qui mesurent la conducibilité extérieure et la conducibilité propre de cette substance.
105.	233. 236.	Remarques générales.

NOTA.

CETTE table termine le Mémoire de M. Fourier sur la théorie de la chaleur. Une première partie de la table, celle qui se rapporte à la partie principale du Mémoire, où l'auteur traite des lois générales de la distribution de la chaleur, a été insérée dans le volume précédent.

Ces deux parties de l'ouvrage de M. Fourier, et l'une et l'autre tables, sont ici publiées sans aucun changement ni addition quelconque. Le texte est littéralement conforme au manuscrit déposé, qui fait partie des archives de l'Institut, afin qu'il puisse toujours être représenté.

Les premières recherches analytiques de l'auteur sur la communication de la chaleur ont eu pour objet la distribution entre des masses disjointes : on les a conservées dans la première partie du Mémoire.

Les questions relatives aux corps continus ont été résolues par l'auteur plusieurs années après. Il a exposé pour la première fois cette théorie dans un ouvrage manuscrit remis à l'Institut de France à la fin de l'année 1807, et dont il a été publié un extrait dans le *Bulletin des sciences de la société Philomatique*, année 1808, page 112. Il a joint ensuite à ce premier ouvrage des notes sur la convergence des séries, la diffusion de la chaleur dans un prisme infini, son émission dans un espace vide d'air, les constructions qui servent à rendre

sensibles les principaux théorèmes de cette analyse; enfin la solution d'une question qui était alors entièrement nouvelle, celle du mouvement périodique de la chaleur à la surface du globe terrestre.

Le second Mémoire sur la propagation de la chaleur a été déposé aux archives de l'Institut le 28 septembre 1811 : il est formé du précédent et des notes déjà remises. L'auteur a seulement retranché des constructions géométriques et des détails d'analyse qui n'avaient pas un rapport nécessaire avec la question physique, et il a ajouté l'équation générale qui exprime l'état de la surface. C'est cet ouvrage qui, ayant été couronné au commencement de 1812, est textuellement inséré dans la collection des Mémoires. Il a été livré à l'impression en 1821 par M. Delambre, secrétaire perpétuel; savoir : la première partie, dans le volume de 1819; la seconde, dans le volume suivant.

Les résultats de ces recherches, et de celles que l'auteur a faites depuis, sont aussi indiqués dans divers articles rendus publics. Voir les *Annales de chimie et de physique*, tome III, page 250, année 1816; tome IV, page 128, année 1817; tome VI, page 259, année 1817; le *Bulletin des sciences de la société Philomatique*, année 1818, page 1, et année 1820, page 60; l'*Analyse des travaux de l'Académie des Sciences*, par M. Delambre, année 1820, &c.; et l'ouvrage publié par l'auteur sous ce titre : *Théorie analytique de la chaleur*, in-4.°; Paris, 1822.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DU MAGNÉTISME;

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 2 Février 1824.

LES physiciens ont expliqué les attractions et les répulsions électriques, en les attribuant à deux fluides distincts, qui sont tels, que les molécules de chacun d'eux repoussent celles du même fluide et attirent avec la même force celles de l'autre fluide; et la loi de cette force, conclue de l'observation directe, est celle de la raison inverse du carré des distances, la même que la loi de l'attraction newtonienne, qui paraît régir toutes les actions des corps, sensibles à de grandes distances. En partant de cette hypothèse, on a déterminé par l'analyse mathématique la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs, la pression électrique qui a lieu de dedans en dehors en chaque point de cette surface, et l'action de la couche électrique qui la recouvre, sur un point quelconque de l'espace. Les résultats du calcul se sont trouvés parfaitement d'accord avec les nombreuses expériences que Coulomb a faites, il y a près de quarante ans,

sur cette matière ; et maintenant cette partie de l'électricité où l'on suppose les deux fluides en repos, et où l'on fait abstraction de toute action propre de la matière des corps électrisés, est complète, ou du moins elle ne présente plus que des difficultés d'analyse relatives à la forme et au nombre des corps soumis à leur influence mutuelle.

L'induction a suffi pour attribuer de même les attractions et les répulsions magnétiques à deux fluides impondérables, que les physiciens ont appelés *fluide boréal* et *fluide austral*. Il était naturel de leur supposer le même mode d'action réciproque; et, en effet, à la même époque où Coulomb a démontré par l'observation la loi élémentaire des actions électriques, en raison inverse du carré des distances, il a aussi conclu de ses expériences que cette loi convient également aux actions magnétiques. Toutefois, les preuves qu'il a données et qui sont incontestables pour l'électricité, sont loin d'être aussi concluantes par rapport au magnétisme; mais cela n'empêche pas d'admettre la même loi pour les actions à distances de ces deux genres de fluides impondérables, sauf à montrer que les conséquences qui s'en déduisent par un calcul rigoureux, s'accordent complétement avec l'expérience, pour le magnétisme comme pour l'électricité.

Indépendamment de la similitude des attractions et répulsions électriques et magnétiques, il existe encore une autre analogie entre le magnétisme et l'électricité : je veux parler de la distinction des corps en deux classes, selon qu'ils perdent ou conservent plus ou moins long-temps l'état électrique ou magnétique qu'on leur a fait prendre. Relativement à l'électricité, les corps que l'on appelle *conducteurs*, s'électrisent instantanément par l'influence de corps voisins déjà électrisés; et aussitôt qu'on les a soustraits à cette influence, ils ne conservent aucune trace d'électricité. Au contraire, les corps *non conducteurs* ne s'électrisent pas sensiblement par influence, à

moins qu'elle ne soit très-forte ou très-prolongée ; mais, lorsqu'on les a électrisés par d'autres moyens, ils conservent en chacun de leurs points l'électricité qu'on y a introduite, et qui s'y trouve retenue par une action propre de la matière de ces corps. A cet égard, les corps susceptibles d'aimantation se comportent d'une manière analogue : les uns, comme le fer doux, par exemple, qui n'a été ni tordu ni écroui, s'aimantent par l'influence d'un aimant voisin ; et dès qu'ils en sont éloignés, ils ne donnent plus de signes de magnétisme : les autres, tels que l'acier trempé, ne s'aimantent que très-difficilement par influence; mais, si l'on a excité en eux le magnétisme par d'autres moyens plus puissans, ils conservent cet état magnétique, sans doute aussi en vertu de quelque action particulière que leur matière exerce sur les deux fluides boréal et austral.

Telles sont les analogies principales que l'observation fait d'abord reconnaître entre l'électricité et le magnétisme ; mais, d'un autre côté, il existe entre ces deux affections des corps des différences essentielles, que nous allons rappeler, et qui ne permettent pas d'appliquer au magnétisme sans restriction la théorie de l'électricité.

L'électricité pénètre dans toutes les substances, soit pour les traverser librement, soit pour s'attacher à leurs molécules; au contraire, ce n'est que dans un très-petit nombre de corps, dans le fer à différens états, dans l'acier, le nickel et le cobalt, que l'on a reconnu distinctement des traces d'aimantation. D'après cela, l'on a pu se demander si le magnétisme est un fluide particulier, qui n'existe que dans les corps susceptibles d'aimantation, ou si ce n'est que le fluide électrique modifié par quelques propriétés spéciales de ces corps et distribué d'une manière particulière dans leur intérieur. Nous ne croyons pas qu'on puisse décider cette question dans l'état actuel de la science; tout ce qu'on a prouvé jusqu'ici, c'est qu'on parvient

à développer le magnétisme dans les corps par l'action de l'électricité : mais l'identité du fluide magnétique et du fluide électrique ne résulte pas nécessairement des faits importans qui ont été récemment découverts. Heureusement la solution de cette question n'importe nullement à l'objet de ce Mémoire; notre analyse est indépendante de la nature particulière des fluides boréal et austral : notre but est simplement de déterminer les résultantes de leurs attractions et répulsions, et, s'il est possible, comment ils sont distribués dans les corps aimantés.

Sur ce dernier point, l'opinion des physiciens n'a pas toujours été la même. Avant les travaux de Coulomb sur le magnétisme, on supposait les deux fluides transportés dans l'acte de l'aimantation aux deux extrémités des aiguilles de boussole et accumulés à leurs pôles; tandis que, suivant cet illustre physicien, les fluides boréal et austral n'éprouvent que des déplacemens infiniment petits, et ne sortent pas de la molécule du corps aimanté à laquelle ils appartenaient avant l'aimantation. Cette opinion, très-singulière au premier abord, est cependant celle qui a généralement prévalu; mais la théorie dont elle est le principe ne pouvait être convenablement développée que par l'analyse mathématique, ainsi qu'on le verra dans la suite de ce Mémoire. Voici le fait général sur lequel l'opinion de Coulomb est établie, et qui ne permet pas, selon nous, de douter de la nécessité de son hypothèse.

Si l'on approche d'un aimant un morceau de fer doux, celui-ci s'aimantera par influence, et, dans le contact, ces deux corps adhéreront l'un à l'autre plus ou moins fortement. Il en sera de même à l'égard d'un ou de plusieurs autres morceaux de fer qu'on approchera du premier : ces autres corps s'aimanteront aussi par influence, et ils adhéreront au premier dans le contact. Cela étant, si l'on sépare ces différens morceaux de fer, et qu'on les soustraie ensuite à l'influence de l'aimant,

on trouve qu'ils sont tous revenus à leur état naturel, et qu'aucune portion de fluide magnétique n'a passé ni de l'aimant dans le fer, ni d'un morceau de fer dans un autre. Or c'est là une différence capitale entre le magnétisme et l'électricité des corps conducteurs; car l'électricité passe librement d'un de ces corps dans un autre, lorsqu'ils sont en contact, ou seulement quand ils sont assez rapprochés pour que la pression de l'air qui contient l'électricité à leurs surfaces, soit vaincue par les pressions électriques. Ce fait, relatif au fluide magnétique, est général; il est indépendant de la forme et du volume des morceaux de fer doux qu'on met en contact, aussi-bien que de leur degré de magnétisme ou de la force de l'aimant qui agit sur eux : quelqu'intime que le contact ait été, et quelque temps qu'il ait duré, ce fluide ne passe jamais d'un morceau de fer dans l'autre; d'où il est naturel de conclure qu'aucune quantité appréciable de magnétisme n'est transportée non plus d'une partie dans l'autre du même morceau de fer, et que les deux fluides boréal et austral que ce métal contient à l'état naturel, n'éprouvent dans son intérieur que des déplacemens insensibles, lorsqu'ils sont séparés l'un de l'autre par une action extérieure. Cette conclusion s'étend également aux corps aimantés qui retiennent le magnétisme qu'on leur a fait prendre, soit par l'influence prolongée d'un fort aimant, soit par d'autres procédés d'aimantation; la seule différence qu'il y ait à cet égard entre ces corps et le fer doux, c'est qu'il existe en eux, comme nous l'avons dit plus haut, une force particulière à chaque substance, que l'on connaît sous le nom de *force coercitive*, dont l'effet est d'arrêter les particules de l'un et de l'autre fluide dans la position qu'elles occupent, et de s'opposer ainsi à la séparation des deux fluides et ensuite à leur réunion.

Non-seulement il n'existe qu'un très-petit nombre de substances susceptibles d'aimantation, mais dans des circonstances

exactement pareilles l'intensité de l'action magnétique n'est pas la même dans ces diverses substances. Ainsi deux masses de même forme et de même volume, l'une de fer et l'autre de nickel, dans lesquelles la force coercitive est insensible, et qui sont soumises à l'influence d'un même aimant, exercent au-dehors des forces différentes sur des points semblablement placés par rapport à chacune d'elles. Ce fait établit encore une différence essentielle entre le magnétisme et l'électricité; car les attractions ou répulsions exercées par des corps conducteurs, qui sont électrisés par la même influence extérieure, ne dépendent que de leurs formes et de leurs dimensions, et nullement de la matière dont ces corps sont formés. Il a été mis hors de doute, relativement aux actions comparées du fer et du nickel, par une expérience récente de M. Gai-Lussac, dont voici les détails et le résultat.

On a fait osciller, de part et d'autre du méridien magnétique, une aiguille horizontale, librement suspendue par son milieu; cette aiguille aimantée, longue de $0^m,2$, faisait dix oscillations en 131″, en vertu de l'action de la terre; on a posé au-dessous, dans le même méridien, sur un plan fixe horizontal, éloigné de l'aiguille de $0^m,05$, un barreau prismatique de fer doux, dont la longueur était de $0^m,196$, la largeur de $0^m,018$, l'épaisseur verticale de $0^m,0014$, et dont le milieu se trouvait dans la même verticale que le point de suspension de l'aiguille : les oscillations de celle-ci se sont aussitôt accélérées, de manière qu'il y en a eu d'abord dix en 65″, et bientôt le même nombre en 60″, terme auquel l'accélération s'est arrêtée. Cela fait, on a enlevé le barreau de fer doux, qu'on a remplacé par un barreau de nickel pur de même forme et de mêmes dimensions; l'aiguille a fait alors dix oscillations en 78″, et son mouvement s'est un peu accéléré jusqu'à ce qu'elle ait fait le même nombre d'oscillations en 77″. Le barreau de nickel ayant aussi été enlevé, l'aiguille

a repris à très-peu près son mouvement primitif : elle a fait dix oscillations en 130", en vertu de la seule action de la terre. On n'a reconnu dans les barreaux de fer et de nickel aucune trace de magnétisme après cette opération ; ce qui montre que la force coercitive était du moins très-faible dans ces métaux. Cependant on pourrait croire qu'elle n'était pas tout-à-fait nulle, puisque les deux barreaux ne sont pas parvenus subitement à l'état où ils exerçaient leur plus grande influence sur le mouvement de l'aiguille; mais cette circonstance peut aussi tenir à la réaction de leur fluide magnétique sur celui de l'aiguille, réaction dont l'effet n'a dû parvenir à son *maximum* qu'après un certain intervalle de temps, à cause de la force coercitive de l'acier trempé dont l'aiguille était formée. Quoi qu'il en soit, on doit conclure de cette expérience, dans laquelle tout a été semblable par rapport au fer et au nickel, que ces deux métaux, ayant été aimantés par l'influence d'un même aimant, qui était l'aiguille d'acier, ont réagi avec des forces inégales, l'action du fer surpassant notablement celle du nickel.

Peut-être pensera-t-on que cette inégalité d'action magnétique des corps aimantés de matières différentes tient à ce que chacune de ces substances renferme à l'état *neutre* une quantité limitée de fluide boréal et de fluide austral, laquelle quantité serait plus grande, par exemple, dans le fer que dans le nickel. Mais cette manière de voir serait contraire aux phénomènes : les quantités égales des deux fluides qui sont contenues dans chaque corps à l'état neutre, sont pour nous illimitées, c'est-à-dire qu'avec les forces dont nous pouvons disposer, nous ne parvenons jamais à les séparer entièrement dans l'acte de l'aimantation ; car, lorsqu'un corps est aimanté par l'influence d'un aimant voisin, les physiciens admettent que l'intensité de son action magnétique, manifestée par les effets produits au-dehors, s'accroît sans cesse à mesure que

l'on augmente la force de l'aimant qui agit sur ce corps; ce qui suppose évidemment que l'on n'a pas atteint la limite de décomposition du fluide neutre qu'il renferme, de même que l'on ne parvient pas non plus à séparer en totalité les deux fluides *vitré* et *résineux* dans l'intérieur d'un corps conducteur de l'électricité.

D'un autre côté, si l'on ne trouvait pas dans la constitution intime des corps de matières différentes qui recèlent le fluide magnétique, quelque différence à laquelle on pût attribuer l'inégalité de leur action magnétique, il faudrait en conclure que ce serait le fluide même qui agirait, en quantité et à distance égales, avec des intensités diverses, selon qu'il appartiendrait à un corps ou à un autre. Cette conclusion ne serait pas contraire à l'idée que nous nous formons du fluide magnétique ; car, cette substance impondérable ne devant jamais quitter les parties des corps où elle réside, il se pourrait qu'elle fût un fluide particulier à chaque corps, qui ne posséderait pas le même pouvoir attractif ou répulsif dans des corps de nature différente. Mais, après avoir beaucoup réfléchi à cette question, j'ai été conduit à penser que l'on pouvait attribuer l'inégalité d'action magnétique de ces corps à une circonstance que je vais expliquer.

Dans l'acte de l'aimantation, les deux fluides boréal et austral qui étaient réunis à l'état neutre, sont, comme nous l'avons dit, très-peu écartés les uns des autres. Nous ne déciderons pas si les parties des corps aimantés dans lesquelles la décomposition du fluide neutre peut s'effectuer, sont les molécules mêmes de ces corps; nous supposerons seulement que leurs dimensions sont toujours extrêmement petites; et, pour abréger le discours, nous appellerons *élément magnétique* chacune de ces petites parties dont la propriété caractéristique consiste en ce que les quantités des deux fluides y seront égales entre elles, dans l'état d'aimantation comme dans l'état neutre. Or

nous pouvons concevoir, pour envisager la question dans sa plus grande généralité, que les élémens magnétiques ne sont pas contigus dans l'intérieur des corps aimantés; qu'ils y sont, au contraire, séparés les uns des autres par des espaces pleins ou vides, où les deux fluides ne peuvent pénétrer, et que les dimensions de ces intervalles isolans sont du même ordre de grandeur que celles des élémens magnétiques, sans que cependant le rapport des unes aux autres soit le même dans les corps aimantés de nature différente. Cela étant, les attractions ou répulsions exercées par ces corps, dans les mêmes circonstances, seront différentes, comme l'expérience l'a déjà fait connaître à l'égard du nickel et du fer. Ainsi nous nous représenterons un corps aimanté comme un assemblage de parcelles magnétiques, séparées par des espaces inaccessibles au magnétisme; le rapport de la somme de toutes ces parcelles au volume entier du corps, qu'on pourrait prendre pour sa *densité* sous le rapport du magnétisme, sera une fraction qui approchera plus ou moins de l'unité dans les corps de nature diverse, et qui devra être donnée pour chaque corps en particulier. Les actions extérieures augmenteront ou diminueront d'intensité avec la grandeur de ce rapport. On verra, dans ce Mémoire, suivant quelle loi elles en dépendent; et, sur ce point, il sera possible de vérifier la théorie par l'expérience; car on pourra toujours faire varier à volonté le rapport dont nous parlons, en mélangeant dans telle proportion qu'on voudra de la limaille de fer très-fine avec une autre matière non magnétique : on soumettra ces corps ainsi formés à l'influence d'un très-fort aimant, et l'on mesurera ensuite les attractions ou répulsions qu'ils seront capables d'exercer.

Quant au pouvoir attractif ou répulsif des deux fluides, nous supposerons maintenant qu'il est le même dans tous les corps aimantés, à distance égale et pour des quantités égales

de fluide. C'est en effet la supposition la plus simple qu'on puisse faire *à priori*; et, l'inégalité d'action du fer et du nickel pouvant s'expliquer par une autre considération, aucun fait observé jusqu'ici ne nous oblige à nous en écarter. Il serait bon, néanmoins, que ce point fût éclairci par l'expérience. Voici celle que l'on pourrait faire pour le décider complétement.

Supposons qu'une aiguille aimantée, librement suspendue à la manière de Coulomb, soit soumise aux actions simultanées de plusieurs aimans formés de toutes les matières susceptibles d'aimantation; supposons, de plus, que les distances de ces aimans à cette aiguille soient assez grandes, par rapport à sa longueur, pour que la résultante des actions qu'ils exercent sur chaque particule du fluide appartenant à l'aiguille, soit constante et parallèle à elle-même dans toute cette longueur : il est évident que la direction de cette force sera celle que l'aiguille prendra, quels que soient sa force coercitive, sa forme et son degré d'aimantation, si toutefois la force de torsion du fil auquel elle est suspendue, est très-faible et peut être négligée par rapport à l'action des aimans. Si donc l'expérience est faite successivement sur des aiguilles de fer, d'acier, de nickel, de cobalt, aimantées d'une manière quelconque, et prises, pour plus de généralité, à différens degrés de température, elles devront toutes prendre la même direction, à moins que l'action du fluide appartenant à l'un des aimans ou à plusieurs d'entre eux ne soit pas la même sur tous les fluides contenus dans les différentes matières de ces aiguilles : par conséquent, si elles ne prennent pas toutes la même direction, sans qu'on ait rien changé à la disposition des aimans, il faudra rigoureusement en conclure que le pouvoir attractif ou répulsif des fluides boréal et austral varie avec la nature des corps qui les contiennent; et, dans le cas contraire, qui est le plus présumable, il sera prouvé

que ce pouvoir est indépendant de la matière et de la température des corps, ainsi que nous le supposerons dans ce Mémoire.

La quantité que nous introduirons dans nos calculs, et qui exprimera le rapport de la somme des volumes des élémens magnétiques au volume entier du corps dont ils font partie, pourra dépendre de la température de ce corps. Il est possible, effectivement, que la chaleur dilate les espaces qui séparent les élémens les uns des autres, et comprime ces élémens; ou *vice versâ*, sans changer dans le même rapport le volume total. Dans cette hypothèse, les attractions ou répulsions magnétiques exercées par un même corps varieront avec son degré de chaleur; ce qui paraît déjà indiqué par une ancienne expérience du physicien Canton, dans laquelle il a vu la déviation d'une aiguille de boussole, produite par l'action d'un barreau aimanté, diminuer à mesure que la température de ce barreau augmentait, et par d'autres observations plus étendues que Coulomb a laissées inédites, et qui ont été publiées par M. Biot dans le tome IV de son *Traité de physique*. Mais, ces diverses expériences ayant été faites sur des barreaux aimantés où la force coercitive était loin d'être nulle, les effets observés étaient dus sans doute à-la-fois à la variation de cette force et au changement du rapport dont nous parlons. Pour constater la variation de ce rapport et en trouver les lois, il serait donc nécessaire que les mêmes expériences fussent répétées sur le fer doux et sur le nickel pur à différentes températures; il serait même utile d'étendre ce genre d'observations à d'autres métaux où le magnétisme ne s'est pas encore manifesté, et de chercher s'ils ne deviendraient pas susceptibles d'aimantation à de très-basses températures. En effet, l'analogie porte à croire qu'il existe des élémens magnétiques dans tous ces corps qui jouissent déjà de tant de propriétés communes, mais que le rapport de la

somme de leurs volumes au volume entier de chaque corps, d'où dépend l'intensité de ses actions magnétiques, est une fraction très-petite dans la plupart des métaux connus : or, si ce rapport varie avec la température, et s'il augmente, par exemple, quand la chaleur diminue, il se pourrait qu'en abaissant convenablement la température d'un métal, ce rapport y devînt assez grand pour que ce corps fût alors susceptible d'aimantation à un degré sensible.

Lorsque la température d'un corps aimanté variera d'un point à un autre, le rapport en question variera de même, s'il dépend de la chaleur. Les lois des attractions ou répulsions exercées au-dehors par un tel corps dépendront de cette variation. Elles changeront si le corps vient à se refroidir inégalement dans ses différentes parties ; il en résultera des effets dont nous pourrons nous occuper dans un autre Mémoire, et auxquels on doit peut-être rapporter les anomalies singulières observées dans le fer incandescent (1).

Le rapport entre la somme des élémens magnétiques et le volume entier dans chaque corps aimanté n'est pas la seule donnée relative à ce corps, indépendamment de sa forme et de ses dimensions, d'où puisse dépendre l'intensité de ses actions magnétiques : la forme des élémens pourra aussi influer sur cette intensité ; et cette influence aura cela de particulier, qu'elle ne sera pas la même en des sens différens. Supposons, par exemple, que les élémens magnétiques sont des ellipsoïdes dont les axes ont la même direction dans toute l'étendue d'un même corps, et que ce corps est une sphère aimantée par influence, dans laquelle la force coercitive est nulle ; les attractions ou répulsions qu'elle exercera au-dehors seront différentes dans le sens des axes de ses élémens et dans tout autre sens ; en sorte que, si l'on fait tourner

(1) *Annales de physique et de chimie*, tome XX, page 427.

cette sphère sur elle-même, son action sur un même point changera, en général, en grandeur et en direction : mais, si les élémens magnétiques sont des sphères de diamètres égaux ou inégaux, ou bien s'ils s'écartent de la forme sphérique, mais qu'ils soient disposés sans aucune régularité dans l'intérieur d'un corps aimanté par influence, leurs formes n'influeront plus sur les résultats qui dépendront seulement de la somme de leurs volumes, comparée au volume entier de ce corps, et qui seront alors les mêmes en tout sens. Ce dernier cas est celui du fer forgé, et sans doute aussi des autres corps non cristallisés dans lesquels on a observé le magnétisme : mais il serait curieux de chercher si le premier cas n'aurait pas lieu lorsque ces substances sont cristallisées; on pourrait s'en assurer par l'expérience, soit en approchant un cristal d'une aiguille aimantée librement suspendue, soit en faisant osciller de petites aiguilles taillées dans des cristaux en toute sorte de sens et soumises à l'action d'un très-fort aimant.

Telles sont toutes les circonstances physiques ou les diverses données de la question à laquelle nous nous sommes proposé, dans ce Mémoire, d'appliquer l'analyse mathématique, et que nous croyons avoir présentée sous le point de vue le plus général et le plus conforme à la nature.

Le principal problème que nous avons eu à résoudre, a été de déterminer en grandeur et en direction la résultante des attractions ou répulsions exercées par tous les élémens magnétiques d'un corps aimanté, de forme quelconque, sur un point pris en dehors ou dans son intérieur. En ajoutant aux composantes de cette force relatives à un point intérieur, celles des forces extérieures qui influent sur ce corps, on aura les forces totales qui tendent à séparer les deux fluides réunis en ce point. Or, si la matière du corps n'oppose aucune résistance sensible au déplacement de ces deux fluides dans

chaque élément magnétique, ou, autrement dit, si la force coercitive est nulle, il sera nécessaire, pour l'équilibre magnétique, que ces forces totales soient égales à zéro, sans quoi elles produiraient une nouvelle décomposition du fluide neutre, qui n'est jamais épuisé, comme on l'a dit plus haut, et l'état magnétique du corps serait changé. Si, au contraire, la force coercitive n'était pas nulle dans le corps que l'on considère, il suffirait alors que la résultante de toutes les forces extérieures et intérieures qui agissent en un point quelconque de ce corps, ne surpassât nulle part la grandeur donnée de la force coercitive, dont l'effet serait analogue à celui du frottement dans les machines. Il en résulte que, dans ce cas, l'équilibre magnétique pourra subsister d'une infinité de manières différentes. Mais, parmi tous ces états d'équilibre possibles, il existe un état remarquable dans lequel les physiciens disent que les corps sont *aimantés à saturation*, et dont nous pourrons nous occuper dans un autre Mémoire : nous nous sommes bornés, dans celui-ci, à considérer l'état unique et déterminé des corps aimantés par influence, pour lesquels la force coercitive est supposée nulle.

Les deux fluides boréal et austral que l'aimantation a séparés, n'étant retenus par aucune force dans l'intérieur des élémens magnétiques, se transporteront à leurs surfaces, où ils seront arrêtés par la cause quelconque qui les empêche de pénétrer dans les espaces compris entre ces élémens. Ils y formeront une couche très-mince par rapport même aux dimensions de ces élémens : cela résulte, en effet, de ce que nous regardons le fluide neutre contenu dans chaque élément comme inépuisable; ce qui exige que la partie qui en est décomposée soit toujours très-petite relativement à la totalité de ce fluide. Toutefois, cette concentration à la surface des élémens, de la petite portion de fluide décomposée dans leur intérieur, n'aurait pas lieu si le fluide magnétique était de la

nature des fluides élastiques, c'est-à-dire, si les particules, outre leurs attractions ou répulsions mutuelles en raison inverse du carré des distances, étaient encore soumises à ce genre de forces, provenant de la chaleur ou de toute autre cause, qui ne sont sensibles qu'à des distances insensibles et qui produisent l'élasticité; mais nous supposerons que ces dernières forces n'existent pas, ou qu'elles sont insensibles par rapport aux premières. Cette remarque s'applique également au fluide électrique : si ce fluide impondérable était élastique, il se dilaterait dans l'intérieur des corps conducteurs de l'électricité, au lieu de former une couche très-mince à leurs surfaces; et, dans cette hypothèse, les phénomènes que ces corps devraient présenter cesseraient de s'accorder avec ceux qu'on observe.

Ce Mémoire est divisé en trois paragraphes. Le premier contient les expressions générales des attractions ou répulsions exercées par un corps de forme quelconque, aimanté par influence, sur un point donné de position. Ces forces sont exprimées par des intégrales triples; mais, après différentes transformations, on parvient, dans le second paragraphe, à les réduire à des intégrales doubles, dans le cas où le corps est homogène et a par-tout la même température. Il résulte de ces formules ainsi réduites, que les actions magnétiques d'un corps de forme quelconque sont équivalentes à celles d'une couche de fluide d'une très-petite épaisseur qui recouvrirait la surface entière, quoique cependant les deux fluides agissans soient répandus dans toute la masse de ce corps. Le troisième paragraphe contient l'application des formules générales au cas des corps sphériques. Dans ce cas, les équations de l'équilibre magnétique peuvent être résolues complétement, et les formules qui expriment les actions magnétiques de ces corps, sont immédiatement comparables aux résultats des observations. C'est pourquoi j'ai développé ces formules avec

beaucoup de détails, afin de faciliter la vérification de la théorie par l'expérience. On trouvera à la fin du Mémoire un essai de cette vérification, qui montre déjà la vérité de la théorie en général, mais qui laisse encore quelque chose à desirer sous le rapport de l'accord plus ou moins parfait des nombres donnés par le calcul ou par l'observation. Si l'on avait un amas de parcelles métalliques ou de toute autre matière, conductrices de l'électricité, mêlées en proportion donnée à des matières non conductrices, et qu'on soumît cet assemblage à l'influence d'un ou de plusieurs corps électrisés, les formules de mon Mémoire s'appliqueraient également à ce cas, qui n'avait pas encore été considéré, et elles feraient connaître en grandeur et en direction les actions électriques exercées par ce mélange; ce qui pourra encore être vérifié par des observations directes.

Dans un second Mémoire, nous essaierons de déterminer, d'après les principes et les formules contenues dans celui-ci, la distribution du magnétisme dans les aiguilles d'acier aimantées à saturation et dans les aiguilles de fer doux aimantées par influence, d'où nous déduirons ensuite les lois de leurs attractions ou répulsions mutuelles.

§. I.er

Expressions générales des Attractions ou Répulsions exercées par un Corps aimanté par influence.

(1) Considérons un corps aimanté par influence, de forme et de dimensions quelconques, dans lequel la force *coercitive* soit nulle, et que nous appellerons A, pour abréger.

D'après ce qui précède, nous regarderons ce corps comme un assemblage d'*élémens magnétiques*, séparés les uns des autres par des intervalles inaccessibles au magnétisme; et voici, par

rapport à ces élémens, les diverses suppositions résultant de la discussion dans laquelle nous venons d'entrer, qui serviront de base à nos calculs.

1.° Les dimensions des élémens magnétiques, et celles des espaces qui les isolent, sont insensibles, et pourront être traitées comme des infiniment petits, relativement aux dimensions du corps A.

2.° La matière de ce corps n'oppose aucun obstacle à la séparation des deux fluides *boréal* et *austral*, dans l'intérieur des élémens magnétiques.

3.° Les portions des deux fluides que l'aimantation sépare dans un élément quelconque, sont toujours très-petites, eu égard à la totalité du fluide *neutre* que cet élément renferme, et ce fluide neutre n'est jamais épuisé.

4.° Ces portions de fluide, ainsi séparées, se transportent à la surface de l'élément magnétique, où elles forment une couche dont l'épaisseur, variable d'un point à un autre, est par-tout très-petite, et pourra aussi être considérée comme infiniment petite, même en la comparant aux dimensions de cet élément.

Ces principes étant posés, nous allons d'abord déterminer l'action d'un élément quelconque sur un point donné de position, en dehors ou en dedans du corps A.

(2) Appelons M ce point; soient x, y, z, ses trois coordonnées rectangulaires; prenons dans l'intérieur de l'élément magnétique que nous voulons considérer, un point fixe C auquel nous rapporterons, comme origine, les coordonnées des points de la surface; désignons par x', y', z', les coordonnées du point C, rapportées aux mêmes axes que celles du point M, et par ρ la distance mutuelle de ces deux points, en sorte qu'on ait

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Désignons aussi par h le côté d'un cube équivalent en volume à l'élément magnétique. Soit M' un point quelconque de sa surface : représentons par $h\chi$, $h\xi$, $h\zeta$, ses trois coordonnées apportées à des axes menés par le point C, et parallèles à ceux des x', y', z'; et par $\rho_{,}$ sa distance au point M, dont la valeur se déduira de celle de ρ, en y augmentant x', y', z', de $h\chi$, $h\xi$, $h\zeta$. Soit ε l'épaisseur de la couche magnétique au point M', évaluée dans le sens de la normale à la surface; appelons $h^2 ds$ l'élément différentiel de cette surface au même point : le produit $h^2 \varepsilon ds$ sera l'élément de volume de la couche magnétique en ce point M'.

Nous appellerons fluide *libre* en un point quelconque, l'excès du fluide boréal sur le fluide austral qui s'y trouve : ce fluide sera nul dans l'intérieur de l'élément magnétique, positif en différentes parties de sa surface, et négatif dans les autres parties. Représentons par $\mu h^2 \varepsilon ds$ la quantité de ce fluide contenue dans l'élément $h^2 \varepsilon ds$, de sorte que le coefficient μ soit une quantité positive ou négative, qui exprime le fluide libre que renfermerait l'unité de volume, dont tous les élémens seraient dans le même état que $h^2 \varepsilon ds$. Puisque les deux fluides boréal et austral sont en quantités égales dans la totalité de la couche mince qui termine chaque élément magnétique, il s'ensuit que l'intégrale de $\mu h^2 \varepsilon ds$, étendue à la surface entière d'un élément, devra être égale à zéro. Ainsi, en supprimant le facteur constant h^2, nous aurons l'équation

$$\int \mu \varepsilon ds = 0. \qquad (1)$$

A cause de la petitesse supposée de ε par rapport à h, on pourra, dans le calcul de l'action exercée sur le point M par l'élément magnétique que nous considérons, traiter ε comme un infiniment petit, lors même que l'on aura égard aux dimensions de cet élément. D'après cela, l'action de $\mu h^2 \varepsilon ds$ sur une particule magnétique située en M sera exprimée

par

$$\frac{\mu h^2 \varepsilon ds}{\rho_1^2};$$

en prenant pour unité de force l'intensité du pouvoir magnétique, agissant sous l'unité de volume et à l'unité de distance. Pour fixer les idées, nous supposerons que cette particule soit australe, et alors la force dirigée suivant MM' sera attractive ou répulsive, selon que son expression sera positive ou négative. Ses trois composantes parallèles aux axes des x, y, z, pourront, comme on sait, s'exprimer par

$$\frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dx}\mu h^2 \varepsilon ds, \quad \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dy}\mu h^2 \varepsilon ds, \quad \frac{d\frac{1}{\rho_1}}{dz}\mu h^2 \varepsilon ds.$$

Elles tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées du point M, selon qu'elles seront positives ou négatives; l'inverse aurait lieu si la particule située en ce point était boréale.

Il ne s'agira que d'intégrer ces trois expressions, et d'étendre les intégrales à la surface entière de l'élément magnétique, pour connaître, en grandeur et en direction, son action totale sur le point M.

(3) Pour cela, développons la quantité $\frac{1}{\rho_1}$ suivant les puissances de h. Cette série sera, en général, très-convergente; il n'y aura d'exception que dans le cas particulier dont il sera question plus bas, où la distance du point M à l'élément magnétique sera du même ordre de petitesse que les dimensions de cet élément. Mais, dès que cette distance aura une grandeur sensible, nous pourrons négliger, dans le développement de $\frac{1}{\rho_1}$, tous les termes qui contiennent des puissances de h supérieures à la première, d'où il résultera sim-

plement

$$\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho}+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}h\chi+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}h\xi+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}h\zeta.$$

Si l'on substitue cette valeur dans les formules précédentes, le premier terme disparaîtra dans leurs intégrales, en vertu de l'équation (1); faisant ensuite

$$\int \chi\mu\varepsilon ds=\alpha',\ \int\xi\mu\varepsilon ds=\beta',\ \int\zeta\mu\varepsilon ds=\gamma',$$

et pour abréger,

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}\alpha'+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}\beta'+\frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}\gamma'=q;$$

désignant enfin par λ, λ', λ'', les trois composantes de la force cherchée, respectivement parallèles aux axes des x, y, z, on aura

$$\lambda=h^3\frac{dq}{dx},\ \lambda'=h^3\frac{dq}{dy},\ \lambda''=h^3\frac{dq}{dz}. \quad (2)$$

On voit par-là que ces trois composantes ne dépendent point de la forme de l'élément magnétique, ni de la distribution du fluide libre à sa surface; elles dépendent des trois quantités α', β', γ', qui varient avec la position de l'élément dans l'intérieur de A, et dont nous aurons à déterminer les valeurs en fonctions des coordonnées x', y', z', d'après la forme de ce corps, et les forces extérieures qui agissent sur ses deux fluides. Il n'en serait pas de même si le point M était très rapproché de l'élément magnétique; l'action de cet élément dépendrait alors de sa forme et de la distribution du fluide libre à sa surfacce, de telle sorte qu'on ne pourrait la connaître qu'en faisant une hypothèse sur cette forme, et après avoir déterminé, en conséquence, la loi des épaisseurs du fluide libre à la surface. Mais heureusement nous n'aurons pas besoin de considérer l'action des élémens magnétiques

sur les points circonvoisins qui en sont à une distance comparable à leurs dimensions.

(4) Les intégrales que α', β', γ', représentent, ne varient pas quand la position du point C change dans l'intérieur de l'élément magnétique ; car alors chacune des trois coordonnées χ, ξ, ζ, augmente ou diminue d'une quantité constante, et la variation correspondante de chacune des quantités α', β', γ', est nulle en vertu de l'équation (1). Ces intégrales changent de valeurs quand on change la direction des axes des coordonnées ; et si l'on appelle α'', β'', γ'', leurs valeurs relatives à trois nouveaux axes rectangulaires, on aura, d'après les formules de la transformation des coordonnées,

$$\alpha' = \alpha'' \cos a + \beta'' \cos a' + \gamma'' \cos a'',$$
$$\beta' = \alpha'' \cos b + \beta'' \cos b' + \gamma'' \cos b'',$$
$$\gamma' = \alpha'' \cos c + \beta'' \cos c' + \gamma'' \cos c'';$$

a, b, &c., étant les angles que les nouveaux axes font avec les anciens. Par suite des relations connues qui existent entre les cosinus de ces angles, on aura

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2.$$

De plus, il sera facile de déterminer les directions des nouveaux axes, de manière que deux des trois quantités α'', β'', γ'', les deux dernières, par exemple, soient égales à zéro ; posant en outre,

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = \delta^2, \qquad (3)$$

on aura $\alpha'' = \delta$, et

$$\alpha' = \delta \cos a,\ \beta' = \delta \cos b,\ \gamma' = \delta \cos c. \qquad (4)$$

Les angles a, b, c, seront ceux que fait l'axe particulier qui répond à cette quantité δ, avec les axes menés par le point C, suivant les directions des x', y', z', positives. Appelons i l'angle compris entre la droite CM, et cet axe ; l, l', l'',

les angles que fait cette même droite avec les directions des x', y', z', angles qui pourront s'étendre ainsi que a, b, c, depuis zéro jusqu'à la demi-circonférence : on aura, d'après une formule connue,

$$\cos i = \cos a \cos l + \cos b \cos l' + \cos c \cos l''.$$

On aura aussi

$$\frac{x - x'}{\rho} = \cos l, \quad \frac{y - y'}{\rho} = \cos l', \quad \frac{z - z'}{\rho} = \cos l'';$$

et, au moyen de ces diverses valeurs, celles de λ, λ', λ'', deviendront

$$\lambda = -\frac{h^3 \delta}{\rho^3}(3 \cos i \cos l - \cos a),$$

$$\lambda' = -\frac{h^3 \delta}{\rho^3}(3 \cos i \cos l' - \cos b),$$

$$\lambda'' = -\frac{h^3 \delta}{\rho^3}(3 \cos i \cos l'' - \cos c);$$

d'où l'on conclut pour la résultante de ces trois forces :

$$\frac{h^3 \delta}{\rho^3} \sqrt{3 \cos^2 i + 1},$$

abstraction faite du signe. Elle atteindra son *maximum* et sera égale à $\frac{2 h^3 \delta}{\rho^3}$, quand le point M sera situé sur l'axe qui répond aux angles a, b, c. Sa direction coïncidera alors avec cet axe, et, dans tous les cas, elle sera comprise dans le plan de ce même axe et de la droite CM.

Cette action d'un élément magnétique sur un point M qui en est à une distance sensible, est équivalente à celle d'une petite aiguille aimantée dont la direction serait déterminée par les angles a, b, c, et qui contiendrait, à chacun de ses pôles, une quantité convenable de fluide libre : $2h$ étant sa longueur, et son milieu répondant au point C, cette quantité de fluide devra être égale à $\frac{1}{2} h^2 \delta$. La direction de cette petite aiguille indiquera le sens de l'aimantation du corps A,

au point M; et si l'on concevait dans son intérieur une suite de lignes tangentes en chaque point à la petite aiguille correspondante, chacune de ces courbes pourrait s'appeler une *ligne d'aimantation*. Les deux équations différentielles du premier ordre, de ce système de lignes à double courbure, se formeront immédiatement, quand on connaîtra les valeurs de α', β', γ', en fonctions de x', y', z'.

L'équation (3) donnera pour δ deux valeurs égales et de signes contraires; la valeur positive répondra au pôle boréal de la petite aiguille, et la valeur négative, à son pôle austral; pour chacune de ses deux valeurs, les équations (4) détermineront sans ambiguité la direction de la droite menée du point C au pôle correspondant.

(5) Concevons autour de ce point C un volume v dont les dimensions soient très-grandes, et comme infinies par rapport à celles des élémens magnétiques, et qu'on puisse cependant regarder comme très-petites relativement aux dimensions du corps A. Désignons par k' la somme des volumes des élémens magnétiques contenus dans v, divisée par ce volume. Ce rapport k' ne pourra jamais surpasser l'unité. Si A est homogène, et si sa température est par-tout la même, la fraction k' sera aussi la même dans toute l'étendue de A; mais elle devra être donnée en particulier pour chaque substance susceptible d'aimantation, et pour chaque température. Pour plus de généralité, nous considérerons k' comme une fonction donnée des coordonnées x', y', z', du point C; ce qui comprendra le cas où la température de A variera d'un point à un autre.

Il est important d'observer que, quoique le volume v soit supposé très-petit, les quantités α', β', γ', n'auront pas les mêmes valeurs dans toute son étendue, si les élémens magnétiques qu'il renferme n'ont pas tous la même forme, ou

s'ils ne sont pas régulièrement disposés; mais, dans tous les cas, les composantes de l'action exercée par cette petite portion de A sur un point M qui en est très-éloigné, seront exprimées par les valeurs de λ, λ', λ'', en y remplaçant le volume h^3 d'un élément magnétique par la somme $v\,k'$ de tous les élémens contenus dans v, et prenant pour α', β', γ', les moyennes de leurs valeurs relatives à tous ces élémens. On devra supposer que ces moyennes sont soumises à la loi de continuité, et qu'elles peuvent s'exprimer par des fonctions des coordonnées x', y', z', du point C, sans quoi l'analyse mathématique ne saurait s'appliquer à la question qui nous occupe.

La résultante de ces forces λ, λ', λ'', à l'unité de distance, et dans le sens de son *maximum*, sera égale à $2\,v\,k'\,\delta$; le coefficient $2\,k'\,\delta$, par lequel le volume v est multiplié dans cette expression, pourra servir de mesure à l'intensité du magnétisme de A au point C : cette intensité et le sens de l'aimantation dans les différens points de ce corps, sont tout ce qu'on peut connaître de la *distribution* du magnétisme dans son intérieur; mais ce qu'il importe bien plutôt de déterminer, ce sont les attractions ou répulsions que le corps A exerce sur un point M donné de position.

(6) Supposons d'abord que ce point, dont les coordonnées seront toujours x, y, z, soit situé en dehors de A; partageons le volume de ce corps en un grand nombre de petits volumes, tels que v, égaux ou inégaux : l'action de chacun de ces volumes sur le point M étant connue en grandeur et en direction, d'après le numéro précédent, il suffira de prendre la somme des actions de tous les volumes, décomposées suivant un même axe, pour avoir l'action totale de A suivant cet axe; or cette sommation de quantités finies pourra être remplacée par une

intégrale définie. En effet, si $v f(x', y', z')$ représente le terme général des quantités que l'on veut sommer, x', y', z' étant les coordonnées de l'un des points du volume v, et si cette somme doit être étendue à toutes les parties dans lesquelles on a divisé un volume déterminé V, on sait, par les principes du calcul intégral, que cette somme sera à très-peu près égale à l'intégrale triple $\int\int\int (x', y', z')\, dx'\, dy'\, dz'$, étendue au volume entier V. La différence entre la somme et l'intégrale est d'autant moindre que les volumes partiels sont plus petits par rapport au volume entier; et, dans le cas actuel, on peut la négliger sans craindre qu'il en résulte une erreur appréciable.

D'après cela, si nous appelons X, Y, Z, les trois composantes suivant les axes des x, y, z, de l'action du corps A sur le point M, nous aurons leurs valeurs, en substituant d'abord $k'\, dx'\, dy'\, dz'$ à h^3 dans les seconds membres des équations (2), et les intégrant ensuite dans toute l'étendue de A; ce qui donnera

$$\left.\begin{aligned} X &= \int\int\int \frac{dq}{dx}\, k'\, dx'\, dy'\, dz', \\ Y &= \int\int\int \frac{dq}{dy}\, k'\, dx'\, dy'\, dz', \\ Z &= \int\int\int \frac{dq}{dz}\, k'\, dx'\, dy'\, dz'. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

On se souviendra que, la particule magnétique située au point M étant supposée australe, ces forces tendront à augmenter ou diminuer ses coordonnées x, y, z, selon que les valeurs de X, Y, Z, seront positives ou négatives.

(7) Lorsque le point M, sur lequel agit le corps A, sera situé dans son intérieur, il faudra déterminer d'une manière particulière l'action de l'élément magnétique dont M fait partie, et celle des autres élémens qui en sont très-voisins; car les formules précédentes ne conviennent pas au cas dont

nous parlons, puisqu'elles supposent les distances des élémens au point M très-grandes par rapport à leurs dimensions. Nous rangerons donc les élémens magnétiques en deux classes, ceux qui sont à une distance sensible du point M, et ceux, au contraire, qui en sont très-rapprochés. Relativement aux premiers, les valeurs de X, Y, Z, données par les équations (5), exprimeront toujours les composantes totales de leur action sur le point M, en ne comprenant pas dans les intégrales triples les points de A contenus dans une très-petite étendue autour de M, c'est-à-dire, dans une étendue dont les dimensions, quoique très-grandes par rapport à celles des élémens magnétiques, seront néanmoins insensibles par rapport aux dimensions de A. Quant aux autres élémens magnétiques, ils seront circonscrits dans une semblable étendue autour de M, et nous déterminerons l'action de cette portion de A sur ce point intérieur, en nous fondant sur la proposition suivante.

Menons par le point M une droite CMC', dont les deux parties MC et MC' soient égales entre elles, et d'une grandeur telle, qu'on puisse les considérer à-la-fois comme infiniment petites en les comparant aux dimensions de A, et comme infinies relativement aux dimensions des élémens magnétiques et des espaces qui les séparent les uns des autres. La proposition dont nous avons besoin consiste en ce que si les deux extrémités C et C' de cette droite tombent l'une et l'autre hors d'un élément magnétique, la somme des particules de fluide libre devra être considérée comme égale sur ses deux parties MC et MC', en n'y comprenant pas le fluide libre appartenant à l'élément magnétique dont le point M fait partie.

En effet, tous les élémens traversés par la droite CMC' seront sensiblement dans le même état magnétique, puisque la longueur de cette droite est insensible, eu égard aux dimensions de A; de plus, abstraction faite de l'élément dont

le point M fait partie, la droite CM, en allant de C vers M, et la droite MC', en allant de M vers C', rencontreront, en général, un même nombre de fois les surfaces des élémens magnétiques, en pénétrant dans leur intérieur; elles rencontreront aussi ces surfaces le même nombre de fois, en sortant des élémens. A la vérité, ces points de rencontre ne seront pas semblablement situés sur toutes les surfaces; mais, leur nombre étant très-grand et comme infini, les mêmes circonstances devront toutes se présenter des deux côtés du point M, et alors il n'y aura pas de raison de supposer la quantité de fluide libre plus grande d'un côté que de l'autre.

(8) Cela posé, appelons, pour abréger, B la petite portion de A dont nous voulons déterminer l'action sur le point M, et, pour cette détermination, décomposons B en une infinité de cônes infiniment aigus, dont les sommets soient en ce point M. Comme l'autre partie de A, dont l'action sur M a pour composantes les forces X, Y, Z, se compose d'élémens magnétiques qui sont tous complets, il sera nécessaire que B se compose de même d'élémens entiers; d'où il résulte que l'axe de chacun de ces cônes devra se terminer hors d'un élément magnétique.

Soit ω l'aire infiniment petite de la section faite dans l'un de ces cônes, perpendiculairement à son axe et à l'unité de distance du sommet M; désignons par r la distance d'un point quelconque de cet axe au point M; l'élément de volume du cône, à cette distance r, sera $r^2 \omega dr$; et, si l'on appelle μ la quantité de fluide libre qui répond au même point, l'action de cet élément sur le sommet, dirigée suivant l'axe du cône, sera exprimée par $\mu \omega dr$. L'action du cône entier aura la même direction, et pour valeur $\omega \int \mu dr$; l'intégrale étant prise dans toute la longueur de son axe, et exprimant évidemment la quantité de fluide libre qui se trouve sur cette

droite. L'action du cône dont l'axe est le prolongement de celui-ci, sera dirigée en sens contraire; ces deux forces opposées se détruiront en partie; et si l'on suppose, ce qui est permis, les deux cônes d'égale longueur, et de même ouverture ω, ces deux forces se réduiront, en vertu de la proposition précédente, à la seule action du fluide libre, appartenant à-la-fois à l'un des cônes et à l'élément magnétique dont le point M fait partie. Il en sera de même à l'égard de tous les cônes considérés deux à deux, en sorte que l'action totale de B sur le point M sera réduite à celle de la couche magnétique qui occupe la surface de ce même élément. On voit aussi par ce raisonnement que si le point M était situé hors d'un élément magnétique, l'action de B sur ce point se détruirait complétement, c'est-à-dire qu'une particule de fluide boréal ou austral qu'on y placerait, y demeurerait en équilibre, si elle n'était soumise qu'à cette seule action.

Ces conclusions sont indépendantes de la forme de B : elles exigent seulement que cette portion de A ne contienne que des élémens magnétiques complets, et que les rayons menés du point M à sa surface soient tous très-grands par rapport aux dimensions des élémens, et néanmoins insensibles relativement aux dimensions de A ; et en effet, pourvu que ces conditions soient toujours remplies, on pourra augmenter ou diminuer B sans altérer sensiblement son action sur le point M : l'action des élémens entiers que l'on ajoutera ou que l'on retranchera de cette manière, se calculera par la méthode du n.° 6; mais, vu la petite étendue dans laquelle ces élémens seront circonscrits, les intégrales triples qui s'y rapporteront, pourront être négligées par rapport aux forces X, Y, Z, auxquelles doivent être ajoutées les composantes de l'action B. Mais la condition relative à la distance de M aux points extrêmes de B ne sera pas remplie tout autour du point M, quand il sera situé à la surface de A, ou extrêmement près de

cette surface. L'action totale de ce corps sur les points très-voisins de sa superficie dépendrait, en chaque point, de la disposition particulière des élémens magnétiques autour de ce point : c'est pourquoi nous ne chercherons pas à la déterminer; et il nous suffira de prévenir que tout ce qui va suivre n'est applicable qu'aux points de A, dont la distance à sa surface est très-grande par rapport aux dimensions des élémens; ce qui aura lieu, au reste, dès que ces points seront situés à une profondeur appréciable.

(9) L'action d'un élément magnétique sur un point M de son intérieur, à laquelle se réduit l'action de B, est facile à déterminer. En effet, menons par le point M trois axes rectangulaires que nous supposerons, par exemple, parallèles aux axes des x, y, z, et dirigés dans le sens des coordonnées positives; soit θ l'angle compris entre l'axe des x et un rayon quelconque mené du point M à la surface de l'élément : désignons par ψ, l'angle compris entre le plan de ces deux droites et le plan des x, z; par ϵ, l'épaisseur de la couche magnétique à l'extrémité de ce rayon r, évalué suivant sa direction; par μ, la mesure du fluide libre au même point : l'action exercée sur le point M dans cette direction sera exprimée par $\mu\epsilon \sin\theta . d\theta d\psi$; ce qui n'est autre chose que la valeur de la quantité $\omega\mu d.r$ du numéro précédent, en prenant l'intégrale depuis l'entrée du rayon r dans la couche de fluide libre jusqu'à sa sortie, et mettant pour ω l'élément $\sin\theta . d\theta d\psi$ de la surface sphérique qui a l'unité pour rayon. Les composantes de cette force, suivant les axes des x, y, z, s'en déduiront en multipliant son expression par $\cos\theta$, $\sin\theta \sin\psi$, $\sin\theta \cos\psi$, qui sont les cosinus des angles que sa direction fait avec ces trois axes. En intégrant ensuite ces produits par rapport à θ et à ψ, on en conclura les composantes de l'action exercée sur le point M par l'élément magnétique auquel il appartient. Si

Mm*

donc on appelle $\alpha_,$, $\beta_,$, $\gamma_,$, ces composantes suivant les x, y, z, on aura

$$\left.\begin{aligned} \alpha_, &= \iint \mu e \cos\theta \sin\theta \, d\theta \, d\psi; \\ \beta_, &= \iint \mu e \sin^2\theta \sin\psi \, d\theta \, d\psi; \\ \gamma_, &= \iint \mu e \sin^2\theta \cos\psi \, d\theta \, d\psi; \end{aligned}\right\} (6)$$

les intégrales étant étendues à la surface entière de l'élément, ce qui exigera qu'on les prenne depuis $\theta = 0$ et $\psi = 0$, jusqu'à $\theta = \pi$ et $\psi = 2\pi$, et ne pourra s'effectuer que quand le produit μe sera donné en fonction de θ et ψ : la quantité π représente ici, et dans tout ce Mémoire, le rapport de la circonférence au diamètre.

Selon que ces forces seront positives ou négatives, elles tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées d'une particule australe située au point M; elles agiront en ce point dans le même sens que les autres forces X, Y, Z; par conséquent, les composantes de l'action totale de A sur un point déterminé M seront exprimées par

$$X + \alpha_,, \quad Y + \beta_,, \quad Z + \gamma_,.$$

Ces valeurs subsisteront encore lorsque le point M sera situé à la surface intérieure de la couche de fluide libre qui termine l'élément auquel il appartient; leur expression changerait s'il faisait partie de cette couche : mais les forces qui agissent sur le fluide libre dont elle est composée, sont détruites par l'obstacle quelconque qui s'oppose à sa sortie de l'élément magnétique; ce qui rend leurs composantes inutiles à connaître. Nous observerons seulement que, l'action de B sur les points placés en dehors des élémens magnétiques étant nulle d'après le numéro précédent, les composantes de l'action totale de A sur les particules situées à leurs surfaces extérieures se réduiront aux seules forces X, Y, Z.

(10) Nous pouvons maintenant former les équations d'équi-

libre des deux fluides magnétiques contenus dans le corps A, que nous venons de considérer. Pour cela, supposons que d'autres corps aimantés, en nombre et de forme quelconques, agissent sur ces deux fluides. Soit V, la somme des particules de fluide libre qu'ils renferment, divisées respectivement par leurs distances au point M du premier corps, dont les coordonnées sont x, y, z, lequel point est situé dans l'intérieur d'un élément magnétique et ne fait pas partie de la couche de fluide libre qui termine cet élément. Les composantes de l'action de toutes ces particules sur le point M, parallèles aux axes des x, y, z, et dirigées dans le même sens que les forces précédentes, seront exprimées, comme on sait, par les trois différences partielles :

$$\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz}.$$

En les ajoutant aux forces du numéro précédent, on aura les composantes rectangulaires de toutes les forces appliquées au point M, et qui proviennent soit du corps A dont il fait partie, soit des autres corps aimantés. Or, la matière de A n'apportant aucune résistance au déplacement des deux fluides dans l'intérieur de chaque élément, il sera nécessaire, comme nous l'avons dit dans le préambule de ce Mémoire, que ces composantes totales soient nulles, sans quoi elles produiraient une nouvelle décomposition du fluide neutre qui se trouve en M et qui n'est jamais épuisé ; décomposition qui troublerait l'équilibre des deux fluides et changerait l'état magnétique de A. Lors donc que ce corps sera parvenu à un état permanent, nous aurons ces trois équations :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx} + X + \alpha_{\prime} &= 0, \\ \frac{dV}{dy} + Y + \beta_{\prime} &= 0, \\ \frac{dV}{dz} + Z + \gamma_{\prime} &= 0. \end{aligned}\right\} (7)$$

Elles contiennent six inconnues, savoir $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, et les quantités α', β', γ', qui entrent dans les expressions de X, Y, Z; elles ne suffiraient donc pas pour les déterminer : mais ces six inconnues se réduisent à trois, d'après les relations qui existent entre elles et qui dépendent de la forme des élémens, sur laquelle nous n'avons fait jusqu'ici aucune hypothèse. En vertu de ces relations, la forme des élémens et leurs positions par rapport aux plans fixes des coordonnées x, y, z, peuvent influer sur l'état magnétique de A et sur les attractions ou répulsions qu'il exerce au-dehors. Il pourrait même arriver que cette influence ne fût pas la même en tout sens, en sorte que, si A était une sphère homogène, et qu'on fit tourner ce corps sans déplacer son centre et sans rien changer aux forces extérieures ou à la fonction V, les actions magnétiques de A changeraient néanmoins en grandeur et en direction. Ce cas singulier, que nous avons déjà indiqué dans le préambule de ce Mémoire, ne s'étant pas encore présenté à l'observation, nous l'exclurons de nos recherches, quant à présent, et nous allons, en conséquence, déterminer les relations qui doivent exister entre α', β', γ', et les quantités $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, pour qu'il n'ait pas lieu.

(11) Supposons que ces six quantités appartiennent à un même élément magnétique, et désignons par α, β, γ, ce que deviennent les trois premières, quand les coordonnées d'un point quelconque pris dans cet élément sont x, y, z, au lieu d'être x', y', z', comme dans le n.° 21 Il est aisé de voir que les relations qui lieront entre elles ces six quantités, seront exprimées par des équations linéaires de la forme :

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= P\,\alpha_{,} + Q\,\beta_{,} + R\,\gamma_{,}, \\ \beta &= P'\,\alpha_{,} + Q'\,\beta_{,} + R'\,\gamma_{,}, \\ \gamma &= P''\,\alpha_{,} + Q''\,\beta_{,} + R''\,\gamma_{,}; \end{aligned}\right\} (8)$$

dans lesquelles les neuf coefficiens P, Q, &c., dépendront, en général, de la forme de l'élément magnétique et de sa position par rapport aux plans fixes des x, y, z.

Si l'on divise le corps A en un très-grand nombre de petites parties, et s'il arrive que les élémens appartenant à l'une de ces parties n'aient pas tous la même forme et des positions semblables, les quantités P, Q, &c., auront des valeurs différentes pour ces différens élémens. Au contraire, les quantités α, β, γ, seront à très-peu près constantes dans toute l'étendue de chaque partie de A, puisque leurs valeurs doivent satisfaire aux équations (7), dont les deux premiers termes ne varieront pas sensiblement pour tous les points compris dans cette petite étendue. Les quantités α, β, γ, ne varieront donc, dans cette même étendue, qu'à raison des quantités P, Q, &c. : mais les valeurs de ces trois fonctions, dont on doit faire usage dans le calcul des forces X, Y, Z, sont les moyennes de leurs valeurs relatives à un très-grand nombre d'élémens voisins (n.° 5); ce sont donc aussi les moyennes des valeurs de P, Q, &c., dans chaque petite partie de A, qu'il faudra employer dans les équations précédentes. Ces moyennes dépendront de la matière du corps A : s'il est homogène, elles seront les mêmes dans toute son étendue ; s'il est hétérogène, elles varieront d'un point à un autre, suivant des lois résultant de la constitution de ce corps : elles ne dépendront ni de sa forme, ni des forces auxquelles il est soumis; mais elles pourront dépendre, en général, de sa position par rapport aux plans fixes des x, y, z, et changer pour cette raison, lorsqu'on fera tourner A sur lui-même, quand bien même ce corps serait une sphère homogène.

Or, si nous voulons que l'action magnétique d'une sphère A ne change pas par l'effet de sa rotation, il sera nécessaire que les valeurs des fonctions α, β, γ, qu'on emploiera dans le calcul des forces X, Y, Z, soient indépendantes de ce

mouvement; cela étant, il en sera de même à l'égard des quantités $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$, qui doivent satisfaire aux équations (7); donc aussi les coefficiens P, Q, &c., compris dans les équations (8), ne devront pas varier par l'effet de la rotation de A. C'est cette condition qu'il s'agit maintenant de remplir.

(12) Pour cela, observons que $\alpha_{,}, \beta_{,}, \gamma_{,}$, étant les trois composantes parallèles aux axes des x, y, z, d'une certaine force, c'est-à-dire, de l'action d'un élément magnétique sur un point de son intérieur, les trois composantes de la même force suivant trois autres axes fixes dans cet élément, par exemple, suivant ses trois axes principaux de rotation, seront exprimées par

$$\begin{array}{l} \alpha_{,} \cos l + \beta_{,} \cos m + \gamma_{,} \cos n, \\ \alpha_{,} \cos l' + \beta_{,} \cos m' + \gamma_{,} \cos n', \\ \alpha_{,} \cos l'' = \beta_{,} \cos m'' + \gamma_{,} \cos n''; \end{array}$$

en désignant par l, m, &c., les neuf angles compris entre les nouveaux axes et les anciens, dont les cosinus seront liés entre eux par ces équations connues :

$$\left.\begin{array}{l} \cos^2 l + \cos^2 l' + \cos^2 l'' = 1, \\ \cos^2 m + \cos^2 m' + \cos^2 m'' = 1, \\ \cos^2 n + \cos^2 n' + \cos^2 n'' = 1, \\ \cos l \cos m + \cos l' \cos m' + \cos l'' \cos m'' = 0, \\ \cos l \cos n + \cos l' \cos n' + \cos l'' \cos n'' = 0, \\ \cos m \cos n + \cos m' \cos n' + \cos m'' \cos n'' = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Par la nature des quantités α, β, γ, leurs valeurs se composent aussi comme des forces, en passant d'un système d'axes rectangulaires à un autre (n.° 4); leurs valeurs relatives aux trois axes principaux seront par conséquent :

$\alpha_{,}\cos l + \beta_{,}\cos m + \gamma_{,}\cos n$, $\alpha_{,}\cos l' + \beta_{,}\cos m' + \gamma_{,}\cos n'$, $\alpha_{,}\cos l'' + \beta_{,}\cos m'' + \gamma_{,}\cos n''$; α, β, γ, se rapportant toujours aux axes quelconques des x, y, z.

Cela posé, concevons qu'en formant les équations (6) on ait décomposé l'action de l'élément magnétique suivant ses trois axes principaux, et remplaçons en conséquence, dans leurs premiers membres, les forces $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, par les expressions des composantes relatives à ces axes; la valeur de l'épaisseur e, que l'on déterminera ensuite d'après ces équations, sera de la forme :

$$
\begin{aligned}
e = {} & P_{,}(\alpha_{,}\cos l + \beta_{,}\cos m + \gamma_{,}\cos n) \\
& + Q_{,}(\alpha_{,}\cos l' + \beta_{,}\cos m' + \gamma_{,}\cos n') \\
& + R_{,}(\alpha_{,}\cos l'' + \beta_{,}\cos m'' + \gamma_{,}\cos n'');
\end{aligned}
$$

les coefficiens $P_{,}$, $Q_{,}$, $R_{,}$, ne dépendant plus que de la forme de l'élément, et nullement de sa position, ou des angles l, m, &c. L'épaisseur de la couche de fluide libre à la surface d'un élément magnétique étant ainsi exprimée, on pourra former les expressions correspondantes des intégrales que α, β, γ, représentent; et en rapportant aussi ces quantités aux trois axes principaux, c'est-à-dire, en les remplaçant par les trois trinomes qui précèdent la valeur de e, nous aurons,

$$
\begin{aligned}
\alpha\cos l + \beta\cos m + \gamma\cos n = {} & p\,(\alpha_{,}\cos l + \beta_{,}\cos m + \gamma_{,}\cos n) \\
& + q\,(\alpha_{,}\cos l' + \beta_{,}\cos m' + \gamma_{,}\cos n') \\
& + r\,(\alpha_{,}\cos l'' + \beta_{,}\cos m'' + \gamma_{,}\cos n''), \\
\alpha\cos l' + \beta'\cos m' + \gamma\cos n' = {} & p'(\alpha_{,}\cos l + \beta_{,}\cos m + \gamma_{,}\cos n) \\
& + q'(\alpha_{,}\cos l' + \beta_{,}\cos m' + \gamma_{,}\cos n') \\
& + r'(\alpha_{,}\cos l'' + \beta_{,}\cos m'' + \gamma_{,}\cos n''), \\
\alpha\cos l'' + \beta'\cos m'' + \gamma\cos n'' = {} & p''(\alpha_{,}\cos l + \beta_{,}\cos m + \gamma_{,}\cos n) \\
& + q''(\alpha_{,}\cos l' + \beta_{,}\cos m' + \gamma_{,}\cos n') \\
& + r''(\alpha_{,}\cos l'' + \beta_{,}\cos m'' + \gamma_{,}\cos n'');
\end{aligned}
$$

les neuf coefficiens p, q, &c., étant encore des quantités indépendantes des angles l, m, &c. En vertu des six équations (9), qui existent entre leurs cosinus, on tirera immédiatement de ces trois dernières équations les valeurs de α, β, γ, et les comparant aux seconds membres des équations (8), on en conclura celles des coefficiens P, Q, &c., dont il nous suffira d'écrire les deux premières, savoir:

$$P = p\cos^2 l + q'\cos^2 l' + r''\cos^2 l'' + (p'+q)\cos l\cos l' + (p''+r)\cos l\cos l'' + (q''+r')\cos l'\cos l'',$$

$$Q = p\cos l\cos m + q'\cos l'\cos m' + r''\cos l''\cos m'' + p'\cos l\cos m' + q\cos l'\cos m + p''\cos l\cos m'' + r\cos l''\cos m + q''\cos l'\cos m'' + r'\cos l''\cos m'.$$

Lorsque la sphère A tournera sur elle-même, les angles l, m, &c., varieront, et l'on pourra leur attribuer toutes les valeurs possibles qui satisferont aux équations (9). Or, d'après le numéro précédent, les coefficiens P, Q, &c., devront tous rester les mêmes pendant la rotation de A; il faudra donc que les angles l, m, &c., disparaissent de leurs valeurs, en ayant toutefois égard aux équations (9) qui les lient entre eux. Cette condition sera remplie, si l'on a $p = q' = r''$, et si les six autres quantités p', p'', q, &c., sont nulles: on aura alors $P = Q' = R'' = p$, les six autres coefficiens P', P'', Q, &c., seront égaux à zéro, et les valeurs de α, ζ, γ, se réduiront à

$$\alpha = p\,\alpha_1, \quad \zeta = p\,\zeta_1, \quad \gamma = p\,\gamma_1. \qquad (10)$$

Je dis de plus que la condition donnée ne peut être remplie que de cette seule manière.

En effet, deux des trois angles l, l', l'', sont arbitraires; et pour qu'ils disparaissent de la valeur de P, il est nécessaire, et il suffit, d'après la première équation (9), qu'on ait

$p = q'' = r'$, $p' + q = 0$, $p'' + r = 0$, $q'' + r' = 0$.

Ces conditions, jointes à la quatrième équation (9), réduisent la valeur de Q à

$$p'(\cos l \cos m' - \cos l' \cos m) + r(\cos l'' \cos m - \cos l \cos m'')$$
$$+ q''(\cos l' \cos m'' - \cos l'' \cos m');$$

et pour qu'elle soit indépendante des angles l, m, &c., il faudra qu'on ait $p' = 0$, $r = 0$, $q'' = 0$: cela, joint aux premières conditions, donnera $q = 0$, $p'' = 0$, $r' = 0$; ce qu'il fallait démontrer.

La valeur de p restera inconnue, et ne peut être déterminée par ces considérations. Quand on substituera, dans les expressions des forces X, Y, Z, du n.° 6, les valeurs des fonctions α, β, γ, données par les équations (10), cette quantité p se confondra avec le rapport k' de la somme des élémens magnétiques au volume dans lequel ils sont contenus, de manière que ces expressions ne seront fonctions que du produit $k'p$. Mais, comme ce rapport n'est pas connu *à priori*, et qu'il doit être déterminé par l'expérience, en comparant entre elles les actions magnétiques de A, calculées et observées, on conçoit que la connaissance de la valeur de p n'est pas indispensable : il arrivera seulement que la valeur qui sera donnée par l'expérience, sera celle du produit $k'p$, qui pourra surpasser l'unité au lieu d'être celle de k', qui était nécessairement moindre que un.

Pour confirmer, par un exemple, la forme des équations (10), nous allons examiner un cas très-étendu, dans lequel on pourra déterminer effectivement l'épaisseur variable de la couche de fluide libre à la surface de l'élément magnétique, et les valeurs des intégrales représentées par α, β, γ.

(13) Les valeurs des quantités $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, qui satisfont aux équations (7), étant sensiblement constantes pour tous

les points d'un même élément, il résulte des équations (6) que l'action de cet élément sur un point quelconque M compris dans son intérieur, sans faire partie de la couche de fluide libre située à sa surface, sera égale à une force constante en grandeur et en direction. Lorsque ces valeurs seront connues pour un élément déterminé, dont la forme sera donnée, la loi des épaisseurs de la couche de fluide libre sera aussi déterminée; le problème qu'on aura à résoudre pour la conclure de ces données, sera le même que pour déterminer la loi des épaisseurs de la couche électrique à la surface d'un corps conducteur, soumis à l'action d'une force constante pour tous ses points, en grandeur et en direction. Sa solution, telle qu'elle résulte de mon premier Mémoire sur cette matière (*), sera comprise dans la formule suivante.

Prenons arbitrairement un point fixe C dans l'intérieur de l'élément auquel le point M appartient; par ce point C menons trois axes parallèles à ceux des x, y, z; soient r le rayon vecteur du point M, ou sa distance au point C, u l'angle compris entre ce rayon et l'axe des x, et v l'angle compris entre le plan de ces deux droites et le plan des x, z; les trois variables r, u et v seront les coordonnées polaires du point M, rapportées au point C comme origine; ses trois coordonnées rectangulaires, rapportées à cette même origine, seraient $r \cos u$, $r \sin u \sin v$, $r \sin u \cos v$. Désignons par a le rayon d'une sphère équivalente en volume à l'élément que nous considérons; par u' et v' ce que deviennent les angles u et v, relativement à un point quelconque M' de la surface de cet élément; par $a(1+t)$ le rayon vecteur de M', en sorte que t soit une fonction donnée de u' et v'; et enfin par μ et e la mesure du fluide libre, et son épaisseur au point M', évaluée dans le sens du rayon CM'. L'équation qui servira à déterminer μ e

(*) *Mémoires de la première classe de l'Institut*, année 1811, I.re partie.

en fonctions de u' et v', sera celle-ci :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\iint\frac{\mu e a^2(1+t)^2 \sin u'\, du'\, dv'}{[a^2(1+t)^2-2ra(1+t)(\cos u\cos u'+\sin u\sin u'\cos(v-v'))+r^2]^{\frac{1}{2}}}\\ = c+\alpha_{,} r\cos u+\beta_{,} r\sin u\sin v+\gamma_{,} r\sin u\cos v,\end{array}\right\} \quad (11)$$

qui devra subsister pour toutes les valeurs des trois variables r, u et v : la double intégrale est prise depuis $u'=0$ et $v'=0$, jusqu'à $u'=\pi$ et $v'=2\pi$; et la quantité c est une constante qu'on déterminera d'après la condition que la totalité du fluide libre soit nulle, ou qu'on ait

$$\iint \mu e(1+t)^2 \sin u'\, du'\, dv' = 0.$$

En général, cette équation se résoudra par la méthode des séries. La valeur de μe s'exprimera par une série d'autant plus convergente que la quantité t sera plus petite : afin de ne pas nous jeter dans des calculs trop compliqués, nous supposerons que cette variable t soit constamment assez petite pour qu'on en puisse négliger les puissances supérieures à la première ; ce qui comprendra toutes les formes d'élémens qui ne différeront pas beaucoup de la sphère, et suffira à la vérification des équations (10) que nous nous sommes proposée.

(14) Faisons d'abord tout-à-fait abstraction de t, et développons, suivant les puissances de r, la quantité irrationnelle comprise sous le double signe d'intégration ; nous aurons, en série convergente,

$$[a^2-2ar(\cos u\cos u'+\sin u\sin u'\cos(v-v'))+r^2]^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a}Y_0$$
$$+\frac{r}{a^2}Y_1+\frac{r^2}{a^3}Y_2+\frac{r^3}{a^4}Y_3+\&c.;$$

les coefficiens Y_0, Y_1, Y_2, &c., étant des fonctions de sinus et de cosinus des angles u, v, u', v', qui jouissent de propriétés connues. En vertu de ces propriétés, on conclura immédia-

tement pour la première valeur approchée de μe, qui satisfait à l'équation (11),

$$e = \mu \frac{C}{4\pi a} + \frac{3}{4\pi}(\alpha_{,} \cos u' + \beta_{,} \sin u' \sin v' + \gamma_{,} \sin u' \cos v').$$

Pour en obtenir une seconde, nous ajouterons un terme s à cette première valeur; en retenant ensuite dans l'équation (11) les termes de première dimension par rapport à s et à t, et réduisant, on aura

$$\int\!\!\int \left(Y_0 + \frac{r}{a} Y_1 + \frac{r^2}{a^2} Y_2 + \frac{r^3}{a^3} Y_3 + \&c.\right) s \sin u'\, du'\, dv'$$

$$= \int\!\!\int \left(-Y_0 + \frac{r^2}{a^2} Y_2 + \frac{2r^3}{a^3} Y_3 + \frac{3r^4}{a^4} Y_4 + \&c.\right) \mu e t \sin u'\, du'\, dv',$$

où l'on a conservé, pour abréger, μe à la place de sa valeur précédente. Quelle que soit la valeur de $\mu e t$ en fonction de u' et v', on peut l'exprimer par une série de cette forme (*):

$$\mu e t = Z'_0 + Z'_1 + Z'_2 + Z'_3 + \&c., \qquad (12)$$

dont les termes sont de certaines fonctions des sinus et cosinus de ces deux angles, qui sont telles, que l'on a

$$\int\!\!\int Z'_i Y_{i'} \sin u'\, du'\, dv' = 0,$$

quand les indices i' et i sont différens; et

$$\int\!\!\int Z'_i Y_i \sin u'\, du'\, dv' = \frac{4\pi Z_i}{2i+1},$$

quand ils sont égaux : Z_i représentant ce que devient Z'_i lorsqu'on y remplace u' et v' par u et v, et les intégrales étant prises depuis $u' = 0$ et $v' = 0$, jusqu'à $u' = \pi$ et $v' = 2\pi$. De cette manière, le second membre de l'équation précédente deviendra

$$4\pi\left(-Z_0 + \frac{r^2}{5a^2} Z_2 + \frac{r^3}{7a^3} Z_3 + \ldots \frac{(i-1)r^i}{(2i+1)a^i} Z_i + \&c.\right);$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 19.e cahier, page 145.

et pour que le premier lui soit identique, il faudra qu'on ait

$$s = -Z'_0 + Z'_2 + 2Z'_3 + \ldots + (i-1)Z'_i + \&c.$$

C'est à cette seconde approximation que nous nous arrêterons. Si l'élément magnétique que nous considérons, était un ellipsoïde, et que l'on plaçât l'origine des coordonnées polaires à son centre, t serait une fonction de u' et v', de la même nature que Z'_2; le développement de μet ne contiendrait que les trois termes Z'_0, Z'_1 et Z'_3; tous les autres seraient nuls, et même Z'_0 serait aussi nul, d'après la condition que la totalité du fluide libre à la surface de l'élément fût égale à zéro. Ainsi, dans ce cas particulier, la valeur précédente de s se réduira au seul terme $2Z'_3$. Dans tous les cas, on pourra ramener cette série à la forme finie, au moyen d'une intégrale définie; mais cette transformation ne serait point utile à l'objet que nous avons en vue.

(15) Maintenant, la distribution du fluide libre à la surface de l'élément magnétique étant déterminée, il sera facile d'en conclure les valeurs correspondantes des intégrales α', β', γ', du n.° 3; ce qui fera connaître les relations existantes pour un même élément, entre ces intégrales et les quantités $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$. Nous continuerons de désigner par α, β, γ, ce que deviennent α', β', γ', quand les coordonnées d'un point C, pris dans l'intérieur de l'élément auquel elles répondent, sont x, y, z. D'après les notations précédentes et celles du numéro cité, nous aurons

$$h\chi = a(1+t)\cos u',$$
$$h\xi = a(1+t)\sin u'\sin v',$$
$$h\zeta = a(1+t)\sin u'\cos v'.$$

L'élément de volume de la couche de fluide libre pourra s'exprimer au moyen de l'épaisseur ε normale à sa surface, ou

bien au moyen de l'épaisseur inclinée e, et, ces deux expressions devant être égales entre elles, on en conclura

$$\varepsilon h^2 ds = e a^2 (1+t)^2 \sin u' du' dv';$$

observant de plus qu'on doit avoir $h^3 = \frac{4\pi a^3}{3}$, les intégrales α, β, γ, prendront la forme

$$\alpha = \frac{3}{4\pi} \int\int (1+t)^3 \mu e \cos u' \sin u' du' dv',$$

$$\beta = \frac{3}{4\pi} \int\int (1+t)^3 \mu e \sin^2 u' \sin v' du' dv',$$

$$\gamma = \frac{3}{4\pi} \int\int (1+t)^3 \mu e \sin^2 u' \cos v' du' dv'.$$

Si l'on néglige t et le terme s de la valeur de μe, les intégrations s'effectueront immédiatement, et l'on trouvera

$$\alpha = \frac{3\alpha_{,}}{4\pi}, \quad \beta = \frac{3\beta_{,}}{4\pi}, \quad \gamma = \frac{3\gamma_{,}}{4\pi}; \qquad (13)$$

ce qui serait les valeurs exactes de α, β, γ, si l'élément magnétique était une sphère. En conservant les termes d'une seule dimension, par rapport à t et s, on aura, par exemple,

$$\left.\begin{aligned}\alpha = \frac{3\alpha_{,}}{4\pi} &+ \frac{9}{4\pi}\int\int \mu e t \cos u' \sin u' du' dv' \\ &+ \frac{3}{4\pi}\int\int s \cos u' \sin u' du' dv'.\end{aligned}\right\} (14)$$

Or, d'après les propriétés des termes de la série (12), dans laquelle on a développé $\mu e t$, on a

$$\int\int Z'_i \cos u' \sin u' du' dv' = 0,$$

excepté dans le cas de $i = 1$; d'où il résulte que la seconde intégrale double, qui entre dans cette valeur de α, se réduira à zéro, et la première à un seul terme, quelle que soit la forme de l'élément magnétique. Il en sera de même à l'égard des valeurs de β et γ, qui s'exprimeront aussi sous forme finie.

Pour former de la manière la plus simple la valeur de la première intégrale double, contenue dans l'équation (14), supposons que le point C, origine des coordonnées polaires, soit le centre de gravité de l'élément magnétique; faisons d'abord coïncider les axes auxquels ces coordonnées se rapportent, avec les trois axes principaux de rotation menés par ce centre, et désignons dans ce cas par $u_{,}$ et $v_{,}$ ce que deviennent les angles u' et v'; observons de plus que a est le rayon de la sphère équivalente au volume de cet élément : il en résultera que si l'on développe t en série de la même nature que la série (12), les deux premiers termes manqueront dans ce développement, et le troisième terme sera de la forme (*):

$$g\left(\frac{1}{3} - \cos^2 u_{,}\right) + g'\left(\sin^2 u_{,} \cos^2 v_{,} - \sin^2 u_{,} \sin^2 v_{,}\right);$$

g et g' étant des coefficiens constans qui dépendront uniquement de la forme de l'élément magnétique. Si l'on veut ensuite transformer les angles $u_{,}$ et $v_{,}$, relatifs à ces axes principaux, dans les angles u' et v' qui se rapportent à des axes quelconques, on observera que $\cos u_{,}$, $\sin u_{,} \sin v_{,}$, $\sin u_{,} \cos v_{,}$, sont les cosinus des angles que fait le rayon vecteur $a(1+t)$ avec les premiers axes, et que leurs valeurs, en fonctions de u' et v', sont

$$\cos u_{,} = \cos u' \cos l + \sin u' \sin v' \cos m + \sin u' \cos v' \cos n,$$
$$\sin u_{,} \sin v_{,} = \cos u' \cos l' + \sin u' \sin v' \cos m' + \sin u' \cos v' \cos n',$$
$$\sin u_{,} \cos v_{,} = \cos u' \cos l'' + \sin u' \sin v' \cos m'' + \sin u' \cos v' \cos n'';$$

l, m, &c. étant, comme dans le n.° 12, les neuf angles que font les axes principaux avec les autres axes. Substituant donc ces valeurs dans la formule précédente, elle se trouvera exprimée en fonction de u' et v', ou rapportée à des axes fixes quelconques. Ce second terme du développement de t sera le

(*) *Mécanique céleste*, tome II, pages 33 et 93.

seul qui subsistera dans la valeur de l'intégrale double

$$\int\int \mu e t \cos u' \sin u' \, du' \, dv';$$

en le combinant avec la première valeur approchée de μe, et effectuant les intégrations pour les limites données, on obtiendra, sans difficulté, la valeur de cette intégrale. Si l'on met ensuite cette valeur dans l'équation (14), et que l'on ait égard aux équations (9) qui lient les angles l, m, &c. entre eux, on aura, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{3\alpha_{,}}{4\pi} - \frac{4g\alpha_{,}}{3} &+ \tfrac{6}{5}(g-g')\alpha_{,}\cos^2 l' + \tfrac{6}{5}(g+g')\alpha_{,}\cos^2 l'' \\ &+ \tfrac{6}{5}(g-g')\beta_{,}\cos m'\cos l' + \tfrac{6}{5}(g+g')\beta_{,}\cos m''\cos l'' \\ &+ \tfrac{6}{5}(g-g')\gamma_{,}\cos m'\cos l' + \tfrac{6}{5}(g+g')\gamma_{,}\cos n''\cos l'';\end{aligned}$$

et l'on formera de même les valeurs de β et γ.

Il est évident que les coefficiens de $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, dans cette dernière formule, ne peuvent être indépendans des angles l, m, &c., à moins qu'on n'ait $g = 0$, $g' = 0$. Les valeurs de α, β, γ, seront alors les mêmes que si l'élément magnétique auquel elles se rapportent, était une sphère, et elles seront données par les équations (13), dont la forme est la même que celle des équations (10), ce qu'il s'agissait de vérifier. Pour que ces deux systèmes d'équations coïncident, il faudra qu'on ait $p = \frac{3}{4\pi}$; telle sera donc la valeur de p dans le cas que nous venons de considérer. Si les élémens magnétiques s'écartaient beaucoup de la forme sphérique, la valeur de cette quantité serait très-difficile à déterminer; mais heureusement, d'après la remarque qui termine le n.° 12, nous pouvons nous passer de la connaître : pour fixer les idées, nous attribuerons à cette quantité p la valeur $\frac{3}{4\pi}$ qui aurait lieu dans le cas des élémens sphériques, ou peu différens de cette forme.

(16) Nous conserverons les quantités α, β, γ, dans les équations (7), et nous en éliminerons $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, au moyen des équations (13). Nous aurons alors

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx} + X + \frac{4\pi}{3}\alpha = 0, \\ \frac{dV}{dy} + Y + \frac{4\pi}{3}\beta = 0, \\ \frac{dV}{dz} + Z + \frac{4\pi}{3}\gamma = 0, \end{aligned}\right\} (15)$$

pour les trois équations de l'équilibre magnétique.

Elles auront lieu pour tous les points du fluide neutre contenus dans chaque élément magnétique, en excluant toujours les élémens situés à la surface de A, ou qui n'en sont qu'à une distance insensible (n.° 8). Elles subsisteront encore à la surface intérieure de la couche de fluide libre qui termine cet élément; mais elles n'auront plus lieu dans l'épaisseur de cette couche, ni à sa surface extérieure. Les particules de fluide libre situées à la première surface ne sont donc retenues par aucune force; et c'est pour cette raison que nous avons dit, dans le préambule de ce Mémoire, que le fluide magnétique devait être dépourvu d'élasticité : car, sans cela, rien n'empêcherait la couche de fluide libre de se dilater et de remplir l'intérieur de l'élément. Dans l'épaisseur de cette couche, et à sa surface extérieure, où les forces qui agissent sur les particules fluides ne sont pas nulles, il se produit une pression qui doit être détruite, comme nous l'avons déjà dit, par l'obstacle quelconque qui empêche le fluide magnétique de sortir de l'élément auquel il appartient; mais il y a, à cet égard, une observation à faire.

A la fin du n.° 9, nous avons remarqué que l'action du corps A sur une particule de fluide libre située à la surface extérieure de la couche qui termine un de ses élémens, a pour composantes X, Y, Z; en y joignant donc celles des forces

extérieures qui sont exprimées par les différences partielles de V, les composantes suivant les axes des x, y, z, de la force totale qui sollicite cette particule, seront

$$\frac{dV}{dx} + X, \quad \frac{dV}{dy} + Y, \quad \frac{dV}{dz} + Z.$$

Ces quantités ne changeront pas sensiblement dans l'étendue d'un même élément, et, en vertu des équations précédentes, elles seront respectivement égales à

$$-\frac{4\pi\alpha}{3}, \quad -\frac{4\pi\beta}{3}, \quad -\frac{4\pi\gamma}{3}.$$

Si donc on désigne par n, n', n'', les trois angles compris entre les directions de ces forces et la partie extérieure de la normale à la surface de l'élément magnétique, au point où est située la particule que l'on considère, et si l'on appelle N la composante dirigée suivant cette droite, on aura

$$N = -\frac{4\pi}{3}(\alpha \cos n + \beta \cos n' + \gamma \cos n'').$$

Or, pour que cette force puisse être détruite par la résistance qui s'oppose à ce que le fluide libre sorte de l'élément, il sera nécessaire qu'elle agisse de dedans en dehors en tous les points de sa surface ; et, pour cela, il faudra qu'elle soit positive ou négative, selon que la particule sur laquelle elle agit, sera australe ou boréale. Réciproquement, on pourra donc assurer que le fluide libre sera austral ou boréal, en un point donné sur la surface d'un élément, selon que la valeur de N, relative à ce point, sera positive ou négative. C'est ce que nous pouvons vérifier dans le cas où l'élément magnétique est une sphère.

En effet, dans ce cas, la première valeur de μe trouvée dans le n.° 14 sera complète ; la constante c qu'elle contient sera nulle, d'après la condition de l'égalité des deux fluides boréal et austral, à la surface de l'élément ; et si l'on suppose

que son centre soit l'origine des angles u' et v', on aura

$\cos n = \cos u'$; $\cos n' = \sin u' \sin v'$, $\cos n'' = \sin u' \cos v'$;

mettant de plus à la place de $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, leurs valeurs données par les équations (13), on aura

$$\mu e = \alpha \cos n + \beta \cos n' + \gamma \cos n'',$$

et par conséquent,

$$N = -\frac{4\pi}{3} \mu e;$$

où l'on voit que les quantités N et μe seront de signes contraires, ce qui équivaut à la proposition qu'il fallait vérifier.

Toute la théorie du magnétisme, relativement aux corps aimantés par influence, dépend maintenant de la résolution des trois équations (15). Dans chaque cas particulier, le problème consistera à en déduire les valeurs des trois quantités α, β, γ, en fonctions des coordonnées du point auquel elles se rapportent; mais, avant de chercher à les résoudre, il est nécessaire de les ramener à des formes plus simples, en réduisant, s'il est possible, à des intégrales doubles, les intégrales triples que X, Y, Z, représentent, et qui sont contenues dans ces équations. C'est ce qui va nous occuper dans le paragraphe suivant.

§. II.

Simplification des Formules précédentes.

(17) Nous considérerons d'abord les seconds membres des équations (5) (n.° 6), dans le cas où les coordonnées x, y, z, appartiennent à un point M situé en dehors de A. Les limites de ces intégrales triples seront alors indépendantes de x, y, z, en sorte qu'on pourra transporter en avant des signes $\int$ les

signes de différenciations relatives à ces variables ; ce qui changera les équations (5) en celles-ci :

$$X = \frac{dQ}{dx}, \quad Y = \frac{dQ}{dy}, \quad Z = \frac{dQ}{dz}, \qquad (a)$$

en faisant, pour abréger,

$$Q = \int\int\int \left(\frac{d\frac{1}{\rho}}{dx'}\alpha' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dy'}\beta' + \frac{d\frac{1}{\rho}}{dz'}\gamma' \right) k' dx' dy' dz'.$$

Soit aussi

$$\frac{d.\alpha' k'}{dx'} + \frac{d.\beta' k'}{dy'} + \frac{d.\gamma' k'}{dz'} = p',$$

$$\int\int\int \frac{1}{\rho} p' \, dx' \, dy' \, dz' = P;$$

la valeur de Q deviendra

$$Q = \int\int\int \left(\frac{d.\frac{\alpha' k'}{\rho}}{dx'} + \frac{d.\frac{\beta' k'}{\rho}}{dy'} + \frac{d.\frac{\gamma' k'}{\rho}}{dz'} \right) dx' dy' dz' - P.$$

Pour fixer les idées, supposons que l'axe des z' soit vertical et dirigé de bas en haut, que le corps A soit tout entier au-dessus du plan des x', y', et qu'il y ait seulement deux points de la surface de ce corps qui répondent à chaque couple de valeurs de x', y' : ces points pourraient être au nombre de quatre, six, &c., selon la forme du corps ; mais on ramenera toujours ces autres cas à celui que nous supposons, en considérant ces points deux à deux consécutivement. Ce sera entre les ordonnées verticales des deux points de la surface qui répondent aux mêmes valeurs de x', y', que l'on devra prendre les intégrales relatives à z' : ainsi l'on aura

$$\int\int\int \frac{d.\frac{\gamma' k'}{\rho}}{dz'} dx' \, dy' \, dz' = \int\int \left[\frac{\gamma' k'}{\rho} \right] dx' . dy'$$
$$- \int\int \left(\frac{\gamma' k'}{\rho} \right) dx' . dy' ;$$

les quantités $\left[\frac{\gamma' k'}{\rho}\right]$ et $\left(\frac{\gamma' k'}{\rho}\right)$ se rapportant, la première au point supérieur, et la seconde au point inférieur. Si donc on conçoit un cylindre vertical tangent à la surface de A, qui la divise en deux parties, il faudra étendre la première des deux intégrales doubles à la partie supérieure, et la seconde à la partie inférieure. Or, en appelant n' l'angle compris entre la verticale tirée de bas en haut, par le point de la surface de A, dont les coordonnées sont x', y', z', et la partie extérieure de la normale à cette surface au même point, cet angle sera aigu dans toute la première partie de la surface, et obtus dans toute la seconde partie; désignant de plus par $d\omega'$ l'élément différentiel de la surface à ce même point, sa projection sur le plan des x', y', sera $dx'\,dy'$, et l'on aura

$$dx'\,dy' = \pm \cos n'\,d\omega',$$

en prenant le signe + quand n' sera aigu, et le signe — quand cet angle sera obtus. D'après cela, nous pourrons réduire la différence de nos deux intégrales doubles à une seule intégrale étendue à la surface entière de A, savoir:

$$\int\int\left[\frac{\gamma' k'}{\rho}\right]dx'\,dy' - \int\int\left(\frac{\gamma' k'}{\rho}\right)dx'\,dy'$$
$$= \int\int\frac{\gamma' k' \cos n'}{\rho}\,d\omega'.$$

Nous aurons donc

$$\int\int\int\frac{d.\frac{\gamma' k'}{\rho}}{dz'}\,dx'\,dy'\,dz' = \int\frac{\gamma' k' \cos n'}{\rho}\,d\omega';$$

et, par des raisonnemens semblables, on trouvera

$$\int\int\int\frac{d.\frac{\beta' k'}{\rho}}{dy'}\,dx'\,dy'\,dz' = \int\frac{\beta' k' \cos m'}{\rho}\,d\omega',$$

$$\int\int\int \frac{d.\frac{\alpha' k'}{\rho}}{dx'}\, dx'\, dy'\, dz' = \int \frac{\alpha' k' \cos l'}{\rho}\, d\omega';$$

en désignant par m' et l' les angles que la partie extérieure de la normale à la surface de A au point dont les coordonnées sont x', y', z', fait avec des droites menées par ce point, dans les directions des y' et x' positives. Par conséquent, la valeur précédente de Q se changera en celle-ci :

$$Q = \int (\alpha' \cos l' + \beta' \cos m' + \gamma' \cos n') \frac{k'}{\rho} d\omega' - P, \quad (b)$$

dans laquelle la première intégrale s'étend à la surface entière de A, et l'intégrale que P représente, à son volume entier.

(18) Lorsque le point M, dont les coordonnées sont x, y, z, sera situé dans l'intérieur de A, les expressions des quantités X, Y, Z, seront différentes : les intégrales triples qu'elles représentent, ne devant pas comprendre les points de A qui sont contenus dans une très-petite étendue autour de M (n.° 7), si l'on appelle B cette petite portion de A, il faudra d'abord calculer les valeurs de X, Y, Z, comme dans le numéro précédent, en étendant ces intégrales à A tout entier, puis en retrancher les valeurs de ces mêmes intégrales, relatives à B : ainsi, en désignant ces dernières valeurs par $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$, nous aurons, dans le cas d'un point intérieur,

$$X = \frac{dQ}{dx} - X_{,}, \quad Y = \frac{dQ}{dy} - Y_{,}, \quad Z = \frac{dQ}{dz} - Z_{,};$$

la valeur de Q étant donnée par l'équation (b), comme dans le cas d'un point extérieur. Il ne s'agira donc plus que de trouver les valeurs de $X_{,}$, $Y_{,}$, $Z_{,}$.

Or nous avons, par exemple (n.° 6),

$$Z_{,} = \int\int\int \frac{dq}{dz} k'\, dx'\, dy'\, dz';$$

remettant pour q sa valeur (n.° 3), et effectuant la différen-

ciation relative à z, il vient

$$Z_{,} = \int\int\int \left[\frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dx'} \alpha' k' + \frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dy'} \beta' k' + \frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dz'} \gamma' k' \right] dx'\,dy'\,dz'.$$

Dans l'étendue de B, les quantités α', β', γ' et k' ne varient pas sensiblement; on peut donc les regarder comme constantes dans cette intégration, et prendre pour leurs valeurs celles qui répondent au point M : ainsi, en désignant par α, β, γ et k, ce que deviennent ces quatre quantités, quand on y fait $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$, nous aurons

$$Z_{,} = \alpha\, k \int\int\int \frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dx'} dx'\,dy'\,dz' + \beta\, k \int\int\int \frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dy'} dx'\,dy'\,dz' + \gamma\, k \int\int\int \frac{d\,\frac{z'-z}{\rho^3}}{dz'} dx'\,dy'\,dz'.$$

Par un raisonnement semblable à celui du numéro précédent, on changera chacune de ces intégrales triples en une intégrale relative à la surface de B; et si l'on désigne par $d\omega''$ l'élément différentiel de cette surface, en un point quelconque M'', dont les coordonnées sont x', y', z', et par l'', m'', n'', les angles que la partie extérieure de la normale à cette surface, menée par le point M'', fait avec les axes des x', y', z', positives, on aura

$$Z_{,} = \alpha k \int \frac{(z'-z)\cos l''}{\rho^3} d\omega'' + \beta k \int \frac{(z'-z)\cos m''}{\rho^3} d\omega'' + \gamma k \int \frac{(z'-z)\cos n''}{\rho^3} d\omega''.$$

Représentons maintenant par u l'angle compris entre le rayon ρ mené du point M au point M'', et la droite menée par le point M dans le sens des z positives; désignons aussi par v l'angle que fait le plan de ces deux droites, avec un plan fixe passant par la seconde; en sorte que ρ, u et v, soient les trois coordonnées polaires du point M'', rapportées au point M comme origine, et qu'on ait

$$z'-z=\rho\cos u,\; y'-y=\rho\sin u\sin v,\; x'-x=\rho\sin u\cos v.$$

Comme la forme de B est arbitraire, nous supposerons que cette partie de A soit une sphère qui ait son centre au point M, afin de pouvoir effectuer immédiatement les intégrations relatives à sa surface. Nous aurons alors

$$d\omega''=\rho^2\sin u\,du\,dv,$$

$$\cos l''=\sin u\cos v,\ \cos m''=\sin u\sin v,\ \cos n''=\cos u;$$

les intégrales qui entrent dans la valeur de $Z_{,}$ devront être prises depuis $u=0$, $v=0$, jusqu'à $u=\pi$, $v=2\pi$; au moyen de quoi, cette valeur se réduira à

$$Z_{,}=\frac{4\pi k\gamma}{3}.$$

On trouvera de même

$$Y_{,}=\frac{4\pi k\beta}{3},\quad X_{,}=\frac{4\pi k\alpha}{3};$$

et les valeurs de X, Y, Z, relatives à un point intérieur, deviendront

$$X=\frac{dQ}{dx}-\frac{4\pi k\alpha}{3},$$

$$Y=\frac{dQ}{dy}-\frac{4\pi k\beta}{3},$$

$$X=\frac{dQ}{dz}-\frac{4\pi k\gamma}{3}.$$

(19) Ce sont ces valeurs qu'il faudra substituer dans les équations (15) de l'équilibre magnétique; ce qui les changera en celles-ci:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dx}+\frac{dQ}{dx}+\frac{4\pi\alpha(1-k)}{3}&=0,\\ \frac{dV}{dy}+\frac{dQ}{dy}+\frac{4\pi\beta(1-k)}{3}&=0,\\ \frac{dV}{dz}+\frac{dQ}{dz}+\frac{4\pi\gamma(1-k)}{3}&=0.\end{aligned}\right\}(c)$$

On sait que, par la nature de la fonction V, on a

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}=0. \qquad (d)$$

On a aussi identiquement

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dx^2}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dy^2}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{dz^2}=0;$$

et si l'on fait subir à cette quantité nulle, des intégrations relatives aux variables x', y', z', qui sont contenues dans ρ, les intégrales seront encore égales à zéro, pourvu qu'entre leurs limites, les variables x', y', z', ne passent pas par les valeurs particulières $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$: car j'ai déjà eu l'occasion de faire remarquer (*) que ces intégrales ne sont pas nulles, lorsque la quantité ρ devient infiniment petite entre les limites dans lesquelles on a intégré. Observons d'ailleurs que, les limites des deux intégrales que renferme le second membre de l'équation (b), étant indépendantes de la position du point M, si on les différencie par rapport aux coordonnées x, y, z, on pourra faire passer les signes de différenciations sous les signes $\int$; on aura donc

(*) *Bulletin de la Société philomathique*, décembre 1813.

$$\frac{d^2 Q}{d x^2} + \frac{d^2 Q}{d y^2} + \frac{d^2 Q}{d^2 z} = \int (\alpha' \cos l' + \beta' \cos m'$$

$$+ \gamma' \cos n') \left[\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d x^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d y^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d z^2} \right] k' \, d\omega'$$

$$- \int\int\int \left[\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d x^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d y^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d z^2} \right] p' \, d x' \, d y' \, d z'.$$

Or, le point M étant à une distance sensible de la surface de A (n.° 8), la quantité ρ ne deviendra pas nulle entre les limites de la première intégrale, qui se rapporte à cette surface; cette intégrale s'évanouira donc d'après ce qu'on vient de dire; mais, la seconde intégrale s'étendant au volume entier de A, dont le point M fait partie, elle ne se réduira pas à zéro.

Pour en avoir la valeur, il faudra distinguer dans A, autour du point M, une portion B que l'on fera aussi petite qu'on voudra, et partager cette intégrale en deux parties, l'une relative à B, et l'autre relative au reste de A. Cette seconde partie sera nulle, puisque la quantité ρ ne s'évanouira pas entre ses limites. Dans l'étendue de B, on pourra regarder comme constante la quantité p' qui entre sous les signes $\int$, et prendre pour sa valeur celle qui répond au point M, savoir:

$$\frac{d.k\alpha}{d x} + \frac{d.k\beta}{d y} + \frac{d.k\gamma}{d z}.$$

On a de plus

$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d x^2} = \frac{d \frac{x - x'}{\rho^3}}{d x'},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d y^2} = \frac{d \frac{y - y'}{\rho^3}}{d y'},$$

$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d z^2} = \frac{d \frac{z - z'}{\rho^3}}{d z'};$$

et d'après ces diverses considérations, l'équation précédente se réduira à

$$\frac{d^2 Q}{d x^2}+\frac{d^2 Q}{d y^2}+\frac{d^2 Q}{d z^2}=\left(\frac{d.k\alpha}{dx}\right.$$

$$\left.+\frac{d.k\beta}{dy}+\frac{d.k\gamma}{dz}\right)\left[\iiint\frac{d\frac{x'-x}{\rho^3}}{dx'}\,dx'\,dy'\,dz'\right.$$

$$\left.+\iiint\frac{d\frac{y'-y}{\rho^3}}{dy'}\,dx'\,dy'\,dz'+\iiint\frac{d\frac{z'-z}{\rho^3}}{dz'}\,dx'\,dy'\,dz'\right].$$

Si nous supposons présentement, ce qui est permis, que B soit une sphère, les intégrations indiquées dans cette équation s'effectueront comme dans le numéro précédent, et, quel que soit le rayon de B, chaque intégrale triple sera égale à $\frac{4\pi}{3}$: nous aurons donc enfin

$$\frac{d^2 Q}{d x^2}+\frac{d^2 Q}{d y^2}+\frac{d^2 Q}{d z^2}=4\pi\left(\frac{d.k\alpha}{dx}+\frac{d.k\beta}{dy}+\frac{d.k\gamma}{dz}\right).\ (e)$$

Cela posé, si nous faisons la somme des trois équations (c), après avoir différencié la première par rapport à x, la deuxième par rapport à y, et la troisième par rapport à z, nous aurons, en ayant égard aux équations (d) et (e), et réduisant,

$$2\left(\frac{d.k\alpha}{dx}+\frac{d.k\beta}{dy}+\frac{d.k\gamma}{dz}\right)+\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0.$$

Dans le cas le plus général, la quantité k varie d'un point à un autre de A; mais le plus communément ce corps sera homogène, il aura par-tout la même température, et k sera une quantité indépendante de x, y, z. C'est ce cas particulier que nous nous bornerons à considérer dans la suite de ce Mémoire. Si k était variable, la distribution du magnétisme dans l'intérieur de A, et les lois de son action extérieure, seraient très-différentes et plus difficiles à déterminer.

(20) La quantité k étant donc supposée constante, l'équation que nous venons de trouver, se réduira à

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}=0. \qquad (f)$$

De plus, par des différenciations relatives à x, y, z, on déduit des équations (c) celles-ci :

$$\frac{d\alpha}{dy}=\frac{d\beta}{dx},\ \frac{d\alpha}{dz}=\frac{d\gamma}{dx},\ \frac{d\beta}{dz}=\frac{d\gamma}{dy};$$

ce qui nous montre que α, β, γ, seront les trois différences partielles d'une même fonction de x, y, z; de sorte qu'en appelant φ cette fonction inconnue, on aura

$$\alpha=\frac{d\varphi}{dx},\ \beta=\frac{d\varphi}{dy},\ \gamma=\frac{d\varphi}{dz}; \qquad (g)$$

et l'équation (e) deviendra

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{ny^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=0. \qquad (h)$$

Ces dernières formules établiraient des rapports singuliers entre la distribution des deux fluides magnétiques dans un corps aimanté par influence, et le mouvement des fluides incompressibles; mais nous ne nous arrêterons point à développer cette analogie, qui ne serait d'aucune utilité pour la solution du problème dont nous nous occupons, et qui pourrait induire en erreur sur la nature du magnétisme.

Les trois équations (c) de l'équilibre magnétique se réduiront à cette seule équation :

$$V+Q+\frac{4\pi(1-k)}{3}\varphi=0, \qquad (i)$$

dont elles seront les différences partielles relatives à x, y, z: la constante arbitraire que cette équation devrait renfermer, sera comprise dans la valeur de l'inconnue φ.

La quantité P, contenue dans la valeur de Q, s'évanouira en vertu de l'équation (f), et cette valeur deviendra

$$Q = k\int\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{\rho},$$

en désignant par φ' ce que φ devient, quand on y met x', y', z', à la place de x, y, z. Lorsque le point M, dont ces dernières variables sont les coordonnées, sera situé hors de A, les équations (a) donneront les composantes de l'action de ce corps sur le point M, en y substituant cette valeur de Q; or on voit par la forme de cette quantité, que la résultante des forces X, Y, Z, sera équivalente, en grandeur et en direction, à l'action d'une couche de fluide libre qui recouvrirait la surface entière de A, et dont l'épaisseur normale serait exprimée par

$$k\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right),$$

au point quelconque qui répond aux coordonnées x', y', z'.

Comme les équations d'après lesquelles la valeur de Q s'est réduite à la précédente, n'ont pas lieu pour les élémens magnétiques qui répondent à la surface de A, ou qui n'en sont pas à une distance sensible, il en résulte que les valeurs de X, Y, Z, calculées au moyen de cette valeur, ne comprendront pas l'action de ces élémens; mais on peut, sans crainte d'erreur appréciable, négliger cette action, et la regarder comme insensible par rapport à celle de tous les élémens dont A est composé.

(21) Lorsque ce corps homogène, et dans lequel la température est par-tout la même, renfermera dans son intérieur un espace vide, il est évident que l'on calculera son action sur un point quelconque, extérieur ou intérieur, en considérant A comme la différence de deux corps de la même nature, dont l'un serait terminé par sa surface extérieure, et l'autre par sa surface intérieure; en sorte que l'on aura, dans ce cas, l'expression de chacune des composantes X, Y, Z, en formant ses valeurs relatives à ces deux corps, et retranchant la valeur qui

se rapporte au second, de celle qui se rapporte au premier. Supposons donc que la valeur précédente de Q soit relative à la surface extérieure de A; désignons ensuite par x'', y'', z'', les coordonnées d'un point quelconque M'' de sa surface intérieure; par φ'' ce que devient la fonction φ par rapport à ces variables; par l'', m'', n'', les angles que fait avec les axes des x'', y'', z'', positives, la portion de la normale à cette même surface au point M'', comprise dans la partie vide de A: angles supplémentaires de ceux qui seraient, par rapport à cette surface, analogues aux angles l', m', n', relatifs à la surface extérieure. Soit encore $d\omega''$, l'élément différentiel de la surface intérieure, qui répond au même point M''; représentons enfin par ρ' ce que devient la distance ρ, quand on y remplace x', y', z', par $x'', y''; z''$: la valeur complète de Q sera

$$Q = k\int\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right)\frac{d\omega'}{\rho}$$
$$+ k\int\left(\frac{d\varphi''}{dx''}\cos l'' + \frac{d\varphi''}{dy''}\cos m'' + \frac{d\varphi''}{dz''}\cos n''\right)\frac{d\omega''}{\rho'},$$

en étendant la première intégrale à toute la surface extérieure de A, et la seconde à toute sa surface intérieure. Il faudra donc substituer cette expression à la place de Q dans l'équation (i) de l'équilibre magnétique, qui devra servir à déterminer la fonction φ, et ensuite dans les équations (a), pour avoir les composantes de l'action de A sur un point M situé hors de la partie pleine de ce corps, et pouvant appartenir à l'espace vide qu'il renferme.

Si nous plaçons dans cet espace l'origine des coordonnées x, y, z, de ce point quelconque M; de plus, si nous désignons par r son rayon vecteur, par θ l'angle que fait ce rayon avec l'axe des z positives, et par ψ l'angle compris entre le plan de ces deux droites, et le plan des x, z, nous aurons

$$z = r\cos\theta,\; y = r\sin\theta\sin\psi,\; x = r\sin\theta\cos\psi.$$

Soient, en outre, r', θ', ψ', ce que deviennent les variables

r, θ, ψ, par rapport à un point M' de la surface extérieure de A, et r'', θ'', ψ'', ce qu'elles deviennent relativement à un point M'' de sa surface intérieure ; les carrés des distances ρ et ρ' de ces points au point M seront

$$\rho^2 = r^2 - 2rr'[\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi - \psi')] + r'^2,$$
$$\rho'^2 = r^2 - 2rr''[\cos\theta\cos\theta'' + \sin\theta\sin\theta''\cos(\psi - \psi'')] + r''^2.$$

Représentons aussi par ϖ' l'angle que la partie extérieure de la normale à la première surface, au point M', fait avec le prolongement du rayon vecteur r' de ce point, et par ϖ'' l'angle analogue relativement au point M'' de la seconde surface. En projetant les élémens $d\omega'$ et $d\omega''$ de ces deux surfaces sur les surfaces sphériques dont les rayons sont r' et r'', on aura

$$\cos\varpi'\, d\omega' = r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi',$$
$$\cos\varpi''\, d\omega'' = r''^2 \sin\theta''\, d\theta''\, d\psi'';$$

faisons enfin, pour abréger,

$$k\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right) = E'\cos\varpi',$$
$$k\left(\frac{d\varphi''}{dx''}\cos l'' + \frac{d\varphi''}{dy''}\cos m'' + \frac{d\varphi''}{dz''}\cos n''\right) = E''\cos\varpi'';$$

de manière que E' et E'' soient les épaisseurs évaluées suivant les rayons vecteurs r' et r'', des couches de fluide libre dont les actions réunies remplacent celle de A, ou plutôt les produits de ces épaisseurs par la densité du fluide, considérés comme positifs ou comme négatifs, selon que le fluide libre est boréal ou austral. Au moyen de ces diverses notations, la valeur de Q deviendra

$$Q = \iint \frac{1}{\rho} E' r'^2 \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' + \iint \frac{1}{\rho'} E'' r''^2 \sin\theta''\, d\theta''\, d\psi'';$$

et les intégrales devront être prises depuis $\theta' = 0$, $\psi' = 0$, $\theta'' = 0$, $\psi'' = 0$, jusqu'à $\theta' = \pi$, $\psi' = 2\pi$, $\theta'' = \pi$, $\psi'' = 2\pi$.

Dans le cas que nous examinons, on peut supposer, pour

plus de généralité, que les centres d'une partie des forces qui agissent sur A sont compris dans l'espace vide que ce corps renferme ; si l'on suppose alors que la fonction V ne soit relative qu'aux forces qui ont leurs centres en dehors de A, et que l'on représente par U la fonction analogue, qui se rapportera aux forces dont les centres sont compris dans l'espace intérieur, il faudra mettre $V+U$ à la place de V dans l'équation (i), laquelle deviendra finalement

$$\left.\begin{array}{l} V+U+\frac{4\pi(1-k)}{3}\varphi \\ +\iint\frac{1}{\rho}E'r'^2\sin\theta' d\theta' d\psi' + \iint\frac{1}{\rho'}E''r''^2\sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = 0. \end{array}\right\} (k)$$

Lorsqu'on aura $k=1$, elle coïncidera avec l'équation d'après laquelle on déterminerait les épaisseurs E' et E'' des couches électriques correspondantes aux deux surfaces de A, s'il s'agissait d'un corps électrisé par influence ; dans ce cas particulier, le problème du magnétisme et celui de l'électricité dans les corps conducteurs dépendront de la résolution d'une même équation ; pour toute autre valeur de k, l'équation relative au magnétisme contiendra, comme on voit, un terme qui ne s'y trouverait pas dans le cas de l'électricité.

(22) Si l'on regarde la quantité φ comme une fonction des coordonnées polaires r, θ, ψ, et que l'on substitue dans l'équation (h) ces variables à la place des x, y, z, elle se transformera en celle-ci :

$$r\frac{d^2.r\varphi}{dr^2}+\frac{d\left(\sin\theta\frac{d\varphi}{d\theta}\right)}{\sin\theta\, d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d^2\theta}{d\psi^2}=0. \quad (l)$$

Toute fonction des deux angles θ et ψ pouvant être exprimée, comme nous l'avons déjà rappelé (n.° 14), par une série de certaines fonctions de leurs sinus et cosinus, c'est sous cette forme que nous mettrons la valeur de l'inconnue φ ; soit

donc

$$\varphi = R_0 + R_1 + R_2 + \ldots + R_i + \&c.;$$

le terme général R_i étant une fonction rationnelle, entière et du degré i, des trois quantités $\cos\theta$, $\sin\theta \sin\psi$ et $\sin\theta \cos\psi$, dépendante aussi de r, et qui satisfait à l'équation

$$\frac{d\left(\sin\theta \frac{dR_i}{d\theta}\right)}{d\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{d^2 R_i}{d\psi^2} + i(i+1) R_i = 0. \quad (m)$$

Après avoir substitué cette valeur de φ dans l'équation (l), on obtiendra un résultat de cette forme :

$$R'_0 + R'_1 + R'_2 + \ldots + R'_i + \&c. = 0;$$

R'_i étant la partie de son premier membre qui répond au terme quelconque R_i de notre série. La valeur de R'_i, réduite en vertu de l'équation (m), est

$$R'_i = r \frac{d^2 . rR_i}{dr^2} - i(i+1) R_i;$$

c'est donc une fonction de θ et ψ, de la même espèce que R_i; et, d'après la nature de ce genre de quantités, chaque terme de la série précédente devra être séparément nulle, pour que la série entière soit égale à zéro. Ainsi nous aurons généralement

$$r \frac{d^2 . rR_i}{dr^2} - i(i+1) R_i = 0;$$

équation dont l'intégrale complète est

$$R_i = r^i H_i + \frac{1}{r^{i+1}} G_i;$$

H_i et G_i étant des quantités indépendantes de r et de la même nature que R_i, eu égard aux deux autres variables θ et ψ.

Il ne restera donc plus qu'à déterminer, dans chaque cas particulier, les expressions de ces deux quantités, en fonctions de leur indice i. On y parviendra en mettant dans le

premier membre de l'équation (k), au lieu de φ, sa valeur précédente, et à la place de V, U, ρ et ρ', leurs valeurs en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances croissantes ou décroissantes de r; on égalera ensuite à zéro la somme des termes qui contiendront la même puissance de r, et l'on formera de cette manière une suite d'équations qui serviront à déterminer les quantités H_i et G_i, pour toutes les valeurs de l'indice i. Lorsqu'il ne restera plus rien d'inconnu dans la valeur de φ, la solution du problème sera complète : car on connaîtra, 1.° la distribution du magnétisme dans l'intérieur de A, d'après les trois quantités α, β, γ (n.° 5), qui sont les différences partielles de φ; 2.° les composantes X, Y, Z de l'action magnétique de ce corps sur un point donné de position, au moyen de la quantité Q, dont la valeur se déduira de celle de φ par des intégrations immédiates.

§. III.

Application des Formules générales aux Corps sphériques.

(23) Supposons que le corps A soit une sphère creuse, qui ait par-tout la même épaisseur. Soient a le rayon de sa surface extérieure, et b celui de sa surface intérieure; en sorte qu'on ait $r'=a$, $r''=b$, en plaçant au centre de cette sphère l'origine des coordonnées qui entrent dans les formules du paragraphe précédent. On aura aussi, dans la même hypothèse,

$$\cos l'=\frac{x'}{r'},\ \cos m'=\frac{y'}{r'},\ \cos n'=\frac{z'}{r'},\ \cos \varpi'=1,$$

$$\cos l''=-\frac{x''}{r''},\ \cos m''=-\frac{y''}{r''},\ \cos n''=-\frac{z''}{r''},\ \cos \varpi''=1;$$

et il en résultera

$$E'=k\frac{d\varphi'}{dr'},\ E''=-k\frac{d\varphi''}{dr''};\qquad (1)$$

où l'on devra faire $r' = a$, $r'' = b$, après avoir effectué les différenciations. L'équation (k) se changera donc en celle-ci,

$$\left.\begin{array}{c} V + U + \frac{4\pi(1-k)}{3}\,\varphi \\ + a^2 k \iint \frac{1}{\rho}\,\frac{d\varphi'}{dr'}\,\sin\theta' d\theta' d\psi' - b^2 k \iint \frac{1}{\rho'}\,\frac{d\varphi''}{dr''}\,\sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = 0, \end{array}\right\} (2)$$

qui devra servir à déterminer les deux séries de coefficiens contenus dans la valeur de φ du numéro précédent.

Dans cette équation, le point M, qui répond aux coordonnées polaires r, θ, ψ, appartenant à la partie pleine de A, il s'ensuit qu'on a $r < a$ et $r > b$; on aura donc, en séries convergentes,

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a} + \frac{r}{a^2}\,Y_1' + \frac{r^2}{a^3}\,Y_2' + \frac{r^3}{a^4}\,Y_3' + \&c.,$$

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{r} + \frac{b}{r^2}\,Y_1'' + \frac{b^2}{r^3}\,Y_2'' + \frac{b^3}{r^4}\,Y_3'' + \&c.;$$

les coefficiens de la première série étant des fonctions de $\theta, \psi, \theta', \psi'$, symétriques, soit par rapport à θ et θ', soit relativement à ψ et ψ', et ceux de la seconde série se déduisant des premiers en y changeant θ' et ψ' en θ'' et ψ''. En vertu des propriétés connues dont ces fonctions jouissent, si l'on désigne par H'_i ce que devient la fonction H_i du numéro précédent, quand on y met θ' et ψ' à la place de θ et ψ, on aura

$$\iint H'_i\, Y'_{i'} \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = 0,$$

tant que les indices i et i' seront différens, et

$$\iint H'_i\, Y'_{i'} \sin\theta'\, d\theta'\, d\psi' = \frac{4\pi H_i}{2i+1},$$

lorsqu'ils seront égaux; les limites des intégrales étant toujours $\theta' = 0$, $\psi' = 0$, et $\theta' = \pi$, $\psi' = 2\pi$. Les mêmes équations auront lieu, en substituant la fonction G_i à H_i; et elles subsisteront également, en intégrant dans les mêmes limites, par rapport aux variables θ'' et ψ''. Il résulte de là

que, si nous combinons l'expression de φ du numéro précédent avec ces valeurs de $\frac{1}{\rho}$ et $\frac{1}{\rho'}$, nous aurons

$$\iint \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' d\theta' d\psi' = \frac{4\pi}{a^2}\left(\frac{r}{3} H_1 + \frac{2r^2}{5} H_2 + \frac{3r^3}{7} H_3 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{ir^i}{2i+1} H_i + \&c.\right)$$
$$- \frac{4\pi}{a^2}\left(\frac{1}{a} G_0 + \frac{2r}{3a^3} G_1 + \frac{3r^2}{5a^5} G_2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{(i+1)r^i}{(2i+1)a^{2i+1}} G_i + \&c.\right),$$

$$\iint \frac{1}{\rho'} \frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta'' d\theta'' d\psi'' = \frac{4\pi}{r^2}\left(\frac{b}{3} H_1 + \frac{2b^3}{5r} H_2 + \frac{3b^5}{7r^2} H_3 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{ib^{2i-1}}{(2i+1)r^{i-1}} H_i + \&c.\right)$$
$$- \frac{4\pi}{b^2}\left(\frac{1}{r} G_0 + \frac{2}{3r^2} G_1 + \frac{3}{5r^3} G_2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{i+1}{(2i+1)r^{i+1}} G_i + \&c.\right);$$

en faisant, comme il a été dit, $r' = a$, $r'' = b$, après les opérations effectuées.

Les quantités U et V se développent aussi suivant les puissances croissantes ou décroissantes de r : mais, d'après la position du point M, dont cette variable est le rayon vecteur, il faudra, pour que ces séries soient convergentes, que V soit développé suivant les puissances croissantes de r, et U suivant ses puissances décroissantes ; car V répond à des forces qui émanent de centres dont les distances au centre de A surpassent r, et, au contraire, U se rapporte à des forces dont les centres d'action sont à des distances de ce point moindres que r. Nous aurons, par conséquent,

$$V = V_0 + r V_1 + r^2 V_2 + r^3 V_3 + \&c.,$$

$$U = \frac{1}{r} U_0 + \frac{1}{r^2} U_1 + \frac{1}{r^3} U_2 + \frac{1}{r^4} U_3 + \&c.;$$

les termes généraux V_i et U_i des coefficiens de ces séries étant des fonctions de θ et ψ, de la même nature que H_i et G_i. A mesure que r augmentera, la valeur de U approchera de se réduire à son premier terme $\frac{1}{r} U_\circ$: mais, par la nature de cette fonction, sa limite doit être la somme des quantités de fluide libre appartenant aux aimans qu'on a placés dans l'intérieur de A, divisée par r; le coefficient $U_\circ$ doit donc être égal à cette somme, laquelle est toujours zéro, quels que soient le nombre et la forme de ces aimans.

Maintenant, si nous substituons ces diverses valeurs et celle de φ du numéro précédent, dans le premier membre de l'équation (2), et que nous égalions séparément à zéro la somme des termes qui sont multipliés par r^i, et celle des termes qui ont $\frac{1}{r^{i+1}}$ pour facteur, nous aurons, pour toutes les valeurs de l'indice i, ces deux équations :

$$\left.\begin{aligned} &V_i + \frac{4\pi(1-k)}{3} H_i + \frac{4\pi i k}{2i+1} H_i - \frac{4\pi(i+1)k}{(2i+1)a^{2i+1}} G_i = 0, \\ &U_i + \frac{4\pi(1-k)}{3} G_i - \frac{4\pi i k b^{2i+1}}{2i+1} H_i + \frac{4\pi(i+1)k}{2i+1} G_i = 0; \end{aligned}\right\} (3)$$

d'où l'on tirera les valeurs de H_i et G_i qu'il s'agissait de déterminer. A cause de $U_\circ = 0$, la seconde équation donnera $G_\circ = 0$; et pour le même indice $i = 0$, la première se réduira à

$$V_\circ + \frac{4\pi(1-k)}{3} H_\circ = 0.$$

Les équations (1) feront connaître les épaisseurs E' et E'' des couches de fluide libre, dont les actions, ajoutées l'une à l'autre, sont équivalentes à celle de A sur tous les points non situés dans la partie pleine de ce corps. Par la nature des fonctions H_i et G_i, on aura simplement

$$a^2 \int\int E' \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi' = -4\pi k G_0,$$

$$b^2 \int\int E'' \sin\theta'' \, d\theta'' \, d\psi'' = 4\pi k G_0,$$

pour les quantités totales de fluide libre dont ces couches seraient formées ; quantités qui seront nulles, puisqu'on a $G_0 = 0$.

(24) Lorsqu'on voudra se servir de ces valeurs de E' et E'' pour calculer l'action de A sur un point M donné de position, il faudra s'y prendre différemment, selon que ce point sera en dehors de A ou qu'il sera situé dans l'espace vide que ce corps renferme. Si l'on forme la quantité

$$V + U + k a^2 \int\int \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' d\theta' d\psi' - k b^2 \int\int \frac{1}{\rho'} \frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta'' d\theta'' d\psi'',$$

que nous appellerons F pour abréger, et dans laquelle on devra faire $r' = a$, $r'' = b$, ses différences partielles par rapport aux coordonnées de M exprimeront, dans les deux cas, les composantes de la force totale qui agit sur ce point, et qui provient soit de l'action de A, soit des forces auxquelles se rapportent les fonctions V et U : mais, selon la position du point M, les différens termes de cette quantité devront se développer suivant les puissances croissantes ou décroissantes de M, afin de satisfaire toujours à la condition de la convergence des séries ; c'est pourquoi nous allons examiner successivement le cas où le point M est en dehors de A, et le cas où il est en dedans.

1.° Si le point M est en dehors de A, de sorte qu'on ait $r > a$, et à plus forte raison $r > b$, le second et le quatrième terme de F devront être développés comme dans l'équation (2), suivant les puissances décroissantes de r ; par conséquent, le coefficient de r^{-i-1}, dans le développement de la somme de ces deux termes, sera équivalent, d'après la seconde équation (3), à

$$-\frac{4\pi(1-k)}{3}G_i;$$

et nous aurons

$$U - kb^2\int\int\frac{1}{\rho''}\frac{d\varphi''}{dr''}\sin\theta''\,d\theta''\,d\psi''$$
$$= -\frac{4\pi(1-k)}{3}\left(\frac{1}{r}G_0 + \frac{1}{r^2}G_1 + \frac{1}{r^3}G_2 + \&c.\right).$$

La quantité $\frac{1}{\rho}$ comprise dans le troisième terme de F devra aussi être développée suivant les puissances descendantes de r; on aura donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} + \frac{a}{r^2}Y_1' + \frac{a^2}{r^2}Y_2' + \frac{a^3}{r^3}Y_3' + \&c.;$$

les coefficiens étant les mêmes que dans le numéro précédent. Il en résultera pour le coefficient de r^{-i-1} dans le développement de ce troisième terme,

$$\frac{4\pi k a^{i+2}}{2i+1}\left(i\,b^{i-1}H_i - \frac{i+1}{a^{i+2}}G_i\right);$$

quantité égale à

$$-a^{2i+1}\left(V_i + \frac{4\pi(1-k)}{3}H_i\right),$$

en vertu de la première équation (3), et qui s'évanouit pour $i = 0$, d'après l'équation relative à cet indice. Nous aurons donc

$$ka^2\int\int\frac{1}{\rho}\frac{d\varphi'}{dr'}\sin\theta'\,d\theta'\,d\psi' = -\left(\frac{a^3}{r^2}V_1 + \frac{a^5}{r^3}V_2 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}}V_i + \&c.\right) - \frac{4\pi(1-k)}{3}\left(\frac{a^3}{r^2}H_1 + \frac{a^5}{r^3}H_2 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}}H_i + \&c.\right);$$

et la valeur complète de F, dans le cas où le point M est en dehors de A, sera

$$F = V - \left(\frac{a^3}{r^2} V_1 + \frac{a^5}{r^3} V_2 + \ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}} V_i + \&c.\right)$$

$$- \frac{4\pi(1-k)}{3}\Big[\frac{1}{r^2}(a^3 H_1 + G_1) + \frac{1}{r^3}(a^5 H_2 + G_2) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{r^{2i+1}}(a^{2i+1} H_i + G_i) + \&c.\Big];$$

2.° Le point M étant compris dans la partie vide de A, on aura $r < b$ et $< a$. Le premier et le troisième terme de F devront se développer suivant les puissances croissantes de r, comme dans l'équation (2); le coefficient de r^i, dans le développement de leur somme, sera équivalent à

$$-\frac{4\pi(1-k)}{3} H_i,$$

en vertu de la première équation (3); et à cause que ce coefficient est égal à V_0, dans le cas de $i = 0$, on aura

$$V + k a^2 \int\int \frac{1}{\rho} \frac{d\varphi'}{dr'} \sin\theta' d\theta' d\psi'$$

$$= V_0 - \frac{4\pi(1-k)}{3}(r H_1 + r^2 H_2 + r^3 H_3 + \&c.).$$

Il faudra aussi développer, suivant les puissances croissantes de r, la quantité $\frac{1}{\rho'}$ contenue dans le quatrième terme de F; on aura donc

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{b} + \frac{r}{b^2} Y_1'' + \frac{r^2}{b^3} Y_2'' + \frac{r^3}{b^4} Y_3'' + \&c.;$$

au moyen de quoi le coefficient de r^i, dans le développement de ce terme, sera

$$-\frac{4\pi k}{(2i+1) b^{i+1}}\left(i\, b^{i-1} H_i - \frac{i+1}{b^{i+2}} G_i\right);$$

quantité qui est la même chose que

$$-\frac{1}{b^{2i+3}}\left(U_i + \frac{4\pi(1-k)}{3} G_i\right),$$

d'après la seconde équation (3); donc, à cause de $U_0 = 0$, $G_0 = 0$, on aura

$$-k b^2 \int\int \frac{1}{\rho'} \frac{d\varphi''}{dr''} \sin\theta''\, d\theta''\, d\psi'' =$$

$$-\left(\frac{r}{b^3}U_1 + \frac{r^2}{b^5}U_2 + \frac{r^3}{b^7}U_3 + \ldots + \frac{r^i}{b^{2i+1}}U_i + \text{\&c.}\right)$$

$$-\frac{4\pi(1-k)}{3}\left(\frac{r}{b^3}G_1 + \frac{r^2}{b^5}G_2 + \frac{r^3}{b^7}G_3 + \ldots + \frac{r^{i+1}}{b^{2i+1}}G_i + \text{\&c.}\right);$$

et la quantité F, dans le cas où le point M est en dedans de A, aura pour valeur complète,

$$F = V_0 + U - \left(\frac{r}{b^2}U_1 + \frac{r^2}{b^5}U_2 + \frac{r^3}{b^7}U_3 + \ldots + \frac{r^i}{b^{2i+1}}U_i + \text{\&c.}\right)$$

$$-\frac{4\pi(1-k)}{3}\left[r\left(H_1 + \frac{1}{b^3}G_1\right) + r^2\left(H_2 + \frac{1}{b^5}G_2\right)\right.$$

$$\left. + r^3\left(H_3 + \frac{1}{b^7}G_3\right) + \ldots + r^i\left(H_i + \frac{1}{b^{2i+1}}G_i\right) + \text{\&c.}\right].$$

On a conservé, pour abréger, dans ces expressions générales de F, les lettres H_1, H_2, &c., G_1, G_2, &c., à la place de leurs valeurs déterminées par les équations (3). Les valeurs de F sont maintenant des fonctions de r, θ et ψ, qui contiennent, en outre, des quantités données dans chaque cas particulier. Il ne restera plus qu'à les différencier par rapport aux coordonnées rectangulaires x, y, z du point M, en y regardant r, θ, ψ, comme des fonctions de ces coordonnées, pour en conclure les composantes totales des forces qui agissent sur ce point, suivant leurs directions. Leur origine étant au centre de A, et l'axe des z positives et le plan des x, z, étant l'axe et le plan fixes d'où sont comptés les angles θ et ψ, on aura, dans ces différenciations,

$$z = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta\sin\psi,\quad x = r\sin\theta\cos\psi.$$

(25) Dans le cas particulier où l'on a $k = 1$, les valeurs

de F se réduiront, savoir : la valeur relative aux points extérieurs, à

$$F = V - \left(\frac{a^3}{r^2} V_1 + \frac{a^5}{r^3} V_2 + \frac{a^7}{r^4} V_3 + \ldots + \frac{a^{2i+1}}{r^{i+1}} V_i + \&c.\right);$$

et celle qui se rapporte aux points intérieurs, à

$$F = V_0 + U - \left(\frac{r}{b^3} U_1 + \frac{r^2}{b^5} U_2 + \frac{r^3}{b^7} U_3 + \ldots + \frac{r^i}{b^{2i+1}} U_i + \&c.\right).$$

Le terme V_0 étant une constante qui disparaîtra dans les différences partielles de F, on voit que la quantité V et les termes de son développement n'entreront pas dans les valeurs des forces qui agissent sur les points intérieurs, tandis que la fonction U, et les quantités qui en dépendent, n'entreront pas non plus dans les valeurs des forces relatives aux points extérieurs; c'est-à-dire que les forces qui émanent de l'intérieur de A n'agiront point au dehors, et celles qui ont leurs centres au dehors n'agiront point au dedans. On voit aussi que les actions extérieures et intérieures seront indépendantes de l'épaisseur de la partie pleine de A: les actions extérieures dépendront seulement du rayon a de la surface extérieure, et les actions intérieures, du rayon b de la surface intérieure. Mais ces théorèmes remarquables cesseront d'avoir lieu rigoureusement, dès que la quantité k différera de l'unité.

Nous avons remarqué, à la fin du n.° 21, que, dans le cas de l'électricité, on aurait $k = 1$; ces théorèmes conviendront donc aux actions électriques d'une sphère creuse, d'une épaisseur constante, formée d'une matière conductrice de l'électricité, et électrisée par l'influence d'autres corps placés en dehors ou dans son intérieur. Il faudra toutefois que les deux électricités, vitrée et résineuse, soient en quantités égales dans l'intérieur de cette sphère. Si cette condition n'était pas remplie, l'énoncé du théorème relatif aux actions extérieures devrait être modifié : on n'aurait plus alors $U_0 = 0$; cette

quantité U_o représenterait l'excès de l'une des deux électricités sur l'autre. Pour $i = 0$, les équations (3) donneraient

$$4\pi G_o = -U_o, \quad \frac{4\pi(1-k)}{3} H_o = -V_o - \frac{1}{a} U_o;$$

en sorte que le produit $(1 - k) H_o$ ne serait plus nul, quoique l'on ait $k = 1$; ce qui n'est pas impossible, puisque H_o est une inconnue qui peut dépendre de k, et devenir infinie pour cette valeur particulière. L'expression de F, relative aux points intérieurs, n'en serait pas changée; mais celle qui se rapporte aux points extérieurs devra être augmentée d'un terme,

$$-\frac{a}{r}\left(V_o + \frac{4\pi(1-k)}{3} H_o\right),$$

équivalent à $\frac{1}{r} U_o$; d'où l'on peut conclure que, dans le cas le plus général, l'action des corps placés dans l'intérieur de A sur un point placé au dehors sera la même que si la totalité des deux électricités qu'ils contiennent, était réunie au centre de A, en sorte qu'elle ne dépendra, ni de la distribution des deux fluides dans ces corps, ni dans la partie pleine de A (*).

(26) Le cas le plus simple, eu égard aux forces magnétiques qui agissent sur A, est celui où l'on ne suppose aucune force intérieure, et où les forces extérieures se réduisent à une seule, constante en grandeur et en direction, dans toute l'étendue de A; ce cas sera aussi le plus propre à la vérification de la théorie par l'expérience : nous allons donc développer en détail les formules qui s'y rapportent; et, pour fixer les idées, nous supposerons que la force constante qui agit sur A, soit l'action magnétique du globe terrestre.

(*) *Voyez*, sur ce point, le *Bulletin de la Société philomathique*, avril 1824.

Soit m son intensité; prenons l'axe des z parallèle à cette force, et dirigé vers le pôle boréal: dans nos climats, la force m tendra à diminuer l'ordonnée z d'une particule de fluide austral, et, ses composantes suivant les axes des x et des y étant nulles, on aura

$$V = -mz,$$

en regardant m comme une quantité positive. A cause de $z = r\cos\theta$, il en résultera

$$V_1 = -m\cos\theta;$$

tous les autres coefficiens du développement de V seront nuls; les coefficiens du développement de U seront aussi nuls, puisqu'il n'y a pas de forces intérieures; d'après cela, les valeurs de H_i et G_i, données par les équations (3), seront égales à zéro pour toutes les valeurs de i, excepté $i = 1$: pour cet indice particulier, on tirera de ces équations:

$$H_1 = \frac{3ma^3(1+k)\cos\theta}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]},$$

$$G_1 = \frac{3ma^3b^3k\cos\theta}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}.$$

Dans le cas que nous examinons, l'expression complète de φ (n.° 22) sera donc

$$\varphi = \frac{3ma^3r\cos\theta}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\left(1 + k + \frac{kb^3}{r^3}\right);$$

les quantités α, β, γ, qui en sont les différences partielles par rapport à x, y, z (n.° 20), auront pour valeurs:

$$\alpha = -\frac{9mka^3b^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\,\frac{\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3},$$

$$\beta = -\frac{9mka^3b^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\,\frac{\cos\theta\sin\theta\sin\psi}{r^3},$$

$$\gamma = \frac{3ma^3}{4\pi[(1+k)a^3 - 2k^2b^3]}\left(1 + k + \frac{kb^3}{r^3} - \frac{3kb^3\cos^2\theta}{r^3}\right).$$

Elles feront connaître (n.° 4), au point quelconque de la

partie pleine de A, dont les coordonnées polaires sont r, θ et ψ, la direction de la petite aiguille aimantée dont l'action équivaudrait à celle de l'élément magnétique qui répond au même point, et la quantité de fluide libre correspondante à chacun de ses deux pôles. Si l'on avait $b = 0$, c'est-à-dire si la sphère A était entièrement pleine, cette direction serait constante dans toute son étendue, et la même que celle du magnétisme terrestre; mais, quand le rayon b ne sera pas nul, les lignes d'aimantation seront des lignes courbes, dont la direction en un point donné dépendra des deux rayons a et b, et de la quantité k. Cette disposition du magnétisme, dans l'épaisseur d'une sphère creuse, est une conséquence de la théorie qui n'est pas de nature à pouvoir se vérifier par l'expérience.

(27) En substituant dans l'expression de F, relative à un point M extérieur, les valeurs précédentes de V, $V_{,}$, $H_{,}$, $G_{,}$, et supprimant tous les autres termes, on aura

$$F = -mr\cos\theta + \frac{m(a^3 - b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3 - 2k^2b^3}\,\frac{a^3\cos\theta}{r^2};$$

les forces totales qui agiront sur ce point, suivant les axes des x, y, z, seront donc

$$\frac{dF}{dx} = -\frac{3m(a^3 - b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3 - 2k^2b^3}\,\frac{a^3\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3},$$

$$\frac{dF}{dy} = -\frac{3m(a^3 - b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3 - 2k^2b^3}\,\frac{a^3\cos\theta\sin\theta\sin\psi}{r^3},$$

$$\frac{dF}{dz} = -m + \frac{m(a^3 - b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3 - 2k^2b^3}\,\frac{a^3(1 - 3\cos^2\theta)}{r^3}.$$

Leur résultante sera comprise dans le plan du rayon vecteur r et de l'axe des z, comme cela doit être; elle sera parallèle à cet axe, ou à la direction du magnétisme terrestre, dans deux cas particuliers : lorsque le point M sera situé dans l'axe

des z, et quand il sera compris dans le plan perpendiculaire à cet axe, mené par le centre de A : mais elle ne se réduira, dans aucun cas, à la seule action de la terre, et il n'y aura aucune position de M dans laquelle A n'exerce une action sur ce point.

La seconde valeur de F, du n.° 24, qui se rapporte aux points intérieurs, deviendra

$$F = -\frac{m(1+k-2k^2)a^3 r \cos\theta}{(1+k)a^3 - 2k^2 b^3}.$$

Les forces parallèles aux axes des x et y seront nulles; la force totale qui agira sur chacun de ces points, sera donc parallèle à la direction du magnétisme terrestre : son intensité sera constante dans tout l'espace vide que A renferme, et elle aura pour valeur :

$$\frac{dF}{dz} = -\frac{m(1+k-2k^2)a^3}{(1+k)a^3 - 2k^2 b^3}.$$

Ainsi une petite aiguille aimantée, placée dans cet espace, qui ne réagirait pas sensiblement sur la partie pleine de A, conserverait par-tout la direction naturelle de la boussole; mais, k étant < 1 et $b < a$, la force qui la sollicite sera toujours moindre que m, et par conséquent ses oscillations seront ralenties par l'action de A. L'observation exacte de leur durée, si elle était possible, serait le moyen le plus direct de déterminer la valeur de k pour la matière dont A est formé.

Si l'on avait $k = 1$, la force relative aux points intérieurs serait nulle, et la petite aiguille dont nous parlons n'affecterait nulle part une direction déterminée; en même temps les composantes de l'action extérieure deviendraient indépendantes du rayon b de l'espace intérieur, conformément à ce que l'on a dit plus haut (n.° 25). On peut aussi observer que, dans ce cas, la résultante de ces forces serait égale à zéro, pour un point M placé à la surface de A, et dans le plan mené par

son centre, perpendiculairement à la direction du magnétisme terrestre, ou à l'axe des z; car les trois composantes de cette force s'évanouissent à-la-fois; quand on a $k=1$, $r=a$ et $\theta=\frac{1}{2}\pi$. Une très-petite aiguille aimantée, dont la réaction sur A serait insensible, et qui serait placée dans ce plan à une très-petite distance de la surface de A, se comporterait donc comme dans l'espace intérieur, c'est-à-dire qu'elle ne prendrait aucune direction particulière.

(28) Nous examinerons spécialement le cas où la sphère A est entièrement pleine, et nous ferons, en conséquence, $b=0$ dans les valeurs des forces relatives aux points extérieurs; ce qui les réduira à

$$\frac{dF}{dx}=-\frac{3mka^3\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3},$$
$$\frac{dF}{dy}=-\frac{3mka^3\cos\theta\sin\theta\sin\psi}{r^3},$$
$$\frac{dF}{dz}=-m+\frac{mka^3(1-3\cos^2\theta)}{r^3}.$$

Il ne sera pas inutile, au reste, de remarquer que l'on reviendra, si l'on veut, de ces formules particulières, à celles qui se rapportent à une valeur quelconque de b, en y remplaçant k par la quantité

$$\frac{(a^3-b^3)k(1+k)}{(1+k)a^3-2b^3k^2}.$$

Menons par le centre de A deux plans, l'un horizontal et l'autre perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre. Leur intersection sera la ligne qui va de l'*est* à l'*ouest* magnétiques; nous prendrons la partie de cette droite qui est dirigée vers l'est, pour l'axe des x, à partir duquel l'angle ψ sera compté dans le second plan; celui des y, z représentera le méridien magnétique, et son intersection avec le premier

plan sera la direction naturelle de la boussole horizontale. Désignons par c l'angle compris entre l'axe des z et la verticale menée par le centre de A et dirigée vers le zénith, lequel angle sera le complément de l'*inclinaison* magnétique. Soit u l'angle que fait le rayon vecteur r du point M avec la même verticale, et v l'angle compris entre la projection de ce rayon sur le plan horizontal et l'axe des x; de manière que r, u et v soient aussi les coordonnées polaires du point M. Les angles u et v seront liés aux angles θ et ψ par les équations :

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \cos u \cos c + \sin u \sin c \sin v, \\ \cos u &= \cos\theta \cos c - \sin\theta \sin c \sin\psi, \\ \cos v \sin u &= \cos\psi \sin\theta, \end{aligned}\right\} (4)$$

dont la troisième est la suite des deux autres : elles nous sont fournies par la considération du triangle sphérique, dont les trois sommets répondent au zénith, au pôle magnétique boréal et au point M, et dans lequel θ, u et c sont les trois côtés, et $\frac{1}{2}\pi - v$, $\frac{1}{2}\pi + \psi$, les angles opposés à θ et à u.

Appelons encore ζ la composante verticale de la force qui agit sur le point M; et désignons par ζ' et ζ'' ses composantes horizontales, dont la seconde soit parallèle à l'axe des x, et par conséquent égale à $\frac{dF}{dx}$; nous aurons

$$\zeta = -m\cos c + mk(\cos c(1-3\cos^2\theta) + 3\sin c\cos\theta\sin\theta\sin\psi)\frac{a^3}{r^3},$$

$$\zeta' = -m\sin c + mk(\sin c(1-3\cos^2\theta) - 3\cos c\cos\theta\sin\theta\sin\psi)\frac{a^3}{r^3},$$

$$\zeta'' = -\frac{3mka^3\cos\theta\sin\theta\cos\psi}{r^3}.$$

La résultante des deux forces horizontales fera, avec la direction de ζ', un angle δ dont la tangente sera

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\zeta''}{\zeta'};$$

et la résultante de cette force et de la composante verticale fera avec la verticale un angle γ, tel qu'on aura

$$\operatorname{tang} \gamma = \frac{\sqrt{\zeta'^2 + \zeta''^2}}{\zeta}.$$

Cela posé, si le point M appartient à une aiguille aimantée, dont la longueur soit très-petite par rapport à sa distance au centre de A, les quantités r, θ et ψ ne varieront pas sensiblement dans toute son étendue, et les forces ζ, ζ', ζ'' pourront être regardées comme constantes. Si cette aiguille est librement suspendue par son centre de gravité, elle se dirigera, dans sa position d'équilibre, suivant leur résultante; par conséquent, γ sera l'angle qu'elle fera avec la verticale, ou le complément de l'inclinaison magnétique, modifiée par l'action de A, et δ l'angle compris entre sa projection horizontale et le méridien magnétique : son pôle nord s'approchera de l'est ou de l'ouest, selon que la valeur de δ sera positive ou négative. Quand il s'agira d'une aiguille horizontale dans sa direction naturelle, comme l'aiguille d'une boussole ordinaire, l'angle δ exprimera encore la quantité dont elle déviera horizontalement, en vertu de l'action de A; de plus, elle s'inclinera en vertu de cette même action : mais, pour calculer, dans ce cas, l'inclinaison qu'elle prendra, il faudra tenir compte du poids qui la maintient horizontale dans sa direction naturelle, et l'ajouter à la composante ζ. Ce poids devra être égal à $m \cos c$; en sorte que, si l'on représente par i le complément de l'inclinaison demandée, on aura

$$\operatorname{tang} i = \frac{\sqrt{\zeta'^2 + \zeta''^2}}{\zeta + m \cos c}.$$

Si l'on désigne le nombre d'oscillations qu'une même aiguille

horizontale effectue dans l'unité de temps, par n, quand elle n'est point influencée par l'action de A, et par n', lorsqu'elle est soumise à son influence, les carrés de ces nombres n' et n seront entre eux en raison directe des forces correspondantes; et comme ces forces sont la résultante de ζ' et ζ'', et la composante horizontale $-m \sin c$ de l'action de la terre, on aura

$$n^4 (\zeta'^2 + \zeta''^2) = n'^4 m^2 \sin^2 c.$$

On formera de même une équation relative aux oscillations de l'aiguille d'inclinaison dans chaque *azimut* particulier. Ce sont ces diverses formules relatives aux oscillations et à la déviation des aiguilles horizontales ou inclinées, qu'il faudrait pouvoir comparer à l'expérience pour vérifier la théorie du magnétisme.

(29) En substituant les valeurs de ζ' et ζ'' dans celle de tang δ, on aura

$$\text{tang}\,\delta = \frac{3ka^3 \cos\theta \sin\theta \cos\psi}{r^3 \sin c - ka^3[\sin c(1-3\cos^2\theta) - 3\cos c \cos\theta \sin\theta \sin\psi]}; \quad (5)$$

formule équivalente, en vertu des équations (4), à celle-ci:

$$\text{tang}\,\delta = \frac{3ka^3 \cos\theta \sin u \cos v}{r^3 \sin c - ka^3 (\sin c - 3\cos\theta \sin u \sin v)}, \quad (6)$$

de sorte qu'en y mettant, à la place de $\cos\theta$, sa valeur donnée par la première équation (4), tang δ se trouvera exprimée en fonction des angles u et v.

La déviation δ sera nulle quand l'aiguille sera située dans le plan du méridien magnétique, passant par le centre de A, plan pour lequel on a $\psi = \frac{1}{2}\pi$; elle sera égale et de signe contraire, à égale distance, à l'est et à l'ouest de ce plan, c'est-à-dire, pour des valeurs de ψ, dont la somme est égale à π. Concevons qu'on ait mené par le même centre quatre

autres plans perpendiculaires à celui du méridien magnétique et qui le coupent, conséquemment, suivant la ligne est-ouest; dont le premier soit perpendiculaire à la direction du magnétisme terrestre, le second, parallèle à cette direction, le troisième, horizontal, et le quatrième, vertical. Pour le premier de ces quatre plans, on aura $\theta = \frac{1}{2}\pi$, et la déviation δ sera nulle en tous ses points comme dans le plan du méridien. Pour le second on aura $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$, selon que l'aiguille sera à l'est ou à l'ouest du méridien : nous supposerons que ce soit le premier cas qui ait lieu, et alors nous aurons

$$\tan \delta = \frac{3ka^3 \cos\theta \sin\theta}{[r^3 - ka^3(1 - 3\cos^2\theta)]\sin c}. \qquad (7)$$

Relativement au troisième plan, on aura $u = \frac{1}{2}\pi$, $\cos\theta = \sin c \sin v$, et, par conséquent,

$$\tan \delta = \frac{3ka^3 \cos v \sin v}{r^3 - ka^3(1 - 3\sin^2 v)}. \qquad (8)$$

Enfin, par rapport au quatrième plan, nous aurons $v = 0$, en supposant, pour fixer les idées, l'aiguille à l'est du méridien; la première équation (4) se réduira à $\cos\theta = \cos u \cos c$, et il en résultera

$$\tan \delta = \frac{3ka^3 \cos u \sin u}{(r^3 - ka^3)\tan c}. \qquad (9)$$

En comparant entre elles les formules (7) et (8), on voit que si l'on considère, dans les plans auxquels elles répondent, des positions de l'aiguille également éloignées de la ligne est-ouest, et pour lesquelles on ait, par conséquent, $\theta = \frac{1}{2}\pi - v$, les tangentes des déviations correspondantes seront entre elles dans le rapport constant de l'unité à $\sin c$.

Observons encore que, quelle que soit la position de la petite aiguille, lorsque sa distance r au centre de A sera très-grande par rapport au rayon a de cette sphère, tang δ sera, à très-peu près, proportionnelle au cube de la fraction $\frac{a}{r}$, et à la quantité k dépendante de la matière de A.

(30) La longueur de l'aiguille aimantée à laquelle on appliquera les formules que nous venons d'écrire, donnera lieu à une correction de ces formules dont il pourra être nécessaire de tenir compte. Nous supposerons qu'il s'agisse d'une aiguille horizontale dans sa direction naturelle : on calculera semblablement la correction relative aux aiguilles d'inclinaison. Soit $2\,l$ sa longueur; désignons, comme précédemment, par δ et i, la déviation horizontale et le complément de l'inclinaison qu'elle prendra, en vertu de l'action de A; supposons que les coordonnées polaires r, θ et ψ répondent à son milieu, et soient $r_{,}$, $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$, celles de son extrémité boréale : nous aurons

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta_{,} &= \frac{r\cos\theta + l\cos i}{r_{,}},\\
\sin\theta_{,}\sin\psi_{,} &= \frac{r\sin\theta\sin\psi + l\sin i\cos\delta}{r_{,}},\\
\sin\theta_{,}\cos\psi_{,} &= \frac{r\sin\theta\cos\psi + l\sin i\sin\delta}{r_{,}},\\
r_{,}^2 &= r^2 + 2\,rl[\cos\theta\cos i + \sin\theta\sin i\sin(\delta+\psi)] + l^2.
\end{aligned}\right\}(10)$$

On obtiendra les composantes de la force totale qui agit en ce point, en mettant $r_{,}$, $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$, à la place de r, θ et ψ, dans les expressions de ζ, ζ', ζ''; et si l'on y change ensuite le signe de l, on aura les composantes de la force appliquée à l'autre extrémité de l'aiguille. Comme il ne s'agit ici que d'un calcul d'approximation, on pourra prendre ces deux points

extrêmes pour les deux pôles où le fluide libre est censé réuni; alors on aura

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\zeta_{,}''}{\zeta_{,}'};$$

$\zeta_{,}'$ et $\zeta_{,}''$ étant les demi-sommes de ce que deviennent respectivement ζ' et ζ'' aux deux extrémités de l'aiguille.

Nous négligerons, dans le calcul de leurs valeurs, la quatrième puissance du rapport de l à r, et le produit de son carré par le carré du rapport de a^3 à r^3; d'où il résulte que nous négligerons aussi les termes qui auront $\frac{a^3 l^2}{r^5}$ cos i pour facteur, attendu que l'angle i, déterminé dans le n.° 28, est tel, que son cosinus est une quantité de l'ordre de $\frac{a^3}{r^3}$. De cette manière, on trouvera que la valeur de tang δ pourra s'écrire ainsi:

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\zeta''}{\zeta'}\,(1 - \Delta),$$

en faisant, pour abréger,

$$\Delta = \frac{5l^2}{2r^2}\left[2 - \cos 2\delta + \sin 2\delta\,\text{tang}\,\psi - 7\sin^2\theta\sin^2(\delta + \psi)\right].$$

Pour tenir compte de cette correction, on calculera d'abord l'angle δ sans y avoir égard, c'est-à-dire, en prenant $\frac{\zeta''}{\zeta'}$ pour sa tangente; puis on se servira de cette première valeur approchée, pour calculer la valeur de Δ; et enfin on multipliera la première valeur de tang δ par la quantité $1 - \Delta$, ce qui donnera la valeur corrigée de cette tangente.

(31) Il y aura encore une autre correction qu'on pourra faire subir à la valeur de l'angle δ; c'est celle qui dépend de

l'action exercée par l'aiguille aimantée sur la sphère A. Pour en calculer l'effet, il faut considérer les deux pôles comme des centres de forces extérieures que l'on comprendra dans la fonction V du n.° 10. Nous supposerons donc qu'il y ait au dehors de A une aiguille horizontale dont la position soit connue, ainsi que l'action plus ou moins énergique de chacun de ses pôles, et nous ferons ensuite coïncider cette aiguille avec celle dont on veut déterminer la déviation produite par l'action de A.

Désignons par $r_{,}$, $\theta_{,}$ et $\psi_{,}$ les coordonnées du pôle boréal de l'aiguille qui agit sur A, rapportées aux centres de cette sphère, et par $p\,m\,h^2$, l'action de ce pôle à une distance donnée h; m étant, comme précédemment, la constante relative à l'action de la terre, et p, une autre constante positive, qui dépendra de la quantité de fluide libre appartenant à ce pôle. L'action du pôle austral, à la même distance h, devra s'exprimer par $-p\,m\,h^2$; si, de plus, on désigne par r_2, θ_2 et ψ_2, ses coordonnées polaires, la valeur de V relative aux actions réunies de ces deux pôles sur le point de A qui répond aux coordonnées quelconques r, θ et ψ, sera

$$V = \frac{p\,m\,h^2}{[r_{,}^2 - 2r_{,}r(\cos\theta_{,}\cos\theta + \sin\theta_{,}\sin\theta\cos(\psi_{,}-\psi)) + r^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{p\,m\,h^2}{[r_2^2 - 2r_2 r(\cos\theta_2\cos\theta + \sin\theta_2\sin\theta\cos(\psi_2-\psi)) + r^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Afin de ne pas trop compliquer les calculs, nous supposerons que l'aiguille soit à une distance de A telle, que l'on puisse négliger le carré et les puissances supérieures de $\frac{r}{r_1}$ et $\frac{r}{r_2}$: nous aurons alors simplement

$$V = V_0 + r\,V_1;$$

et les valeurs de V_0 et V_1 seront

$$V_0 = p\,m\,h^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

$$V_1 = p.m.h^2\left[\left(\frac{\cos\theta_1}{r^2_1} - \frac{\cos\theta_2}{r^2_2}\right)\cos\theta + \left(\frac{\sin\theta_1 \sin\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2 \sin\psi_2}{r^2_2}\right)\sin\theta\sin\psi + \left(\frac{\sin\theta_1 \cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2 \cos\psi_2}{r_2{}^2}\right)\sin\theta\cos\psi\right].$$

A raison de cette valeur de V, la quantité F du n.° 24 renfermera, dans le cas de $b = 0$, une partie

$$V_0 + r\,V_1 - \frac{k\,a^3}{r^2}\,V_1;$$

d'où il résultera une partie correspondante dans chacune des trois forces ζ, ζ', ζ''. Par exemple, dans la troisième, cette partie sera

$$p\,m\,h^2\left(\frac{\sin\theta_1 \cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2 \cos\psi_2}{r^2_2}\right) + \frac{3\,k\,a^3 \sin\theta\cos\psi}{r^3}\,V_1 - \frac{p\,m\,h^2\,k\,a^3}{r^3}\left(\frac{\sin\theta_1 \cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2 \cos\psi_2}{r^2_2}\right).$$

Le terme indépendant de a exprimera l'action directe des deux pôles de l'aiguille sur le point dont les coordonnées sont r, θ et ψ; les deux termes qui ont $k\,a^3$ pour facteur, représenteront l'action de A sur ce même point, supposé en dehors de A : or, si nous appliquons maintenant cette force à l'aiguille même qui l'a produite, nous devrons faire abstraction du premier terme; donc, en désignant par ζ''_1, ce que devient la composante ζ'' quand on tient compte de la correction due à l'action de cette aiguille sur A, on aura

$$\zeta''_1 = \zeta'' + \frac{3pmh^2ka^3\sin\theta\cos\psi}{r^3}\Big[\Big(\frac{\cos\theta_1}{r^2_1} - \frac{\cos\theta_2}{r^2_2}\Big)\cos\theta$$
$$+ \Big(\frac{\sin\theta_1\sin\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\sin\psi_2}{r_2^2}\Big)\sin\theta\sin\psi$$
$$+ \Big(\frac{\sin\theta_1\cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\cos\psi_2}{r^2_2}\Big)\sin\theta\cos\psi\Big]$$
$$- \frac{pmh^2ka^3}{r^3}\Big(\frac{\sin\theta_1\cos\psi_1}{r^2_1} - \frac{\sin\theta_2\cos\psi_2}{r^2_2}\Big).$$

Il y faudra mettre à la place de r_1, θ_1 et ψ_1, leurs valeurs tirées des équations (10) du numéro précédent, et au lieu de r_2, θ_2 et ψ_2, ce que deviennent ces valeurs quand on y change le signe de l: en négligeant le cube de $\frac{l}{r}$, et regardant, comme dans ce numéro, l'angle i comme droit, on trouve, toute réduction faite,

$$\zeta''_1 = \zeta'' - \frac{2pmh^2ka^3l}{r^6}(3\sin^2\theta\cos\psi\sin(\delta+\psi) + \sin\delta).$$

On formerait de même la valeur corrigée de ζ'; mais on n'aura pas besoin de la connaître pour avoir celle de tang δ, si l'on néglige dans celle-ci le produit de la correction par le carré de $\frac{a^3}{r^3}$: on aura alors simplement

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\zeta''_1}{\zeta'}, \qquad (11)$$

où il suffira de mettre pour ζ' sa valeur non corrigée; ce qui donnera

$$\text{tang}\,\delta = \frac{ka^3\big[3\sin\theta\cos\theta\cos\psi + \frac{6ph^2l}{r^3}\sin^2\theta\cos\psi\sin(\delta+\psi) + \frac{2ph^2l}{r^3}\sin\delta\big]}{r^3\sin c - ka^3\big[\sin c(1-3\cos^2\theta) - 3\cos c\sin\theta\cos\theta\sin\psi\big]}.$$

On déterminera la valeur de p, relative à l'aiguille dont on fera usage, par différens moyens faciles à imaginer. Par exemple, si l'on place dans le prolongement de l'aiguille donnée, à une distance h de son milieu, et du côté de son

pôle boréal, une autre petite aiguille horizontale, dont la réaction sur la première soit insensible, et si l'on suppose la distance h assez grande par rapport à l, pour qu'on puisse négliger le cube de $\frac{l}{h}$, l'action de l'aiguille donnée sur un point quelconque de la petite aiguille sera égale à $\frac{4pml}{h}$; elle s'ajoutera à la composante horizontale $m \sin c$ de l'action de la terre : par conséquent, si l'on désigne par n le nombre d'oscillations que la petite aiguille fait en vertu de cette dernière action, et par n' le nombre qu'elle exécute en vertu des deux forces réunies, les carrés de ces nombres seront en raison directe des forces correspondantes $m \sin c$ et $m \sin c + \frac{4pml}{h}$; en sorte que l'on aura

$$n^2 \left(\sin c + \frac{4pl}{h}\right) = n'^2 \sin c; \qquad (12)$$

d'où l'on tirera la valeur de $\frac{pl}{h}$. Mais, dans les expériences qu'on pourra faire par la suite sur la déviation des aiguilles aimantées, il vaudra mieux, pour simplifier les calculs et diminuer les chances d'erreur, employer des aiguilles d'un très-petit diamètre, dont la réaction sur le corps qui les fait dévier, soit sensiblement nulle.

(32) M. Barlow, professeur à Woolwich, a publié, l'an dernier, un ouvrage sur le magnétisme (*), dans lequel on trouve les résultats d'un grand nombre d'expériences qu'il a faites sur les déviations de la boussole produites par l'influence d'une sphère pleine ou creuse, aimantée par l'action du globe terrestre. Ayant successivement soumis la même aiguille à l'action de deux sphères de dix pouces anglais de diamètre,

(*) *An Essay on magnetic attractions*, second edition; London, 1823.

formées de la même matière, l'une entièrement pleine, et l'autre creuse, et celle-ci pesant les trois quarts de la première, il a reconnu que, dans la même position, la déviation de l'aiguille était égale pour ces deux corps; il a ensuite vérifié que cette égalité, à laquelle il était loin de s'être attendu, subsistait pour des sphères pleines ou creuses de même surface, tant que l'épaisseur des sphères creuses surpassait une certaine limite qu'il a fixée à un trentième de pouce; et à cette limite il a trouvé que la déviation de l'aiguille produite par la sphère creuse de dix pouces de diamètre était réduite aux deux tiers, à peu près, de la déviation correspondante à une sphère pleine de même dimension. M. Barlow a cru pouvoir conclure de ce fait important, que le magnétisme résidait à la surface des corps aimantés, ou que, du moins, il ne pénétrait pas dans leur intérieur, au-delà de la limite que nous venons de citer. Mais cette conclusion ne résulte pas nécessairement du fait observé : elle prouve seulement que, dans la matière des sphères que M. Barlow a employées, la quantité que nous avons désignée précédemment par k, est très-peu différente de l'unité. Si elle était rigoureusement égale à un, l'action de la sphère creuse serait la même que celle de la sphère pleine, quelque petite que fût son épaisseur (n.° 25); mais, si k diffère un tant soit peu de l'unité, il y aura toujours une épaisseur assez petite pour que la déviation produite par la sphère pleine soit à la déviation due à la sphère creuse, dans tel rapport que l'on voudra. En effet, ces déviations sont à peu près entre elles comme k est à la fraction

$$\frac{(a^3-b^3)(1+k)k}{a^3(1+k)-2k^2b^3},$$

par laquelle on doit remplacer cette quantité, dans le cas de la sphère creuse dont l'épaisseur est $a-b$, et le rayon extérieur égal à a (n.° 28); or, si l'on veut, par exemple, que la déviation produite par la sphère creuse soit les deux tiers de

l'autre déviation, quand on a $a - b = \frac{a}{150}$, comme M. Barlow l'a observé, il suffira de supposer qu'on ait à peu près $k = 1 - \frac{1}{50}$. Pour cette valeur de k, les déviations produites, soit par la sphère creuse, soit par la sphère pleine, ne diffèrent l'une de l'autre que d'environ un centième, quand le volume de l'une est les trois quarts de celui de l'autre, ou quand on a $a^3 - b^3 = \frac{3}{4} a^3$, en sorte qu'on a pu croire qu'elles étaient les mêmes dans les deux cas.

Les sphères dont M. Barlow a fait usage, étaient formées d'une espèce de fer fondu, dans lequel la force coercitive avait apparemment peu d'intensité; car l'ensemble des expériences ne paraît pas indiquer que ces corps eussent acquis un degré notable de magnétisme fixe. L'aiguille de boussole qu'il a soumise à leur action, avait six pouces anglais en longueur; et quoique l'auteur ne fasse pas connaître la mesure exacte de l'intensité magnétique de ses pôles, il dit cependant que leur puissance était très-énergique. Nous ne pouvons donc pas négliger, dans le calcul des déviations de cette aiguille, les corrections dues à sa longueur et à sa réaction sur la sphère aimantée, sur-tout dans les cas où l'aiguille a été le plus rapprochée de la sphère, et où la distance de son milieu au centre de ce corps n'était que de douze pouces, c'est-à-dire, seulement quadruple de sa demi-longueur. A la vérité, M. Barlow annonce qu'ayant placé successivement dans le même point le milieu de l'aiguille de six pouces, et celui d'une petite aiguille d'un demi-pouce en longueur, il n'a pas observé de différence entre leurs déviations; ce qui ferait penser que les deux corrections dont nous parlons, dont l'une a pour effet d'augmenter la déviation, et l'autre, de la diminuer, se seraient à peu près compensées. Mais nous avons lieu de croire que

cette compensation a été très-imparfaite; car, en calculant les déviations de l'aiguille, sans avoir égard à la double correction due à sa longueur et à sa force magnétique, les différences que l'on trouve entre le calcul et l'expérience, sont trop grandes pour être attribuées en entier aux erreurs des observations.

(33) Pour en donner un exemple, prenons cette expérience de M. Barlow : le milieu de l'aiguille était placé dans le plan qui répond à $\psi = 0$, et auquel se rapporte l'équation (7) du n.° 29; on avait $\theta = 46° 38'$, le rayon a de la sphère $= 6^p,4$ (*), la distance r du milieu de l'aiguille à son centre $= 12^p$, l'angle c ou le complément de l'inclinaison magnétique $= 19° 30'$; en substituant ces valeurs dans l'équation (7), et faisant $k = 1$, ce qui est la plus grande valeur qu'on puisse supposer à cette quantité, on trouve $\delta = 32° 38'$: or M. Barlow a trouvé cette même déviation égale à $36° 15'$, l'aiguille étant placée, soit à l'est, soit à l'ouest du méridien magnétique. La différence entre ces deux valeurs de δ, qui s'élève à $3° 37'$, ne saurait être due en entier aux erreurs de l'observation. On ne peut pas non plus l'attribuer à une erreur dans l'évaluation de l'angle θ; car, cet angle étant peu différent de 45°, il faudrait le faire varier de plusieurs degrés, pour produire un seul degré de variation dans l'angle δ, qui est alors très-près de son *maximum*. Il y a donc lieu de penser qu'elle est due, en grande partie, à la longueur et à la réaction de l'aiguille, dont on n'a pas tenu compte dans le calcul; mais, pour effectuer la correction relative à la réaction de l'aiguille, il serait nécessaire de connaître la valeur de la quantité p, qui se rapporte à la boussole employée dans l'expérience,

(*) Toutes les longueurs que nous citons d'après M. Barlow, sont exprimées en pouces anglais.

laquelle quantité est comprise dans le second membre de l'équation (11), ou dans la valeur corrigée de tang δ.

Cette valeur de p ne nous étant pas donnée, on pourrait réciproquement essayer de la déduire de l'équation (11), en y mettant pour δ la déviation observée : si l'on a égard en même temps à la correction indiquée dans le n.° 30, on trouve que, pour satisfaire à cette équation, en faisant $\delta = 36° 15'$, et supposant toujours $k = 1$, $a = 6$, $r = 12$, $l = 3$, $\theta = 46° 38'$, $\psi = 0$, il faudrait qu'on eût $p = 0{,}436$, la distance arbitraire h étant quadruple de l, ou égale à un pied anglais. Pour ces valeurs de p et de h, le rapport des nombres d'oscillations n' et n du n.° 31 serait égal à 1,52 ; en sorte que l'action de la boussole devrait être telle, qu'à un pied de distance de son milieu, elle fût capable d'augmenter la vîtesse d'une petite aiguille oscillante, dans le rapport de 3 à 2 à peu près; ce qui ne serait aucunement invraisemblable. Mais, en employant d'autres expériences de M. Barlow pour déterminer cette quantité p, on trouve des valeurs très-inégales, et quelquefois doubles ou triples de la précédente; d'où l'on doit conclure que le degré d'exactitude de ces observations n'est pas assez grand, pour qu'elles puissent servir à évaluer la quantité p, non plus que la quantité qui paraît devoir être très-petite, dont la valeur de k est moindre que l'unité : on y parviendrait peut-être par la méthode des équations de conditions, en employant à-la-fois toutes ces observations; ce qui exigerait de très-longs calculs, que je n'ai pas dessein d'entreprendre.

Relativement aux expériences du même physicien, où la distance du milieu de l'aiguille au centre de la sphère a été de quinze pouces et au-delà, les déviations calculées, en faisant abstraction de la longueur et de la force de l'aiguille, et supposant $k = 1$, sont toujours plus petites que les déviations observées, et elles en diffèrent souvent d'un degré et quelques

minutes. Ces différences constamment de même signe ne sont pas dues aux erreurs des observations ; néanmoins elles ne s'observent que dans la comparaison des grandeurs absolues des déviations : les lois de variation que les déviations suivent dans le changement de position des aiguilles, s'accordent entre elles, soit qu'on les déduise de la théorie, soit qu'on les conclue de l'observation ; et en cela, les nombreuses observations de M. Barlow sont une confirmation remarquable de la théorie du magnétisme qui fait l'objet de ce Mémoire.

(34) Nous terminerons par une remarque qui ne sera pas sans utilité dans la pratique. Les formules relatives aux déviations des aiguilles horizontales et à la durée de leurs oscillations, en présence d'une sphère aimantée par l'action de la terre, renferment explicitement l'angle c qui exprime le complément de l'inclinaison magnétique, dans le lieu et à l'instant de l'observation : si donc la déviation d'une aiguille de boussole ordinaire, ou le nombre de ses oscillations dans l'unité de temps, nous était donné par l'expérience, ces formules pourraient servir réciproquement à déterminer l'angle c ; de manière que la direction de l'aiguille d'inclinaison se trouverait déduite de la seule observation de l'aiguille horizontale ; ce qui pourrait être préférable à l'observation directe de cette inclinaison.

Pour fixer les idées, supposons qu'on veuille employer à cet usage l'observation des angles de déviation horizontale. En mettant dans l'équation (6), à la place de $\cos\theta$, sa valeur, et la résolvant par rapport à $\operatorname{tang} c$, on en conclut

$$\operatorname{tang} c = \frac{\dfrac{3ka^3}{r^3}\left(\dfrac{\cos v}{\operatorname{tang}\delta} - \sin v\right)\sin u \cos u}{1 - \dfrac{ka^3}{r^3} - \dfrac{3ka^3}{r^3}\left(\dfrac{\cos v}{\operatorname{tang}\delta} - \sin v\right)\sin^2 u \sin v}$$

Lors donc que l'on connaîtra le rapport $\frac{a}{r}$ du rayon a de la sphère à la distance du milieu de l'aiguille à son centre, l'angle u que la droite qui joint ces deux points fait avec la verticale, l'angle v compris entre la projection horizontale de cette ligne et la perpendiculaire à la direction naturelle de la boussole horizontale, l'angle δ compris entre cette direction naturelle et la direction déviée par l'action de la sphère, et enfin la quantité k relative à la matière de la sphère, cette formule donnera immédiatement l'angle c. Il faudra que la sphère soit en fer forgé, afin que la force coërcitive soit nulle, comme le suppose cette formule. On placera le milieu de l'aiguille horizontale aussi près que l'on pourra du plan vertical, mené par le centre de cette sphère, et de manière que l'angle u diffère peu de 45° : ce sera la position dans laquelle une erreur sur la mesure des angles u et v aura le moins d'influence sur la valeur calculée de l'angle c. L'aiguille horizontale devra être d'un très-petit diamètre, afin qu'elle ne réagisse pas sensiblement sur la sphère qui la fait dévier. Quant à sa longueur, on aura facilement égard à la correction à laquelle elle donne lieu, en mettant, dans la formule précédente, à la place de tang δ, la tangente de l'angle δ observé, divisée par $1 - \Delta$. Il est vrai que la valeur de Δ, donnée dans le n.° 30, contient implicitement l'angle c qu'on veut déterminer; mais il suffira d'avoir une valeur approchée de cet angle, pour calculer celle de la quantité Δ.

La formule précédente sera sur-tout très-utile pour faire découvrir les variations diurnes de l'aiguille d'inclinaison, s'il en existe. En effet, supposons que l'on ait observé à deux instans différens la déviation de l'aiguille horizontale, produite par la même sphère, et dans la même position de l'aiguille; soient δ la déviation au premier instant, et δ' sa valeur observée à la seconde époque; appelons c et c' les complémens de

l'inclinaison magnétique aux mêmes instans ; représentons par $\nu - \alpha$ et $\nu + \alpha$, les valeurs correspondantes de l'angle que nous avons désigné plus haut par ν, en sorte que 2α soit la quantité dont la direction naturelle de la boussole horizontale s'est rapprochée de l'est, dans l'intervalle de la première à la seconde observation; les autres quantités k, a, r, u, contenues dans l'équation précédente, n'auront pas varié : si donc on forme d'après cette équation les valeurs de $\operatorname{tang} c$ et $\operatorname{tang} c'$, et qu'on en prenne ensuite le rapport, on aura

$$\frac{\operatorname{tang} c'}{\operatorname{tang} c} = \left(\frac{\cos(\nu+\alpha) - \sin(\nu+\alpha)\operatorname{tang}\delta'}{\cos(\nu-\alpha) - \sin(\nu-\alpha)\operatorname{tang}\delta} \right) P,$$

en faisant, pour abréger,

$$P = \frac{\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\operatorname{tang}\delta - \frac{3ka^3}{r^3}[\cos(\nu-\alpha) - \sin(\nu-\alpha)\operatorname{tang}\delta]\sin^2 u \sin(\nu-\alpha)}{\left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right)\operatorname{tang}\delta' - \frac{3ka^3}{r^3}[\cos(\nu+\alpha) - \sin(\nu+\alpha)\operatorname{tang}\delta']\sin^2 u \sin(\nu+\alpha)}.$$

Vu la petitesse de l'angle α, cette formule se réduira à

$$\frac{\operatorname{tang} c'}{\operatorname{tang} c} = \frac{[\cos(\nu+\alpha) - \sin(\nu+\alpha)\operatorname{tang}\delta']\operatorname{tang}\delta}{[\cos(\nu-\alpha) - \sin(\nu-\alpha)\operatorname{tang}\delta]\operatorname{tang}\delta'},$$

quand on aura eu soin de prendre l'angle ν aussi très-petit, et que la distance r sera assez grande par rapport à a pour qu'on puisse négliger les produits $\frac{a^3}{r^3}\sin(\nu-\alpha)$ et $\frac{a^3}{r^3}\sin(\nu+\alpha)$. Elle aura alors l'avantage d'être indépendante de la quantité k et de la grandeur du rayon a de la sphère; mais, pour plus d'exactitude, il faudra toujours faire subir aux quantités $\operatorname{tang}\delta$ et $\operatorname{tang}\delta'$ la correction relative à la longueur de l'aiguille, qui consistera à diviser chacune de ces tangentes par la valeur correspondante de $1 - \Delta$, comme nous l'avons dit plus haut.

MÉMOIRE

SUR

LA DIFFRACTION DE LA LUMIÈRE;

PAR M. A. FRESNEL.*

INTRODUCTION.

AVANT de m'occuper spécialement des phénomènes nombreux et variés compris sous la dénomination commune de *diffraction*, je crois devoir présenter quelques considérations générales sur les deux systèmes qui ont partagé jusqu'à présent les savans relativement à la nature de la lumière. Newton a supposé que les molécules lumineuses lancées des corps qui nous éclairent arrivent directement jusqu'à nos yeux, où elles produisent par leur choc la sensation de la vision. Descartes, Hook, Huygens, Euler, ont pensé que

* En publiant ce Mémoire, qui a été couronné par l'Académie en 1819, on a fait quelques changemens à la rédaction du manuscrit déposé à l'Institut le 29 juillet 1818, mais sans apporter aucune modification à la théorie et aux expériences qu'il contient. Desirant y ajouter quelques expériences nouvelles et quelques développemens théoriques, on les a placés dans des notes à la suite du Mémoire.

la lumière résultait des vibrations d'un fluide universel extrêmement subtil, agité par les mouvemens rapides des particules des corps lumineux, de la même façon que l'air est ébranlé par les vibrations des corps sonores; en sorte que, dans ce système, ce ne sont plus les molécules du fluide en contact avec les corps lumineux qui parviennent à l'organe de la vue, mais seulement le mouvement qui leur a été imprimé.

La première hypothèse a l'avantage de conduire à des conséquences plus évidentes, parce que l'analyse mécanique s'y applique plus aisément : la seconde, au contraire, présente sous ce rapport de grandes difficultés. Mais, dans le choix d'un système, on ne doit avoir égard qu'à la simplicité des hypothèses; celle des calculs ne peut être d'aucun poids dans la balance des probabilités. La nature ne s'est pas embarrassée des difficultés d'analyse; elle n'a évité que la complication des moyens. Elle paraît s'être proposé de faire beaucoup avec peu : c'est un principe que le perfectionnement des sciences physiques appuie sans cesse de preuves nouvelles (1). L'astronomie, l'honneur de l'esprit humain, en présente sur-tout une confirmation frappante; toutes les lois de Kepler ont été ramenées par le génie de Newton à la seule loi de la gravitation, qui a servi ensuite à expliquer et même à découvrir les perturbations les plus compliquées et les moins apparentes des mouvemens planétaires.

Si l'on s'est quelquefois égaré en voulant simplifier les élémens d'une science, c'est qu'on a établi des systèmes avant d'avoir rassemblé un assez grand nombre de faits. Telle

(1) Si la chimie, dans ses progrès, paraît faire une exception à cet égard, cela tient sans doute à ce qu'elle est encore peu avancée, malgré les pas rapides qu'elle a faits depuis trente ans. Mais on peut déjà remarquer que les proportions des nombreuses combinaisons qu'elle présente, qui avaient paru d'abord soumises chacune à des lois particulières, sont embrassées maintenant dans des règles générales d'une grande simplicité.

hypothèse très-simple quand on ne considère qu'une classe de phénomènes, nécessite beaucoup d'autres hypothèses lorsqu'on veut sortir du cercle étroit dans lequel on s'était d'abord renfermé. Si la nature s'est proposé de produire le *maximum* d'effets avec le *minimum* de causes, c'est dans l'ensemble de ses lois qu'elle a dû résoudre ce grand problème.

Il est sans doute bien difficile de découvrir les bases de cette admirable économie, c'est-à-dire, les causes les plus simples des phénomènes envisagés sous un point de vue aussi étendu. Mais, si ce principe général de la philosophie des sciences physiques ne conduit pas immédiatement à la connaissance de la vérité, il peut néanmoins diriger les efforts de l'esprit humain, en l'éloignant des systèmes qui rapportent les phénomènes à un trop grand nombre de causes différentes, et en lui faisant adopter de préférence ceux qui, appuyés sur le plus petit nombre d'hypothèses, sont les plus féconds en conséquences.

Sous ce rapport, le système qui fait consister la lumière dans les vibrations d'un fluide universel, a de grands avantages sur celui de l'émission. Il permet de concevoir comment la lumière est susceptible de recevoir tant de modifications diverses. Je n'entends pas ici celles qu'elle éprouve momentanément dans les corps qu'elle traverse et qu'on peut toujours rapporter à la nature de ces milieux; mais je veux parler de ces modifications permanentes qu'elle emporte avec elle et qui lui impriment des caractères nouveaux. On conçoit qu'un fluide, assemblage d'une infinité de molécules mobiles soumises à une dépendance mutuelle, est susceptible d'un grand nombre de modifications différentes, en raison des mouvemens relatifs qui leur sont imprimés. Les vibrations de l'air et la variété des sensations qu'elles produisent sur l'organe de l'ouïe, en offrent un exemple remarquable.

Dans le système de l'émission, au contraire, la marche

de chaque molécule lumineuse étant indépendante de celle des autres, le nombre des modifications diverses dont elles sont susceptibles paraît extrêmement borné. On peut ajouter un mouvement de rotation à celui de transmission; mais voilà tout. Quant aux mouvemens oscillatoires, leur existence n'est concevable que dans des milieux qui les entretiendraient par une action inégale de leurs parties sur les divers côtés des molécules lumineuses, supposés doués de propriétés différentes. Dès que cette action cesse, les oscillations doivent cesser aussi ou se transformer en mouvemens de rotation. Ainsi le mouvement de rotation et la diversité des faces d'une même molécule lumineuse sont les seules ressources mécaniques de la théorie de l'émission pour représenter toutes les modifications permanentes de la lumière (1). Elles paraîtront bien insuffisantes, si l'on fait attention à la multitude de phénomènes qu'offre l'optique. On s'en convaincra davantage en lisant le *Traité de physique expérimentale et mathématique* de M. Biot, dans lequel sont développées avec beaucoup de détail et de clarté les principales conséquences du système de Newton. On y verra que, pour rendre compte des phénomènes, il faut accumuler sur chaque particule lumineuse un grand nombre de modifications diverses, souvent très-difficiles à concilier entre elles.

Suivant le système des ondulations, la variété infinie des rayons de diverses couleurs qui composent la lumière blanche, provient tout simplement de la différence de longueur des ondes lumineuses, comme les divers tons musicaux, de celle des ondes sonores. Dans la théorie newtonienne, on ne peut

(1) A moins qu'on ne suppose les molécules lumineuses susceptibles d'une sorte d'aimantation ou de modification interne résultant de la décomposition ou distribution inégale d'un fluide plus subtil renfermé dans chacune d'elles. Mais ce serait, à notre avis, abuser de l'analogie, que de supposer des phénomènes aussi compliqués dans les dernières molécules du fluide le plus subtil que l'on connaisse.

attribuer cette diversité de couleurs ou de sensations produites sur l'organe de la vue à des différences de masse ou de vitesse initiale des molécules lumineuses; car il en résulterait que la dispersion devrait toujours être proportionnelle à la réfraction; et l'expérience prouve le contraire. Alors il faut *nécessairement* admettre que les molécules des rayons diversement colorés ne sont pas de même nature. Voilà donc autant de molécules lumineuses différentes qu'il y a de couleurs, de nuances diverses, dans le spectre solaire (1).

Après avoir expliqué la réflexion et la réfraction par l'action de forces répulsives et attractives émanant de la surface des corps, Newton, pour concevoir le phénomène des anneaux colorés, imagina, dans les molécules lumineuses, des accès

(1) Les géomètres, dans leurs recherches sur les vibrations des fluides élastiques, ont été conduits à cette conséquence, que les ondulations de diverses longueurs se propagent avec la même vitesse. Mais, en admettant ce résultat pour un fluide homogène, on ne doit pas en conclure que la même chose ait lieu lorsque ce fluide est interposé entre les particules d'un corps beaucoup plus dense et d'une élasticité toute différente. Il est très-possible que le retard apporté par ces obstacles dans la marche des ondes lumineuses varie avec leurs longueurs, comme avec la forme, la masse et les intervalles des particules du milieu. Et si la dispersion, le phénomène le plus irrégulier de l'optique, n'a point encore été expliquée dans la théorie des vibrations, on ne peut pas dire cependant qu'elle est en contradiction avec ce système. La théorie newtonienne n'en fait pas mieux connaître les lois; elle suppose que les attractions que les corps exercent sur la lumière varient avec leur nature et suivant des rapports différens pour les diverses espèces de molécules lumineuses : mais peut-on appeler explication ce qui ne simplifie en rien la science et remplace les faits par un nombre égal d'hypothèses particulières!

Note. Depuis la rédaction de ce Mémoire, j'ai remarqué que, dans le cas même où l'on pourrait considérer le milieu vibrant comme homogène, pour simplifier l'hypothèse qui sert de base aux calculs, le résultat obtenu par les géomètres ne serait exact qu'autant que la sphère d'action réciproque des molécules du fluide élastique serait très-petite relativement à la longueur d'une ondulation. Dès que l'étendue de cette sphère d'activité n'est plus négligeable vis-à-vis la longueur d'ondulation, il n'est plus vrai de dire que les ondes de différentes longueurs ou largeurs se propagent avec la même vitesse. J'ai montré par un raisonnement très-simple, dans mon Mémoire sur la double réfraction, qu'alors les ondes étroites doivent se propager un peu moins vite que les ondes plus larges, conformément à ce qu'on observe dans le phénomène de la dispersion, considéré sous le point de vue de la théorie des ondes.

de facile réflexion et de facile transmission, revenant périodiquement à des intervalles égaux. Il était naturel de supposer que ces intervalles, comme la vîtesse de la lumière, étaient toujours les mêmes dans les mêmes milieux, et que, par conséquent, sous des incidences plus obliques, le diamètre des anneaux devait diminuer, le chemin parcouru ayant augmenté. L'expérience apprend au contraire que le diamètre des anneaux augmente avec l'obliquité de l'incidence, et Newton fut obligé d'en conclure que les accès augmentaient alors de longueur, et dans un bien plus grand rapport que les chemins parcourus. Il devait s'attendre aussi à trouver les accès plus longs dans les milieux que la lumière traverse avec le plus de vîtesse, qui, selon lui, sont les corps les plus denses; car il était naturel de supposer que leurs durées restaient isochrones dans les différens milieux. L'expérience lui prouva le contraire : il reconnut que l'épaisseur des lames d'air et d'eau, par exemple, qui réfléchissent la même teinte sous l'incidence perpendiculaire, est exactement dans le rapport du sinus d'incidence au sinus de réfraction, pour le passage de la lumière de l'air dans l'eau ; ce qui est précisément une des confirmations les plus frappantes de la théorie des ondulations. Il lui fallut donc supposer que la longueur des accès était en raison inverse de la vîtesse de la lumière, ou, ce qui revient au même, que le temps de leur durée diminuait suivant le même rapport que le carré de sa vîtesse augmentait.

Ainsi le système de l'émission suffit si peu à l'explication des phénomènes, que chaque phénomène nouveau nécessite une nouvelle hypothèse.

Si l'hypothèse des accès est déjà improbable par sa complication, elle le paraît bien davantage encore, lorsqu'on la suit dans ses conséquences.

Il faut d'abord remarquer qu'elle n'était pas seulement nécessaire à l'intelligence du phénomène des anneaux colorés,

dans le système de l'émission, mais qu'elle était encore indispensable pour expliquer comment une partie des molécules lumineuses qui arrivent à la surface d'un corps transparent, pénètre dans son intérieur, tandis que les autres sont repoussées et réfléchies. Comme les circonstances sont semblables et constantes de la part du milieu réfringent, il est clair qu'elles doivent être variables et différentes dans les molécules lumineuses, ou, en d'autres termes, que celles-ci doivent apporter avec elles certaines dispositions physiques en vertu desquelles elles sont tantôt attirées et tantôt repoussées par le même corps. La réflexion partielle de la lumière qui a déjà traversé une plaque diaphane, sur la surface d'une seconde plaque de même nature et semblablement inclinée, démontre que ces dispositions physiques ne restent pas constantes, mais varient dans la même molécule lumineuse ; et les belles observations de Newton sur les anneaux colorés font connaître la périodicité de leurs variations. Il devient facile alors, à l'aide de ces hypothèses, d'expliquer pourquoi une partie des molécules lumineuses est réfléchie à la surface d'un corps transparent, tandis que les autres sont transmises ; c'est que les premières se trouvent, à leur arrivée, dans un accès de facile réflexion, tandis que les autres sont dans un accès de facile transmission. Mais, en arrivant à la surface, toutes les molécules transmises ne sont pas au milieu ou au *maximum* de l'accès de facile transmission, comme toutes les molécules réfléchies ne sont pas au *maximum* de leur accès de facile réflexion. En raison de la multitude des chances, elles doivent se trouver à tous les différens degrés de ces deux sortes d'accès ; et le nombre des molécules lumineuses qui, en cet instant, sont à un même période de l'accès de facile transmission, est beaucoup moindre nécessairement que celui des molécules lumineuses qui se trouvent à des périodes différens. Mais cette différence de leurs dispositions physiques, au moment où elles

sont réfractées, doit en apporter une dans l'intensité de la force attractive; car on a supposé que ces dispositions périodiques modifiaient l'action exercée par le corps réfringent, au point de changer souvent l'attraction en répulsion. Or, quelle que soit la fonction qui représente les modifications qu'éprouve l'action du milieu réfringent en raison des variations des dispositions physiques des molécules lumineuses, il est clair qu'elle ne peut point passer ainsi du positif au négatif, sans passer par zéro et tous les autres degrés intermédiaires. On ne peut donc supposer que toutes les molécules transmises soient attirées avec la même énergie; il faut admettre au contraire que cette énergie varie beaucoup en raison de la diversité de leurs dispositions physiques, et que le nombre des molécules pour lesquelles la force accélératrice se trouve sensiblement la même, est beaucoup moindre que le nombre de celles pour lesquelles elle est différente. Ainsi, puisque c'est l'intensité de la force attractive qui détermine la direction des rayons réfractés, ils devraient affecter des directions diverses: ce qui contredirait l'expérience; car on sait que, lorsque le milieu réfringent est bien diaphane, et sa surface parfaitement polie, il y a très-peu de lumière diffuse, c'est-à-dire, irrégulièrement réfractée, et que presque tous les rayons de même nature éprouvent exactement le même degré d'inflexion. Il me paraît donc très-difficile de concilier la régularité de la réfraction avec ces dispositions variables et périodiques des molécules lumineuses, qui, d'un autre côté, sont indispensables, dans le système de l'émission, pour expliquer comment une partie de la lumière incidente est réfléchie par un corps transparent, tandis que l'autre est transmise.

Non-seulement l'hypothèse des accès est improbable par sa complication, et difficile à concilier avec les faits dans ses conséquences, mais elle ne suffit pas même à l'explication du phénomène des anneaux colorés, pour lequel elle a été imaginée. Elle fait bien voir comment l'intensité de la lumière

réfléchie sur la seconde surface de la lame d'air dépend du chemin parcouru dans cette lame; mais elle n'explique pas les variations de la réflexion produite par la première surface : or l'expérience démontre que les parties obscures des anneaux ne résultent pas seulement de l'affaiblissement de la seconde réflexion, mais encore de celui de la première. Pour s'en convaincre, il suffit de placer un prisme sur une glace dont la surface inférieure a été noircie, de sorte que l'œil ne reçoive de lumière sensible que celle qui est réfléchie par les deux surfaces de la lame d'air comprise entre ces deux verres. Si on les dispose de façon que le prisme dépasse la glace, et que le point de contact se trouve vers l'extrémité de celle-ci, on pourra alors comparer aisément les anneaux obscurs à la partie de la base du prisme qui dépasse la glace, et n'envoie à l'œil que le produit d'une seule réflexion : or l'on verra, en se servant de lumière homogène, que cette partie du prisme est beaucoup plus éclairée que les anneaux obscurs, qui ne peuvent plus ainsi être considérés comme résultant seulement de la suppression de la réflexion inférieure, mais encore d'une diminution considérable de la réflexion supérieure, particulièrement dans les points les plus sombres du premier et du second anneau, où toute réflexion paraît éteinte, lorsque les verres sont bien polis, et que la lumière incidente est suffisamment simplifiée. Il est évident que, s'il n'en est pas de même des autres anneaux, cela tient uniquement au défaut d'homogénéité de la lumière. Mais, si l'on ne parvient pas à y produire un noir complet, on peut aisément, jusqu'au sixième ordre même, les rendre assez obscurs pour mettre en évidence l'affaiblissement de la réflexion supérieure.

Ce phénomène me paraît difficile à expliquer dans la théorie newtonienne. Dira-t-on que les molécules lumineuses, en arrivant à la surface du prisme, se trouvent attirées par la glace? On pourrait admettre à la rigueur cette hypothèse pour

la tache noire centrale, où le contact des deux verres est très-intime : mais il n'en est pas de même pour les anneaux obscurs qui l'entourent. Outre qu'il n'est pas probable que l'attraction des corps sur les molécules lumineuses s'exerce à des distances aussi sensibles, comment concevoir que le même verre qui les attire à une distance deux, les repousse à une distance trois, les attire à une distance quatre, et ainsi de suite!

Il est bien plus naturel de supposer que ce phénomène résulte de l'influence que la lumière réfléchie à la seconde surface de la lame d'air exerce sur celle qui l'a été à la première, et que cette influence varie avec la différence des chemins parcourus. Ainsi les anneaux colorés conduisent au principe de l'influence mutuelle des rayons lumineux, comme les phénomènes de la diffraction, quoiqu'ils ne le démontrent pas avec la même évidence.

Dans la théorie des ondulations, ce principe est une conséquence de l'hypothèse fondamentale. On conçoit, en effet que, lorsque deux systèmes d'ondes lumineuses tendent à produire des mouvemens absolument opposés au même point de l'espace, ils doivent s'affaiblir mutuellement, et même se détruire complétement, si les deux impulsions sont égales, et que les oscillations doivent s'ajouter, au contraire, lorsqu'elles s'exécutent dans le même sens. L'intensité de la lumière dépendra donc des positions respectives des deux systèmes d'ondes, ou, ce qui revient au même, de la différence des chemins parcourus, quand ils émanent d'une source commune (1). Dans le

(1) A l'aide du principe des interférences, on explique aisément la loi des anneaux colorés, lorsque l'incidence est perpendiculaire; et, sans supposer que l'obliquité de la lame d'air apporte aucun changement dans la longueur des ondes lumineuses qui la traversent, on voit pourquoi le diamètre des anneaux augmente avec l'angle d'incidence. Ce principe conduit à une formule très-simple, qui représente fort bien le phénomène, excepté pour les grandes obliquités; du moins, dans ce cas, les résultats qu'elle donne diffèrent sensiblement des observations de Newton. Mais il est très-possible que cette différence entre la

cas contraire, les perturbations qu'éprouvent nécessairement les vibrations des deux points éclairans, et qui doivent se succéder avec une grande rapidité, n'ont plus lieu simultanément et de la même manière, puisqu'ils sont indépendans; en conséquence, les effets de l'influence des deux systèmes d'ondes qu'ils engendrent variant à chaque instant, l'œil ne peut plus les apercevoir (1).

Dans l'hypothèse de l'émission, on ne peut pas admettre d'influence mutuelle entre les molécules lumineuses; car leur indépendance est indispensable pour expliquer la régularité de leur marche : mais il semble qu'on pourrait se rendre compte des mêmes phénomènes, d'une manière analogue, en supposant que les vibrations du nerf optique, occasionnées par les chocs des molécules lumineuses sur la rétine, varient d'intensité, selon la manière dont ils se succèdent (2). On conçoit en effet que, lorsque deux molécules viennent frapper successivement le même point de la rétine, l'intensité de l'ébranlement qui en résulte, doit dépendre du rapport de la durée d'une vibration du nerf optique à l'intervalle de temps qui s'est écoulé entre les deux chocs; car le second peut affaiblir aussi bien qu'augmenter les vibrations produites par le premier, selon qu'il conspire avec elles, ou qu'il les contrarie. Mais cette hypothèse ne suffit pas; il faut encore admettre que les molécules lumineuses qui sont situées sur une même surface sphérique, ayant pour centre le point radieux, sont toutes parties en même temps de cette source commune, et que les

---

théorie et l'expérience tienne à des modifications qu'éprouve la loi ordinaire de la réfraction, lorsque les rayons passent très-obliquement entre deux verres aussi rapprochés que ceux qui réfléchissent les anneaux colorés.

(1) On trouvera une explication plus détaillée de la théorie élémentaire du phénomène des interférences dans l'article *sur la lumière* du Supplément à la traduction française de la 5.e édition de la *Chimie* de Thomson par Riffault.

(2) Cette explication des phénomènes d'interférence, adaptée au système de l'émission, est due à M. Young.

diverses rangées qui se succèdent, sont lancées périodiquement à des intervalles égaux, comme si leur émission résultait de ses vibrations. Dans le système des ondulations, on ne peut aussi concevoir d'effets sensibles produits par l'influence mutuelle des rayons lumineux, qu'autant qu'ils partent d'une source commune; mais alors le départ simultané des rayons est une conséquence immédiate du système adopté, tandis qu'il exige une nouvelle hypothèse dans la théorie de l'émission. Dans celle des ondulations, la couleur des rayons lumineux, ou la sensation qu'ils produisent sur l'œil, dépendant de la durée des oscillations, ou de la longueur des ondes, il est évident que l'intervalle d'accord et de discordance entre ces vibrations, qui détermine les épaisseurs de la lame d'air aux points où se peignent les anneaux obscurs et brillans, doit varier avec l'espèce de lumière qu'on emploie. Dans le système de l'émission, où la diversité de couleur résulte de la différence de nature des molécules lumineuses, il faut supposer que les intervalles de départ des molécules lumineuses qui s'échappent d'une particule éclairante, ou, si l'on aime mieux, les vibrations de cette particule, varient avec la nature des molécules lumineuses qu'elle envoie, et qu'elles sont toujours les mêmes pour les molécules de même espèce. Cette dernière hypothèse paraît tout-à-fait gratuite, tant il est difficile d'en concevoir la raison. Cependant il serait indispensable de l'ajouter au système de l'émission, pour y introduire le principe si fécond des interférences.

La multiplicité et la complication des hypothèses n'est pas le seul défaut du système de l'émission. En admettant même toutes celles que je viens d'énoncer, je ferai voir, dans la suite de ce Mémoire, qu'on ne parviendrait pas à l'explication complète des phénomènes, et que la seule théorie des ondulations peut rendre compte de tous ceux que présente la diffraction de la lumière.

DIFFRACTION DE LA LUMIÈRE.

SECTION I.re

DANS le système de l'émission, il semble que rien ne devrait être plus simple que le phénomène des ombres portées, sur-tout quand l'objet éclairant est réduit à un point lumineux; et cependant rien n'est plus compliqué. En supposant que la surface des corps possède une propriété répulsive capable de changer la direction des rayons lumineux qui en passent très-près, on doit s'attendre seulement à voir les ombres augmenter de largeur et se fondre un peu vers leur contour avec la partie éclairée. Cependant elles sont bordées de trois franges colorées très-distinctes, quand on se sert de lumière blanche, et d'un bien plus grand nombre encore de bandes obscures et brillantes, lorsque la lumière qu'on emploie est sensiblement homogène. Nous appellerons ces franges, *extérieures*, et nous donnerons le nom de *franges intérieures* à celles qu'on aperçoit au milieu des ombres étroites.

En adoptant la théorie newtonienne, la première idée qui se présente, c'est que les franges extérieures sont produites par une force alternativement attractive et répulsive, qui émane de la surface du corps. Je vais d'abord suivre cette hypothèse dans ses conséquences, et montrer qu'elle ne peut pas s'accorder avec l'expérience; mais auparavant je dois faire connaître le moyen d'observation que j'ai employé.

On sait que l'effet d'une loupe placée devant l'œil est de peindre fidèlement sur la rétine l'objet ou l'image qui se trouve à son foyer, du moins toutes les fois que la totalité des rayons qui composent l'image, vient tomber sur la surface de la loupe. On peut donc, au lieu de recevoir les franges sur un carton

blanc ou un verre dépoli, les observer directement avec une loupe, et on les verra telles qu'elles sont à son foyer. Il suffit de la tourner vers le point lumineux, en la plaçant entre son œil et le corps opaque, de manière que le point de réunion des rayons réfractés tombe au milieu de la pupille ; ce qu'on reconnaît à l'illumination totale de la surface de la loupe. Ce procédé, très-préférable aux deux autres, en ce qu'il permet d'étudier commodément les phénomènes de la diffraction, même dans une lumière très-affaiblie, a encore l'avantage de donner le moyen de suivre les franges extérieures presque jusqu'à leur naissance. Avec une lentille de deux millimètres de foyer, et dans une lumière sensiblement homogène, en observant ces franges très-près de leur origine, mais de manière à pouvoir distinguer encore la bande obscure du cinquième ordre, l'intervalle qui la séparait du bord de l'ombre, que je comparais aux divisions d'un micromètre, me paraissait plus petit qu'un centième de millimètre et demi, et je voyais les trois premières franges comprises dans un espace qui n'excédait pas un centième de millimètre : en se servant d'une lentille plus convexe, on le diminuerait sans doute encore davantage. Ainsi l'on peut regarder les bandes obscures et brillantes comme partant du bord même du corps opaque, quand on ne pousse l'exactitude des mesures que jusqu'aux centièmes de millimètre, exactitude suffisante, et qu'on ne peut pas même dépasser, dès que les franges sont un peu larges, comme celles qu'on observe le plus ordinairement.

Cela posé, lorsqu'en mesurant les franges extérieures à la même distance de l'écran on le rapproche du point lumineux, on les voit s'élargir beaucoup. Cependant l'angle que font les rayons incidens qui passent par leur origine avec la tangente menée du point lumineux au bord de l'écran, doit être presque nul, puisqu'à leur naissance elles n'en sont pas éloignées de plus d'un centième de millimètre, et ses varia-

tions ne peuvent, en conséquence, avoir aucune influence sensible sur la largeur des franges : il faudrait donc admettre, pour expliquer cette dilatation, que la force répulsive augmente à mesure que le corps opaque se rapproche du point lumineux ; ce qui serait inconcevable, puisque l'intensité de cette force ne doit dépendre évidemment que de la distance à laquelle la molécule lumineuse passe du corps opaque, de l'étendue et de la forme de la surface de ce corps, de sa densité, de sa masse ou de sa nature, et que, par hypothèse, toutes ces choses restent constantes.

Mais, en supposant même que les origines des bandes obscures et brillantes soient beaucoup plus éloignées des bords de l'écran, ce qui paraîtrait expliquer l'accroissement de leur divergence, à mesure qu'il se rapproche du point lumineux, il est impossible d'accorder les résultats de l'expérience avec la formule déduite de l'hypothèse que nous discutons.

Le tableau suivant présente les intervalles entre le point le plus sombre de la bande obscure du quatrième ordre, et le bord de l'ombre géométrique (1), pour différentes distances du corps opaque au point lumineux. Ces mesures ont été prises avec un micromètre composé d'une lentille portant à son foyer un fil de soie, et d'une vis micrométrique qui la fait marcher. A l'aide d'un cadran divisé en cent parties, que parcourt une aiguille fixée à la vis, on peut évaluer le déplacement du fil de soie à un centième de millimètre près.

Ces expériences ont été faites dans une lumière rouge, sensiblement homogène, obtenue au moyen d'un verre coloré, qui a la propriété de ne laisser passer que les rayons rouges et une petite partie des rayons orangés. On aurait pu obtenir

(1) J'appelle *ombre géométrique* l'espace compris entre les lignes droites menées par le point lumineux tangentiellement aux bords de l'écran ; ce serait l'ombre qu'il projetterait, si la lumière n'éprouvait aucune inflexion.

une lumière plus homogène avec un prisme; mais on n'aurait pas été aussi sûr de son identité dans les diverses observations, condition la plus essentielle à remplir.

NUMÉROS des observations.	DISTANCE du point lumineux au corps opaque.	DISTANCE du corps opaque au micromètre.	INTERVALLE compris entre le bord de l'ombre géométrique et le milieu de la bande obscure du quatrième ordre.
	m.	m.	mm.
1.	0,1000.	0,7985.	5,96.
2.	0,510.	1,005.	3,84.
3.	1,011.	0,996.	3,12.
4.	2,008.	0,999.	2,71.
5.	3,018.	1,003.	2,56.
6.	4,507.	1,018.	2,49.
7.	6,007.	0,999.	2,40.

En représentant par a et b les distances respectives du corps opaque au point lumineux et au micromètre, par d la distance du bord de ce corps à l'origine de la bande obscure du quatrième ordre, et par r la tangente du petit angle d'inflexion résultant de l'action de la force répulsive, on a pour l'expression de l'intervalle compris entre le bord de l'ombre géométrique et le point le plus sombre de la bande obscure, $br + \frac{d(a+b)}{a}$. Or, r et d restant toujours les mêmes, quelles que soient les distances respectives du point lumineux, du corps opaque et du micromètre, deux observations suffisent pour déterminer leur valeur. En combinant la première et la

dernière, on trouve $d = 0^{mm},5079$ et $r = 1,8164$; ainsi il faudrait supposer qu'à son origine la bande obscure du quatrième ordre est éloignée d'un demi-millimètre du bord du corps opaque. En substituant ces valeurs dans la formule, et l'appliquant aux observations intermédiaires, on obtient les nombres suivans, dont plusieurs diffèrent beaucoup, comme on voit, des résultats de l'expérience.

NUMÉROS des observations.	DISTANCE du point lumineux au corps opaque.	DISTANCE du corps opaque au micromètre.	INTERVALLE compris entre le bord de l'ombre géométrique et le point le plus sombre de la quatrième bande, d'après l'observation.	d'après la formule $br + \frac{r(a+b)}{a}$	DIFFÉRENCES.
1.	m. 0,1000.	m. 0,7985.	mm. 5,96.		
2.	0,510.	1,005.	3,84.	mm. 3,32.	mm. — 0,52.
3.	1,011.	0,996.	3,12.	2,81.	— 0,31.
4.	2,008.	0,999.	[illegible]	[illegible]	— 0,14.
5.	3,018.	1,003.	[illegible]	2,49.	— 0,07.
6.	4,507.	1,018.	2,49.	2,46.	— 0,03.
7.	6,007.	0,999.	2,40.		

En attribuant la formation des franges à des dilatations et condensations alternatives des rayons qui passent dans le voisinage du corps opaque, on est encore conduit à une autre conséquence contraire aux faits; c'est que les centres des bandes obscures et brillantes devraient se propager suivant des lignes

droites, qui seraient les axes des faisceaux dilatés ou condensés. Or l'expérience démontre que leurs trajectoires sont des hyperboles dont la courbure devient très-sensible pour les franges extérieures, dès que le corps qui porte ombre est suffisamment éloigné du point lumineux.

L'écran étant à 3m,018 du point lumineux, j'ai mesuré successivement l'écartement du point le plus sombre de la bande obscure du troisième ordre, d'abord à 0m,0017 de l'écran, ensuite à 1m,003, enfin à 3m,995, et j'ai trouvé pour sa distance au bord de l'ombre géométrique : 1.° 0mm,08; 2.° 2mm,20; 3.° 5mm,83. Si l'on joint par une ligne droite les deux points extrêmes, on trouvera, pour l'ordonnée qui répond au point intermédiaire, 1mm,52, au lieu de 2mm,20, et la différence est de 0mm,68, c'est-à-dire, une fois et demie environ l'intervalle compris entre les milieux des bandes du troisième ordre et du second; car cet intervalle à 1m,003 du corps opaque n'était que de 0mm,42 : ainsi il est bien évident que la différence de 0mm,68 ne peut pas être attribuée à une inexactitude résultant du vague des franges dans cette observation. On ne pourrait pas l'expliquer davantage en supposant une inexactitude dans l'observation faite à 3m,995 du corps opaque. A la vérité, les franges étant plus larges, les mesures ont dû avoir moins de précision; mais d'abord, en les prenant plusieurs fois, je n'ai remarqué que des variations de trois ou quatre centièmes de millimètre au plus. D'ailleurs, en supposant même qu'il y eût une erreur d'un demi-millimètre sur cette mesure, il n'en résulterait qu'une différence de 0mm,13, à la distance de 1m,003; ainsi cette expérience démontre complétement que les franges extérieures suivent des lignes courbes, dont la convexité est tournée en dehors.

Le tableau suivant présente ces trajectoires rapportées à leurs cordes pour différentes séries d'observations dans chacune desquelles la distance du corps opaque au point lumi-

nous restait constante. J'ai supposé d'abord pour la quatrième série, que la corde joignait les deux observations extrêmes, et je l'ai fait partir ensuite du bord même du corps opaque, dont les franges s'écartent fort peu à leur origine, comme on l'a vu précédemment. Dans les autres séries, la corde joint aussi le bord du corps opaque, et le point qui en est le plus éloigné.

DISTANCE du point lumineux au corps opaque, ou valeur de a.	DISTANCE du corps opaque au micromètre, ou valeur de b.	ORDONNÉES DES TRAJECTOIRES des bandes obscures rapportées à leurs cordes.				
		1.er ordre.	2.e ordre.	3.e ordre.	4.e ordre.	5.e ordre.
		1.re SÉRIE.				
m.	m.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
0,510.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0,110.	0,19.	0,29.	0,35.	0,40.	0,44.
	0,501.	[illegible]	0,18.	0,25.	0,30.	0,34.
	1,005.	0.	0.	0.	0.	0.
		2.e SÉRIE.				
1,011.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0,116.	0,23.	0,35.	0,44.	0,49.	0,55.
	0,502.	0,27.	0,40.	0,51.	0,57.	0,63.
	0,996.	0,21.	0,30.	0,38.	0,42.	0,49.
	2,010.	0.	0.	0.	0.	0.
		3.e SÉRIE.				
2,008.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0,118.	0,26.	0,38.	0,47.	0,54.	0,60.
	0,999.	0,34.	0,48.	0,60.	0,68.	0,76.
	2,998.	0.	0.	0.	0.	0.
		4.e SÉRIE rapportée à la corde qui joint les observations extrêmes.				
3,018.	0,00174.	0.	0.	0.	0.	0.
	0,253.	0,36.	0,43.	0,56.	"	"
	0,500.	0,38.	0,55.	0,65.	"	"
	1,003.	0,38.	0,56.	0,68.	"	"
	1,998.	0,35.	0,45.	0,58.	"	"
	2,002.	0,17.	0,23.	0,28.	"	"
	3,995.	0.	0.	0.	0.	0.

DISTANCE du point lumineux au corps opaque, ou valeur de *a*.	DISTANCE du corps opaque au micromètre, ou valeur de *b*.	ORDONNÉES DES TRAJECTOIRES des bandes obscures rapportées à leurs cordes. 1.er ordre.	2.e ordre.	3.e ordre.	4.e ordre.	5.e ordre.
		4.e SÉRIE rapportée à la corde qui part du bord du corps opaque.				
m.	m.	mm.	mm.	mm.	mm.	mm.
3,018.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0,0017.	0,04.	0,06.	0,08.		
	0,253.	0,34.	0,50.	0,63.	0,73.	0,83.
	0,590.	0,41.	0,58.	0,72.	0,85.	0,94.
	1,003.	0,41.	0,60.	0,74.	0,87.	0,97.
	1,998.	0,32.	0,48.	0,57.	0,67.	0,75.
	3,002.	0,18.	0,25.	0,30.	0,38.	0,39.
	3,995.	0.	0.	0.	0.	0.
		5.e SÉRIE.				
4,507.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0,131.	0,27.	0,40.	0,50.	0,58.	0,66.
	1,018.	0,32.	0,48.	0,59.	0,71.	0,81.
	2,506.	0.	0.	0.	0.	0.
		6.e SÉRIE.				
6,007.	0.	0.	0.	0.	0.	0.
	0,127.	0,22.	0,32.	0,42.	0,49.	0,53.
	0,999.	0.	0.	0.	0.	0.

On voit donc que l'hypothèse de condensations et dilatations produites par l'action des corps sur les rayons lumineux est insuffisante pour expliquer les phénomènes de la diffraction. A l'aide du principe des *interférences*, au contraire, on peut concevoir non-seulement les variations de largeur que les franges extérieures éprouvent lorsqu'on rapproche ou qu'on éloigne l'écran du point lumineux, mais encore la marche curviligne de leurs bandes obscures et brillantes. La loi des

interférences, ou de l'influence mutuelle des rayons lumineux, est une conséquence immédiate du système des ondes ; d'ailleurs elle est démontrée ou confirmée par tant d'expériences diverses, que c'est actuellement un des principes de l'optique les plus incontestables.

Grimaldi a reconnu le premier l'action que les rayons lumineux exercent les uns sur les autres. Dans ces derniers temps, le célèbre docteur Thomas Young a prouvé, par une expérience simple et ingénieuse, que les franges intérieures résultent de la rencontre des rayons infléchis de chaque côté du corps opaque, en interceptant avec un écran un des deux faisceaux lumineux; ce qui fait toujours évanouir complétement les franges intérieures, quelles que soient la forme, la masse et la nature de l'écran, et soit qu'on intercepte le faisceau lumineux avant ou après son immersion dans l'ombre.

On produit des franges plus vives et plus tranchées, en faisant, dans un carton ou une feuille métallique, deux fentes parallèles très-fines et suffisamment rapprochées, et plaçant cet écran ainsi percé devant un point lumineux ; alors, si on en observe l'ombre avec une loupe placée entre le corps opaque et l'œil, on voit un grand nombre de franges colorées bien distinctes, lorsque la lumière arrive par les deux ouvertures à-la-fois, et qui disparaissent dès que la lumière d'une des fentes est interceptée.

Quand on fait concourir sous un très-petit angle deux faisceaux lumineux, provenant toujours d'une source commune, et régulièrement réfléchis par deux miroirs métalliques, on obtient encore des franges semblables, et dont les couleurs sont même plus pures et plus brillantes. Pour les produire, il faut avoir grand soin que dans l'endroit où se touchent les deux miroirs, ou du moins dans une partie des arêtes en contact, la surface de l'un ne dépasse pas sensiblement celle de l'autre, afin que la différence des chemins parcourus soit très-petite

pour les rayons réfléchis [illegible] commune des deux champs lumineux (1). [illegible] sant que [illegible] l'idée de cette expérience [illegible] exigeait des précautions assez délicates et des tâtonnemens assez longs pour qu'il fût presque impossible que le hasard y conduisît.

Si l'on enlève un des miroirs, ou qu'on intercepte la lumière qu'il réfléchit, soit avant soit après sa réflexion, on fait disparaître les franges, comme dans les cas précédens. Ce qui prouve bien encore que ces franges sont produites par le concours des deux faisceaux lumineux, et non par l'action des bords des miroirs, c'est qu'elles sont toujours perpendiculaires à la ligne qui joint les deux images du point lumineux, quelle que soit son inclinaison par rapport aux bords, du moins dans l'étendue du champ commun des deux faisceaux régulièrement réfléchis (2).

Les franges qu'on observe dans l'intérieur de l'ombre d'un corps étroit, ou celles qu'on produit avec deux miroirs, résultant évidemment de l'influence mutuelle des rayons lumineux,

---

(1) Dans la lumière blanche, et même dans une lumière aussi homogène que possible, on n'aperçoit jamais qu'un nombre de franges assez limité, parce que, la lumière parvenue au plus grand degré de simplicité qu'on puisse atteindre sans en diminuer trop l'intensité, étant encore composée de rayons hétérogènes, les bandes obscures et brillantes qu'ils produisent, et qui n'ont pas la même largeur, empiètent les unes sur les autres à mesure qu'elles s'éloignent de celles du premier ordre, et finissent par s'effacer complétement. C'est pourquoi l'on n'aperçoit plus de franges dès que la différence des chemins [illegible] sensible.

On peut consulter, sur les détails de cette expérience et de son explication par le principe des interférences, l'article *sur la lumière* du Supplément à la traduction française de la *Chimie* de Thomson, que nous avons déjà cité.

(2) Lorsque les franges se prolongent au-delà, leurs parties extérieures résultant du concours des rayons régulièrement réfléchis par un des miroirs et des rayons infléchis près du bord de l'autre, leur direction doit être [illegible]. En observant le phénomène avec attention, on voit que, dans un cas comme dans l'autre, la forme et la position des franges sont toujours d'accord avec la théorie des interférences.

l'analogie indiquoit qu'il devoit en être de même pour les franges extérieures qui bordent les ombres des corps éclairés par un point lumineux, la première hypothèse qui se présente à la pensée, c'est qu'elles sont produites par la rencontre des rayons directs et des rayons réfléchis sur les bords du corps opaque, tandis que les franges intérieures résultent de l'action réciproque des rayons infléchis dans l'ombre, des deux côtés du corps opaque, ces rayons infléchis partant également de sa surface, ou de points infiniment voisins. Telle paraît être l'opinion de M. Young, et c'est aussi celle que j'avois adoptée d'abord, avant qu'un examen plus approfondi des phénomènes m'en eût fait reconnoître l'inexactitude. Je vais néanmoins la suivre dans ses conséquences et rappeler les formules que j'en avois déduites, pour faciliter la comparaison de cette théorie avec celle que je lui ai substituée.

Soit R (*fig. 1*) le point radieux, AA' le corps opaque, FT' le carton blanc sur lequel se projette son ombre, ou le plan focal de la loupe avec laquelle on observe les franges; RT et RT' sont les rayons tangens aux bords du corps opaque, et T et T' les limites de l'ombre géométrique. Je représente par a la distance RB du point lumineux au corps opaque, par b la distance BC de ce corps au carton, et par c sa largeur AA', que je suppose assez petite relativement aux distances a et b, pour qu'on puisse indifféremment mesurer la largeur des franges dans un plan perpendiculaire à RT, ou à la ligne RC qui passe par le milieu de l'ombre.

Cela posé, occupons-nous d'abord des franges extérieures. Soit F un point pris sur le carton en dehors de l'ombre : la différence des chemins parcourus par les rayons directs et les rayons réfléchis sur le bord du corps opaque qui concourent en ce point, est $RA + AF - RF$. Représentant FT par x, réduisant en séries les valeurs de RF, AR et AF, en négligeant tous les termes multipliés par une puissance de x

ou de [illegible] que [illegible] à cause de la petitesse de ces quantités par rapport aux distances *a* et *b*, les termes qui contiennent *c* se détruisent mutuellement, et l'on trouve, pour la différence des chemins parcourus,

$$d = \frac{a}{2b(a+b)} \cdot x^2,$$

d'où l'on tire

$$x = \sqrt{\frac{2db(a+b)}{a}}.$$

Si l'on représente par λ la longueur d'une onde lumineuse, c'est-à-dire, l'intervalle compris entre deux points de l'éther où les mêmes oscillations s'exécutent simultanément et dans le même sens, $\frac{1}{2}\lambda$ sera l'intervalle compris entre les molécules éthérées dont les vitesses sont aussi pareilles au même instant, mais dirigées en sens contraires. Ainsi deux systèmes d'ondes séparés par un intervalle égal à λ s'accorderont parfaitement dans leurs vibrations; ils se contrarieront complètement lorsque l'intervalle des points correspondans sera égal à $\frac{1}{2}\lambda$. En conséquence, d'après la formule ci-dessus, la valeur de x qui correspond au point le plus sombre de la bande obscure du premier ordre, devrait être $\sqrt{\frac{\lambda b(a+b)}{a}}$. Mais il résulte au contraire de l'observation, que c'est à peu près l'endroit le plus brillant de la première frange. D'après la même théorie, le bord de l'ombre géométrique, où la différence des chemins parcourus est nulle, devrait être plus brillant que le reste de la frange, et c'est précisément le point le plus sombre en dehors de l'ombre géométrique. En général, la position des bandes obscures et brillantes déduite de cette formule est presque exactement inverse de celle que donne l'expérience. C'est là la première difficulté que présente cette théorie. Pour la lever, il faut supposer que les rayons réfléchis sur le bord de l'écran éprouvent un retard d'une demi-ondulation; alors

on doit ajouter $\frac{1}{2}\lambda$ à la différence d des chemins parcourus, et la formule générale devient

$$x = \sqrt{\frac{b(a+b)(\lambda+2d)}{a}}.$$

En substituant successivement à la place de d dans cette formule, $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$, $\frac{5}{2}\lambda$, $\frac{7}{2}\lambda$, &c., on a, pour les valeurs de x qui répondent aux bandes obscures du premier ordre, du deuxième, du troisième, du quatrième, &c.

$$\sqrt{\frac{2\lambda b(a+b)}{a}},\ \sqrt{\frac{4\lambda b(a+b)}{a}},\ \sqrt{\frac{6\lambda b(a+b)}{a}},\ \sqrt{\frac{8\lambda b(a+b)}{a}},\ \&c.$$

Ces formules paraissent s'accorder assez bien avec l'observation ; cependant on reconnaît par des mesures très-précises que les rapports qu'elles établissent entre les largeurs des franges ne sont pas tout-à-fait exacts, comme nous le verrons bientôt.

Je passe maintenant aux franges intérieures formées dans l'ombre par le concours des deux faisceaux lumineux infléchis en A et A'.

Soit M un point quelconque pris dans l'intérieur de l'ombre ; l'intensité de la lumière en ce point dépend du degré d'accord ou de discordance entre les vibrations des rayons AM et $A'M$ qui s'y réunissent, ou de la différence des chemins parcourus $A'M - AM$. Je représente par x la distance MC du point M au milieu de l'ombre, et par d la différence entre les chemins parcourus, et je trouve

$$d = \sqrt{b^2 + (x + \tfrac{1}{2}c)^2} - \sqrt{b^2 + (x - \tfrac{1}{2}c)^2},$$

où, développant les radicaux en séries, et négligeant les puissances supérieures de x, à cause de la petitesse de cette quantité par rapport à b, on a

$$d = \frac{cx}{b},$$

d'où $x = \frac{db}{c}$.

En substituant successivement 1, 2, 3, 4, &c. à la place de n dans cette formule, on a pour les valeurs de x qui répondent aux bandes obscures du premier ordre, du deuxième, du troisième, du quatrième, &c. [illegible] et par conséquent, pour l'intervalle compris entre les milieux de deux bandes obscures consécutives, [illegible]

L'expression générale d'un nombre quelconque n de ces intervalles est donc [illegible]

Tant que les bandes extrêmes sont suffisamment éloignées des bords de l'ombre, cette formule s'accorde assez bien avec l'observation; mais lorsqu'elles s'en approchent beaucoup, ou les dépassent, on reconnaît une petite différence entre leur position réelle et celle qui se déduit de la formule. En général, ce calcul donne toujours des largeurs un peu plus grandes que l'observation. J'en ferai voir la raison en exposant la véritable théorie de la diffraction.

Il résulte aussi de cette formule, que la largeur des franges intérieures devrait être entièrement indépendante de la distance a du point lumineux au corps opaque: mais cette loi n'est pas parfaitement d'accord avec l'expérience, sur-tout lorsque les franges occupent toute la largeur de l'ombre; alors leur position varie sensiblement avec la distance a.

D'après la formule $\sqrt{3n\lambda b(a+b) \ldots}$ [illegible] que nous venons de trouver pour les franges extérieures, leur position dépend de a aussi-bien que de b. L'expérience démontre en effet que leur largeur augmente ou diminue selon que le corps opaque est plus ou moins rapproché du point lumineux, et les rapports entre les différentes largeurs d'une même frange, déduits de la

formule sont précisément ceux que donne l'observation. Mais la conséquence la plus remarquable de cette formule, c'est que, b restant constant, la distance de la bande obscure ou brillante que l'on considère au bord de l'ombre géométrique, n'est pas proportionnelle à b, comme pour les franges intérieures; en sorte que cette bande ne parcourt point, comme celles-ci, une ligne droite, mais une hyperbole dont la courbure doit être sensible. C'est aussi ce que l'expérience confirme, ainsi qu'on l'a vu par les observations rapportées plus haut.

En considérant l'accord frappant de ces formules avec l'expérience, il était naturel de les regarder comme l'expression fidèle de la loi des phénomènes, et d'attribuer les petites différences entre le calcul et les observations aux inexactitudes inséparables de mesures aussi délicates (1). Mais lorsqu'on examine attentivement l'hypothèse sur laquelle elles reposent, et qu'on la suit dans ses conséquences, on reconnaît qu'elle est en contradiction avec les faits.

Si les franges qui bordent les ombres résultaient effectivement du concours des rayons directs et des rayons réfléchis sur le bord de l'écran, leur intensité dépendrait nécessairement

(1) Il paraîtrait au premier abord qu'on pourrait adapter cette théorie au système de l'émission, en y introduisant le principe des interférences, comme je l'ai indiqué plus haut. Mais, outre la complication des hypothèses fondamentales et le peu de probabilité de quelques-unes, ce principe conduirait, ce me semble, à des conséquences contraires au système de l'émission.

M. Arago a remarqué que l'interposition d'une lame mince transparente sur les bords d'un corps opaque assez étroit pour produire des franges dans l'intérieur de son ombre, déplaçait ces franges et les portait du côté de l'écran transparent. Or il résulte de ce phénomène, en adoptant le principe des interférences, que les rayons qui ont traversé la lame ont été retardés dans leur marche, puisque les mêmes franges, dans tous les cas, doivent répondre à des intervalles égaux entre les instans d'arrivée des rayons. Cette conséquence, qui confirme si bien le système des ondulations, est en opposition manifeste avec celui de l'émission, où l'on est obligé d'admettre que la lumière marche plus vite dans les corps denses que dans les milieux rares.

On ne peut éviter cette objection qu'en substituant la différence des accès des molécules lumineuses à leur différence de marche; mais on perdrait ainsi

de l'étendue et de la courbure de sa surface, et les franges produites par le dos d'un rasoir, par exemple, devraient être beaucoup plus apparentes que celles qui naissent du tranchant; quand on les observe avec une loupe, à une distance de quelques centimètres seulement, on n'aperçoit entre elles aucune différence sensible d'intensité. Pour faciliter cette comparaison, on peut se servir d'une plaque d'acier qui présente à la fois sur le même bord une partie arrondie et une partie tranchante, dont les arêtes extrêmes soient sur le prolongement l'une de l'autre. Alors on pourra s'assurer aisément que les franges ont la même intensité dans toute leur étendue.

On sait que, sous des incidences très-obliques, des surfaces mattes réfléchissent presque aussi bien la lumière que des miroirs les mieux polis; la raison en est facile à donner dans le système de l'émission et dans celui des ondulations. Mais si l'on conçoit que de grandes obliquités doivent faire disparaître la différence de poli, on ne voit pas comment l'intensité de la lumière réfléchie pourrait devenir indépendante du degré de courbure de la surface réfléchissante; car il est clair que plus son rayon de courbure sera petit et plus les rayons réfléchis devront diverger, quelle que soit d'ailleurs leur obliquité relativement à la surface.

Je me suis encore assuré, par une autre expérience bien

tous les avantages du principe des interférences, en remplaçant une idée nette par une idée vague, une explication satisfaisante par une autre qui ne facilite pas l'intelligence des phénomènes. Car on conçoit bien comment deux molécules lumineuses qui viennent frapper le même point de la rétine, produisent des sensations plus ou moins vives, selon l'intervalle de temps qui sépare ces deux chocs consécutifs, en raison des accords ou des discordances qui en résultent entre les vibrations qu'ils tendent à produire dans le nerf optique; tandis qu'on ne voit pas aussi clairement, à beaucoup près, ce qui peut résulter de la différence d'accès des deux molécules lumineuses, et comment, en frappant simultanément le nerf optique, elles ne produisent plus aucun effet dès qu'elles sont dans des accès contraires, quoiqu'il y ait d'ailleurs un accord parfait entre leurs chocs mécaniques.

simple, de l'inexactitude de l'hypothèse que j'avais adoptée d'abord, et que je combats actuellement. Ayant découpé une feuille de cuivre dans la forme représentée par la *figure* 2, je la plaçai devant un point lumineux, à quatre mètres de distance environ, dans une chambre obscure, et j'examinai son ombre avec une loupe. Or, voici ce que j'observai, en m'en éloignant graduellement. Lorsque les larges franges produites par chacune des ouvertures très-étroites *G E E' C'* et *D F F' D'* étaient sorties, en se dilatant, de l'ombre géométrique de *G D E F*, qui ne recevait plus alors qu'une lumière sensiblement blanche de chaque fente en particulier, les franges intérieures provenant de la rencontre des deux faisceaux de lumière présentaient des couleurs beaucoup plus vives et plus pures que celles des franges intérieures de l'ombre de *A B D C*, et avaient en même temps plus d'éclat. En m'éloignant davantage, je voyais la lumière diminuer dans toute l'étendue de l'ombre de *A B F E*, mais plus rapidement derrière *E F D C* que dans la partie supérieure; en sorte qu'il y avait un instant où l'intensité de la lumière paraissait la même de haut en bas, après lequel les franges devenaient plus obscures dans la partie inférieure (1), quoique leurs couleurs fussent toujours beaucoup plus pures.

S'il n'y avait de lumière infléchie que celle qui a rasé les bords mêmes du corps opaque, les franges de la partie supérieure devraient être plus nettes que celles de la partie inférieure, et présenter des couleurs plus pures; car les premières proviendraient du concours de deux systèmes d'ondes ayant leurs centres sur les deux côtés *A C* et *B D*, tandis que les autres seraient formées par le concours de quatre systèmes

(1) Pour que cette différence d'obscurité entre les deux parties de l'ombre puisse être bien prononcée, il faut que les fentes *G E* et *D F* soient très-étroites par rapport à l'intervalle qui les sépare, et que la feuille de cuivre soit suffisamment éloignée du point lumineux.

d'ondes ayant leurs centres sur les bords $C'E'$, CE, DF, $D'F'$; ce qui diminuerait nécessairement la différence d'intensité des bandes obscures et brillantes dans la teinte la plus homogène, ou la pureté des couleurs dans la lumière blanche, puisque les franges produites par les rayons réfléchis et infléchis sur $C'E'$ et $D'F'$ ne coïncideraient pas parfaitement avec celles qui proviendraient du concours des rayons partis de CE et de DF; or, comme je viens de le dire, l'expérience présente le contraire. On pourrait expliquer, dans la même hypothèse, comment il se fait que l'ombre de $EGDF$ est mieux éclairée que celle de $ABDC$, par la double source de lumière que fournissent les deux bords de chaque fente; mais il résulterait de cette explication même, que la partie inférieure devrait toujours conserver sa supériorité d'éclat, et nous venons de voir qu'il n'en est pas ainsi.

Il résulte des expériences que je viens de rapporter, qu'on ne peut pas attribuer les phénomènes de la diffraction aux seuls rayons qui touchent les bords des corps, et qu'il faut admettre qu'une infinité d'autres rayons séparés de ces corps par des intervalles sensibles se trouvent néanmoins écartés de leur première direction, et concourent aussi à la formation des franges.

La dilatation qu'éprouve un faisceau lumineux en passant par une ouverture très-étroite, démontre d'une manière encore plus directe, que l'inflexion de la lumière s'étend à une distance sensible des bords du diaphragme. C'est en réfléchissant sur ce phénomène que j'ai reconnu l'erreur dans laquelle j'étais tombé d'abord. Lorsqu'on rapproche beaucoup l'une de l'autre deux lames opaques placées devant un point lumineux dans une chambre obscure, on voit l'espace éclairé par l'ouverture qui les sépare, s'élargir considérablement. Ce sont les deux couteaux de Newton. Je suppose que, comme dans son expérience, les bords de l'ouverture soient tranchans et parfaites

mentales : non que [illegible] phénomène, mais seulement pour rendre plus évidente la conséquence qu'on doit en tirer. La petite quantité de rayons qui ont touché les tranchans, étant répandue dans un espace aussi étendu, ne pourrait produire qu'une lumière insensible, ou du moins extrêmement faible, et au milieu de laquelle on devrait distinguer une bande brillante tracée par le pinceau des rayons directs. Il n'en est pas ainsi cependant, et la teinte blanche paraît d'une intensité à peu près uniforme dans un espace beaucoup plus grand que la projection de l'ouverture (1); elle s'affaiblit ensuite, mais par degrés, jusqu'aux bandes obscures du premier ordre. C'était sans doute pour rendre raison de la quantité considérable de lumière infléchie que Newton avait supposé que l'action des corps sur les rayons lumineux s'étendait à des distances très-sensibles. Mais cette hypothèse ne peut soutenir un examen approfondi.

Si la dilatation d'un faisceau lumineux qui passe à travers une ouverture étroite, était occasionnée par des forces attractives ou répulsives émanant des bords de l'ouverture, l'intensité de ces forces, et par conséquent leur action sur la lumière, devraient varier *nécessairement* avec la nature, la masse et la surface des bords de l'écran. Toute force produite par un corps, qui agit à une distance sensible, prenant sa source dans une étendue sensible de sa masse ou de sa surface, dépend des positions relatives et de la quantité de particules que le corps présente dans cette sphère d'activité, ou, ce qui revient au même, de la forme de sa surface. Si donc le phénomène dont il s'agit provenait de l'action de pareilles forces,

(1) L'espace éclairé est d'autant plus grand par rapport à la projection conique de l'ouverture, qu'on éloigne davantage du diaphragme le carton blanc sur lequel on reçoit son ombre, et que le diaphragme est lui-même plus éloigné du point lumineux; de telle sorte qu'en augmentant suffisamment ces deux distances, on pourrait obtenir le même effet avec une ouverture d'une largeur quelconque.

on devrait, en opposant un corps arrondi à un tranchant, voir les rayons lumineux s'infléchir plus d'un côté que de l'autre : or c'est ce qui n'a pas lieu, comme je m'en suis assuré par une expérience fort simple. J'ai fait passer un faisceau lumineux entre deux plaques d'acier très-rapprochées, dont les bords verticaux, bien dressés sur toute leur longueur, étaient tranchans dans une partie et arrondis dans une autre, et disposés de telle sorte que le bord arrondi d'une des plaques répondait au tranchant de l'autre, et réciproquement. Il en résultait que le tranchant, se trouvant à droite, par exemple, dans la partie supérieure de l'ouverture, était à gauche dans sa partie inférieure. Par conséquent, pour peu que la différence d'action des deux bords eût porté les rayons plus d'un côté que de l'autre, je m'en serais aperçu aux positions relatives des parties supérieure et inférieure de l'intervalle clair du milieu, et sur-tout à celles des franges qui l'accompagnent, qui se seraient brisées vis-à-vis du point de passage des tranchans aux bords arrondis. Mais, en les observant attentivement, j'ai remarqué qu'elles étaient parfaitement droites sur toute leur longueur, ainsi que l'intervalle brillant du milieu, comme lorsque les deux plaques étaient disposées de façon que les bords de même forme fussent opposés l'un à l'autre. On pourrait varier cette expérience en composant ces plaques de deux parties de natures différentes, et l'on obtiendrait certainement le même résultat (1).

Toutes les observations que j'ai faites jusqu'à présent, m'ont démontré que la nature des corps interposés n'avait pas plus d'influence que leur masse et la forme de leurs bords sur

(1) M. Berthollet et Malus avaient reconnu depuis long-temps que la nature des corps n'a aucune influence sur la diffraction de la lumière, en employant pour écran des plaques ainsi composées de matières différentes, et qui présentaient sur le même bord un métal très-dense, par exemple, à la suite d'un morceau d'ivoire : mais ils n'avaient pas un moyen d'observation aussi commode et aussi précis que celui dont je me suis servi, en sorte qu'on pouvait craindre que de petites différences leur eussent échappé.

l'inflexion des rayons lumineux. Je n'en citerai qu'une, dans laquelle j'ai pris toutes les précautions nécessaires pour me bien assurer de l'exactitude de ce principe, qui d'ailleurs serait déjà suffisamment établi par l'expérience précédente.

J'ai recouvert une glace non étamée d'une couche d'encre de Chine unie à une feuille mince de papier, formant ensemble une épaisseur d'un dixième de millimètre. Avec la pointe d'un instrument tranchant j'ai tracé deux lignes parallèles, et j'ai enlevé soigneusement, entre ces deux traits, le papier et l'encre de Chine qui adhéraient à la surface du verre. Cette ouverture, mesurée au micromètre, avait $1^{mm},17$. J'ai placé l'un contre l'autre deux cylindres de cuivre de $14^{mm},5$ de diamètre, et en introduisant entre eux une lame graduée, en forme de coin, je les ai écartés jusqu'à ce que l'intervalle qui les séparait eût aussi $1^{mm},17$ de largeur. Ces cylindres, posés à côté de la glace noircie, étaient à $4^{m},015$ du point lumineux, et à $1^{m},663$ du micromètre: j'ai mesuré la largeur des franges produites par ces deux ouvertures, et j'ai trouvé qu'elle était absolument la même. Voici les résultats de ces deux observations, qui ont été faites dans la lumière blanche.

Intervalle entre les points les plus sombres des deux bandes obscures du premier ordre à la séparation du rouge bistre et du violet.	1.re observation......	$1^{mm},49$.
	2.e observation......	$1^{mm},49$.
Intervalle entre les limites des deux franges du second ordre à la séparation du rouge et du vert.	1.re observation......	$3^{mm},22$.
	2.e observation......	$3^{mm},22$.

Il est difficile que les circonstances soient plus différentes quant à la masse et à la nature des bords de l'ouverture. Dans un cas, ce n'est qu'une couche d'encre de Chine qui produit les franges, puisque la glace à laquelle elle est unie remplit aussi l'ouverture; dans l'autre, ce sont deux cylindres de cuivre massif de $14^{mm}\frac{1}{2}$ de diamètre, et qui présentent ainsi,

sur les bords de l'ouverture, des masses et des surfaces considérables. On voit cependant qu'il n'y a pas de différence dans la dilatation du faisceau lumineux.

Il est donc certain que les phénomènes de la diffraction ne dépendent point de la nature, de la masse ou de la forme des corps qui interceptent la lumière (1), mais seulement des dimensions de l'espace dans lequel elle est interceptée, ou de la largeur de l'ouverture par laquelle elle est introduite. On doit, en conséquence, rejeter l'hypothèse qui attribuerait ces phénomènes à des forces attractives ou répulsives, dont l'action s'étendrait à une distance des corps aussi sensible que celle à laquelle les rayons peuvent être infléchis; on ne peut pas admettre davantage que la diffraction est occasionnée par de petites atmosphères de la même étendue que la sphère d'activité de ces forces, et d'un pouvoir réfringent différent de celui du milieu environnant; car il résulterait de la seconde hypothèse, comme de la première, que l'inflexion des rayons devrait varier avec la forme ou la nature des bords de l'écran, et ne pourrait être la même, par exemple, près du fil et près du dos d'un rasoir. Or il est impossible de concevoir autrement, dans le système de l'émission, la dilatation d'un faisceau lumineux passant par une ouverture étroite, et cette dilatation est parfaitement démontrée (2). Il en résulte donc que *les phénomènes de la diffraction sont inexplicables dans le système de l'émission*.

(1) Du moins tant qu'on ne reçoit pas l'ombre trop près du bord de l'écran, ou que la surface rasée par les rayons lumineux n'a pas trop d'étendue relativement à cette distance; car il pourrait se faire, dans ce cas, que les rayons réfléchis eussent une influence sensible sur l'aspect du phénomène, comme cela arrive lorsque la surface rasée par les rayons lumineux est celle d'un miroir plan d'un ou de deux décimètres de largeur, par exemple, et qu'on en observe les franges à une petite distance. D'ailleurs il y aurait alors des diffractions *successives* sur une étendue trop considérable, pour qu'on pût en faire abstraction.

(2) Les phénomènes des tubes capillaires présentent l'élévation d'un liquide

SECTION II.

APRÈS avoir démontré, dans la première section de ce Mémoire, que le système de l'émission, et même le principe des interférences, quand on ne l'applique qu'aux rayons directs et aux rayons *réfléchis ou infléchis sur les bords mêmes de l'écran*, sont insuffisans pour expliquer les phénomènes de la diffraction, je vais faire voir maintenant qu'on peut en donner une explication satisfaisante et une théorie générale, dans le système des ondulations, sans le secours d'aucune hypothèse secondaire, et en s'appuyant seulement sur le principe d'Huygens et sur celui des interférences, qui sont l'un et l'autre des conséquences de l'hypothèse fondamentale.

En admettant que la lumière consiste dans des vibrations de l'éther, semblables à celles des ondes sonores, il est aisé de se rendre raison de l'inflexion des rayons lumineux à des distances sensibles de l'écran. En effet, quand une petite partie d'un fluide élastique a éprouvé une condensation, par exemple, elle tend à se dilater dans toutes les directions; et si, dans une onde entière, les molécules ne se meuvent que parallèlement à la normale, cela tient à ce que toutes les parties de l'onde situées sur la même surface sphérique éprouvent simultanément la même condensation ou dilatation, et qu'ainsi les pressions transversales se font équilibre. Mais, dès qu'une

au-dessus de son niveau entre deux surfaces séparées par un intervalle très-sensible, quoique l'attraction exercée par ces surfaces sur le liquide ne s'étende qu'à une distance infiniment petite. La raison en est que les molécules liquides attirées par la surface du tube capillaire attirent à leur tour les molécules liquides situées dans leur sphère d'activité, et ainsi de suite de proche en proche. Mais, dans la théorie de l'émission, on ne peut pas appliquer aux phénomènes de la diffraction une explication analogue ; car, d'après l'hypothèse fondamentale, les molécules lumineuses n'exercent point d'influence sensible sur la marche des molécules voisines : on n'admet aucune dépendance mutuelle entre leurs mouvemens; autrement ce serait rentrer dans la supposition d'un fluide.

portion de l'onde lumineuse se trouve interceptée ou retardée dans sa marche par l'interposition d'un écran opaque ou transparent, on conçoit que cet équilibre transversal est détruit, et qu'il doit en résulter pour les différens points de l'onde la faculté d'envoyer des rayons suivant de nouvelles directions.

Il serait sans doute bien difficile de suivre par l'analyse mécanique toutes les modifications que l'onde lumineuse éprouve successivement depuis l'instant où la rencontre de l'écran en a intercepté une partie : aussi n'est-ce pas de cette manière que nous allons essayer de déterminer les lois de la diffraction. Nous ne chercherons pas à découvrir ce qui se passe dans le voisinage du corps opaque, où ces lois sont sans doute extrêmement compliquées et où la forme des bords de l'écran doit avoir encore une influence notable sur la position et l'intensité des franges. Nous nous proposons de calculer les intensités relatives des différens points de l'onde lumineuse seulement après qu'elle a dépassé l'écran d'un grand nombre d'ondulations. Ainsi les positions de l'onde que nous considérerons seront toujours censées éloignées de l'écran d'une quantité très-considérable par rapport à la longueur d'une ondulation lumineuse.

Nous n'envisagerons pas le problème des vibrations d'un fluide élastique sous le même point de vue que les géomètres l'ont fait ordinairement, c'est-à-dire, en ne considérant qu'un seul ébranlement. Dans la nature, les vibrations ne sont jamais isolées; elles se répètent toujours un grand nombre de fois, comme on peut le remarquer dans les oscillations d'un pendule ou les vibrations des corps sonores. Nous supposerons que les vibrations des particules lumineuses s'exécutent de la même manière, en se succédant régulièrement par séries nombreuses; hypothèse où nous conduit l'analogie, et qui d'ailleurs paraît une conséquence des forces qui tiennent les molécules

des corps en équilibre. Pour concevoir une succession nombreuse d'oscillations à peu près égales de la même particule éclairante, il suffit de supposer que sa densité est beaucoup plus grande que celle du fluide dans lequel elle oscille. C'est ce qu'on devait déjà conclure de la régularité des mouvemens planétaires au travers de ce même fluide, qui remplit les espaces célestes. Il est très-probable aussi que le nerf optique n'est ébranlé de manière à produire la sensation de la vision qu'après un certain nombre de chocs successifs.

Quelqu'étendus qu'on suppose tous les systèmes d'ondes lumineuses, il est clair qu'ils ont des limites, et qu'en envisageant leurs interférences, on ne peut pas dire de leurs extrémités ce qui est vrai pour l'espace dans lequel ils se superposent. Ainsi, par exemple, deux systèmes d'ondes d'égale longueur et de même intensité, différant dans leur marche d'une demi-ondulation, ne se détruisent mutuellement que dans les points de l'éther où ils se rencontrent, et les deux demi-ondes extrêmes échappent à l'interférence.

Nous supposerons néanmoins que les systèmes d'ondes éprouvent la même modification dans toute leur étendue, la différence entre cette hypothèse et la réalité devant être inappréciable pour nos sens; ou, ce qui revient au même, nous considérerons ces séries d'ondulations lumineuses comme indéfinies et comme des vibrations générales de l'éther, dans le calcul de leurs interférences.

Solution du Problème des Interférences.

Étant données les intensités et les positions relatives d'un nombre quelconque de systèmes d'ondes lumineuses de même longueur (1), *et*

---

(1) Nous ne nous occuperons pas des interférences des ondes lumineuses de longueurs différentes, qu'on doit considérer en général comme émanant de

qui se propagent suivant la même direction, déterminer l'intensité des vibrations résultant du concours de ces différens systèmes d'ondes, c'est-à-dire, la vîtesse oscillatoire des molécules éthérées (1).

D'après le principe général de la coexistence des petits mouvemens, la vîtesse totale imprimée à une molécule quelconque du fluide est égale à la somme des vîtesses que l'onde de chaque système lui aurait imprimée séparément. Comme ces ondes ne coïncident pas, ces différentes vîtesses ne dépendent pas seulement de l'intensité de chaque onde, mais encore de sa position par rapport à la molécule, dans l'instant que l'on considère. Il faut donc connaître la loi suivant laquelle les vîtesses d'oscillation varient dans la même onde, et, pour cela, remonter à la cause qui l'a produite et dont elle tient tous ses caractères.

Il est naturel de supposer que les vibrations des particules éclairantes qui produisent la lumière s'exécutent comme celles des corps sonores, c'est-à-dire, suivant les mêmes lois que les petites oscillations d'un pendule, ou, ce qui revient au même, que la force accélératrice qui tend à ramener les molécules dans leurs positions d'équilibre, est proportionnelle à la distance dont elles se sont écartées. Quelque fonction qu'elle

---

sources différentes, et qui, n'étant pas en conséquence assujetties à la simultanéité dans leurs perturbations, ne sauraient présenter des effets constans par leur influence mutuelle. D'ailleurs, en supposant même que ces effets fussent constans, la succession régulière de renforcemens et d'affaiblissemens de vibration qui résulterait des interférences des deux espèces d'ondes, et que l'on peut exactement comparer aux battemens que font entendre deux sons discordans; cette succession, dis-je, serait infiniment trop rapide pour être appréciable, et ne produirait qu'une sensation continue.

(1) C'est M. Thomas Young qui le premier a introduit le principe des interférences en optique, où il en a fait beaucoup d'applications ingénieuses. Mais, dans les problèmes d'optique qu'il a résolus de cette manière, il n'a considéré, je crois, que les cas extrêmes d'accord ou de discordance complète entre deux systèmes d'ondes, sans calculer l'intensité de la lumière pour les cas intermédiaires et pour un nombre quelconque de systèmes d'ondes, comme je me propose de le faire ici.

soit de cette distance, que je représente par x, elle peut toujours être mise sous la forme $Ax + Bx^2 + Cx^3 +$, &c., puisqu'elle doit être nulle quand $x = 0$: or, si l'on suppose les excursions des molécules très-petites par rapport à l'étendue des sphères d'activité des forces attractives et répulsives, on pourra négliger devant Ax tous les autres termes du développement, et regarder la force accélératrice, comme sensiblement proportionnelle à la distance x. Cette hypothèse, indiquée par l'analogie, et la plus simple que l'on puisse faire sur les vibrations des particules éclairantes, doit nous conduire à des résultats exacts, puisqu'on ne remarque pas que les lois de la lumière varient avec son intensité.

Si l'on représente par v la vitesse d'oscillation d'une molécule éclairante au bout d'un temps t, on aura donc $dv = -Axdt$; mais $v = \frac{dx}{dt}$, ou $dt = \frac{dx}{v}$. Substituant dans la première équation, on trouve, $vdv = -Axdx$. Intégrant, on a, $v^2 = C - Ax^2$; d'où

$$x = \pm\sqrt{\frac{C - v^2}{A}}.$$

Substituant cette valeur de x dans la première équation, on a

$$dt = \frac{dv}{\sqrt{A(C - v^2)}};$$

$$\text{intégrant, } t = C' + \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ arc}\left(\sin = \frac{v}{\sqrt{C}}\right).$$

Si donc on prend pour origine du temps celui du mouvement, la constante C' devra être nulle, et l'on aura :

$$t = \frac{1}{\sqrt{A}} \text{ arc}\left(\sin = \frac{v}{\sqrt{C}}\right); \text{ ou } v = \sqrt{C}. \sin(t.\sqrt{A}).$$

Si l'on prend pour unité de temps celui qui s'écoule depuis le départ de la molécule jusqu'à son retour, on aura, $v = \sqrt{C} \sin(2\pi t)$.

Ainsi, dans des oscillations isochrones, les vîtesses correspondant à la même valeur de t seront toujours proportionnelles à la constante $\sqrt{C}$, qui représente en conséquence l'intensité du mouvement vibratoire.

Considérons maintenant l'ondulation produite dans l'éther par les oscillations de cette molécule. L'énergie du mouvement de l'éther à chaque point de l'onde dépend de la vîtesse de la molécule motrice au moment où elle a produit l'impulsion qui se fait sentir actuellement dans ce point. La vîtesse des molécules éthérées en un point quelconque de l'espace après un temps t, est proportionnelle à celle qui animait la molécule motrice à l'instant $t - \frac{x}{\lambda}$, x représentant la distance de ce point à la source du mouvement, et λ la longueur de l'ondulation lumineuse. On a donc, en représentant par u la vîtesse des molécules éthérées,

$$u = a \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

On sait que l'intensité a des vibrations du fluide est, en raison inverse de la distance de l'onde, au centre d'ébranlement; mais, vu la petitesse des ondes relativement à l'éloignement où nous les supposons du point lumineux, nous pouvons faire abstraction, dans l'étendue d'une et même de plusieurs ondulations, de la variation de a, et considérer cette quantité comme constante.

On peut, à l'aide de cette formule, calculer l'intensité des vibrations produites par le concours d'un nombre quelconque de faisceaux lumineux, quand on connaît l'intensité de ces différens systèmes d'ondes et leurs positions respectives.

Je suppose d'abord qu'il s'agisse de déterminer les vîtesses des molécules lumineuses dans les vibrations résultant du concours de deux systèmes d'ondes distans l'un de l'autre

d'un quart d'ondulation, et dont les intensités sont a et a'. Je compte le temps t, à partir du moment où ont commencé les vibrations du premier faisceau lumineux. Soient u et u' les vîtesses que le premier et le second système d'ondes tendent à imprimer à la même molécule lumineuse distante de la source du mouvement d'une quantité égale à x, on aura :

$$u = a \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \text{ et } u' = a' \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x + \frac{1}{4}\lambda}{\lambda}\right)\right),$$

$$\text{ou } u' = -a' \cos\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

Par conséquent, la vîtesse totale U sera égale à

$$a \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right) - a' \cos\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right);$$

mais, en faisant $a = A \cos i$ et $a' = A \sin i$, on peut toujours mettre cette expression sous la forme,

$$A\left(\cos i \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right) - \sin i \cos\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right)\right),$$

$$\text{ou } A \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right) - i\right).$$

Ainsi l'onde résultant du concours des deux autres sera de même nature, mais aura une position et une intensité différentes. Les équations $A \cos i = a$ et $A \sin i = a'$ donnent, pour la valeur de A, c'est-à-dire, pour l'intensité de l'onde résultante, $\sqrt{a^2 + a'^2}$. C'est précisément la valeur de la résultante de deux forces rectangulaires égales à a et à a'.

Il est aisé de voir aussi, d'après les mêmes équations, que la position de la nouvelle onde répond exactement à la situation angulaire de la résultante des deux forces rectangulaires a et a' : car, d'après la formule

$$U = A \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right) - i\right),$$

l'intervalle qui sépare cette onde de la première est égal à

$\frac{i\lambda}{2\pi}$; or i est l'angle que la force a fait avec la résultante A, puisque $A \cos i = a$. Ainsi la similitude est complète entre la résultante de deux forces rectangulaires et celle de deux systèmes d'ondes distans d'un quart d'ondulation.

La solution du problème que je viens de donner dans le cas particulier où il s'agit de trouver la résultante de deux ondes séparées par un intervalle d'un quart d'ondulation, suffit pour le résoudre dans tous les autres cas. En effet, quels que soient le nombre des différens systèmes d'ondes et les intervalles qui les séparent, on peut toujours substituer à chacun d'eux ses composans rapportés à deux points communs distans d'un quart d'ondulation; alors, en ajoutant ou retranchant, selon leurs signes, les intensités des composans rapportés au même point, on ramenera le mouvement total à deux systèmes d'ondes séparés par un intervalle d'un quart d'ondulation, et la racine carrée de la somme des carrés de leurs intensités sera l'intensité de leur résultante. C'est absolument le procédé qu'on emploie en statique pour trouver la résultante d'un nombre quelconque de forces: ici, la longueur de l'ondulation répond à la circonférence dans le problème de statique, et l'intervalle d'un quart d'ondulation entre les systèmes d'ondes, à l'intervalle angulaire d'un quart de circonférence qui sépare les composantes.

Il arrive le plus souvent, dans les problèmes d'optique, que les intensités de lumière, ou les teintes que l'on veut calculer, ne résultent que du concours de deux systèmes d'ondes seulement, comme dans les anneaux colorés et les phénomènes de coloration les plus ordinaires que présentent les lames cristallisées; en sorte qu'il est bon de connaître la formule générale qui donne la résultante de deux systèmes d'ondes séparés par un intervalle quelconque. On prévoit déjà le résultat que l'on obtiendrait en appliquant à ce cas la méthode générale que je viens d'exposer. Mais je ne crois pas inutile

de m'appesantir encore sur la théorie de ces mouvemens vibratoires, et de prouver directement que l'onde résultant du concours des deux autres, quelles que soient leurs positions relatives, répond exactement, pour son intensité et pour sa situation, à la résultante de deux forces égales aux intensités des deux faisceaux lumineux, et faisant entre elles un angle qui soit à la circonférence entière comme l'intervalle qui sépare les deux systèmes d'ondes est à la longueur d'une ondulation.

Soient x la distance du centre du premier système d'ondes à la molécule lumineuse que l'on considère, et t l'instant où l'on veut calculer sa vitesse; celle que lui imprime l'onde du premier système est égale à

$$a \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right),$$

a étant l'intensité de ce faisceau lumineux. Si l'on représente par a' l'intensité du second et par c l'intervalle qui sépare les points correspondans des deux systèmes d'ondes, la vitesse résultant du second sera,

$$a' \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x+c}{\lambda}\right)\right),$$

et, par conséquent, la vitesse totale imprimée à la molécule

$$a \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right) + a' \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x+c}{\lambda}\right)\right),$$

$$\text{ou } \left(a + a' \cos\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right)\right) \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right)$$

$$- a' \sin\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right);$$

expression qui peut toujours se mettre sous la forme,

$$A \cos i \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right) - A \sin i \cos\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right)\right),$$

$$\text{ou } A \sin\left(2\pi\left(t - \frac{x}{\lambda}\right) - i\right),$$

en faisant $a + a' \cos\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right) = A \cos i$ et $a' \sin\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right) = A \sin i$. Élevant chaque membre de ces équations au carré et les ajoutant, on a,

$$A^2 = a^2 + a'^2 + 2aa' \cos\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right);$$

$$\text{d'où } A = \pm\sqrt{a^2 + a'^2 + 2aa' \cos\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right)}.$$

C'est la valeur de la résultante de deux forces a et a', faisant entre elles un angle égal à $2\pi\frac{c}{\lambda}$.

Il résulte de cette formule générale que l'intensité des vibrations de la lumière totale est égale à la somme de celles des deux faisceaux constituans dans le cas de l'accord parfait, à leur différence quand ils discordent complétement, et enfin à la racine carrée de la somme de leurs carrés, lorsque leurs vibrations correspondantes sont à un quart d'ondulation les unes des autres; ce qu'on avait déjà démontré.

Il est facile de voir que la position de l'onde répond exactement à la situation angulaire de la résultante des deux forces a et a'. En effet, la distance de la première onde à la seconde est c, et à l'onde résultante $\frac{i}{2\pi}\lambda$, et la distance de celle-ci à la seconde $c - \frac{i}{2\pi}\lambda$; par conséquent, les angles correspondans sont $2\pi\frac{c}{\lambda}$, i et $2\pi\frac{c}{\lambda} - i$: or, en multipliant par $\sin i$ l'équation $a + a' \cos\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right) = A \cos i$, et par $\cos i$ l'équation $a' \sin\left(2\pi\frac{c}{\lambda}\right) = A \sin i$, et les retranchant l'une de l'autre, on trouve,

$$a \sin i = a' \sin\left(2\pi\frac{c}{\lambda} - i\right),$$

qui, avec l'équation $a' \sin\left(2\pi \frac{c}{\lambda}\right) = A \sin i$, donne la proportion,

$$\sin\left(2\pi . \frac{c}{\lambda} - i\right) : \sin i : \sin\left(2\pi \frac{c}{\lambda}\right) :: a : a' : A.$$

L'expression générale $A \sin\left(2\pi \frac{c}{\lambda}\right) - i)$ de la vîtesse des molécules dans l'onde résultant du concours de deux autres démontre que cette onde a la même longueur que ses composantes, et que les vîtesses des points correspondans sont proportionnelles; en sorte que l'onde résultante est toujours de même nature que ses composantes, et n'en diffère que par l'intensité, c'est-à-dire, par la quantité constante qui multiplie les rapports des vîtesses de toutes les molécules auxquelles elle s'étend. En la combinant successivement avec de nouvelles ondes, on retrouverait toujours des expressions de même forme; propriété remarquable de cette sorte de fonctions. Ainsi, dans la résultante d'un nombre quelconque de systèmes d'ondes de même longueur, les molécules lumineuses sont toujours animées de vîtesses proportionnelles à celles des composantes, aux points situés à la même distance de l'extrémité de chaque onde.

Application du Principe d'Huygens aux Phénomènes de la Diffraction.

Après avoir indiqué la manière de déterminer la résultante d'un nombre quelconque de systèmes d'ondes lumineuses, je vais faire voir comment, à l'aide de ces formules d'interférence et du seul principe d'Huygens, il est possible d'expliquer et même de calculer tous les phénomènes de la diffraction. Ce principe, qui me paraît une conséquence rigoureuse de l'hypothèse fondamentale, peut s'énoncer ainsi : *Les vibrations d'une*

onde lumineuse dans chacun de ses points peuvent être regardés comme la somme des mouvemens élémentaires qu'y enverraient au même instant, en agissant isolément, toutes les parties de cette onde considérée dans une quelconque de ses positions antérieures (1).

Il résulte du principe de la coexistence des petits mouvemens, que les vibrations produites en un point quelconque d'un fluide élastique par plusieurs ébranlemens sont égales à la résultante de toutes les agitations envoyées au même instant dans ce point par ces différens centres d'ondulation, quels que soient leur nombre, leurs positions respectives, la nature et l'époque des ébranlemens divers. Ce principe, étant général, doit s'appliquer à tous les cas particuliers. Je supposerai que tous ces ébranlemens, en nombre infini, sont de même espèce, ont lieu simultanément, sont contigus et placés sur un même plan ou sur une même surface sphérique. Je ferai encore une hypothèse relativement à la nature de ces ébranlemens; je supposerai que les vitesses imprimées aux molécules sont toutes dirigées dans le même sens, perpendiculairement à la surface sphérique (2), et sont en outre proportionnelles aux condensations; en sorte que les molécules ne puissent pas avoir de

(1) Je considère toujours la succession d'une infinité d'ondulations, ou une vibration générale du fluide. Ce n'est que dans ce sens qu'on peut dire que deux ondes lumineuses se détruisent lorsqu'elles sont à une demi-ondulation l'une de l'autre. Les formules d'interférence que je viens de donner ne sont point applicables au cas d'une ondulation isolée, qui d'ailleurs n'est pas celui de la nature.

(2) Il peut y avoir des ondes dérivées dans lesquelles la direction des vitesses absolues imprimées aux molécules ne soit pas perpendiculaire à la surface de l'onde. En réfléchissant aux lois particulières de l'interférence des rayons polarisés, je me suis convaincu, depuis la rédaction de ce Mémoire, que les vibrations lumineuses s'exécutent perpendiculairement aux rayons ou parallèlement à la surface de l'onde. Les raisonnemens et les calculs contenus dans ce Mémoire s'accordent aussi bien avec cette nouvelle hypothèse qu'avec la précédente, puisqu'ils sont indépendans de la direction réelle des vibrations et supposent seulement qu'elles s'exécutent dans le même sens pour tous les rayons partis du même système d'ondes qui concourent à la formation des franges.

mouvement rétrograde. J'aurai ainsi reconstitué une onde dérivée par l'ensemble de ces ébranlemens partiels. Il est donc vrai de dire que les vibrations d'une onde lumineuse dans chacun de ses points peuvent être regardées comme la résultante de tous les mouvemens élémentaires qu'y enverraient au même instant, en agissant isolément, toutes les parties de cette onde considérée dans une quelconque de ses positions antérieures.

L'intensité de l'onde primitive étant uniforme, il résulte de cette considération théorique, comme de toutes les autres, que cette uniformité se conservera pendant sa marche, si aucune partie de l'onde n'est interceptée ou retardée relativement aux parties contiguës, parce que la résultante des mouvemens élémentaires dont je viens de parler sera la même pour tous les points. Mais, si une portion de l'onde est arrêtée par l'interposition d'un corps opaque, alors l'intensité de chaque point variera avec sa distance au bord de l'ombre, et ces variations seront sur-tout sensibles dans le voisinage des rayons tangens.

Soient C (*fig. 3*) le point lumineux, AG l'écran, AME l'onde arrivée en A et interceptée en partie par le corps opaque. Je la suppose divisée en une infinité de petits arcs Am', $m'm$, mM, Mn, nn', $n'n''$, &c. Pour avoir son intensité au point P dans une quelconque de ses positions suivantes BPD, il faut chercher la résultante de toutes les ondes élémentaires que chacune de ces portions de l'onde primitive y enverrait en agissant isolément.

L'impulsion qui a été communiquée à toutes les parties de l'onde primitive étant dirigée suivant la normale, les mouvemens qu'elles tendent à imprimer à l'éther doivent être plus intenses dans cette direction que dans toute autre ; et les rayons qui en émaneraient, si elles agissaient isolément, seraient d'autant plus faibles qu'ils s'écarteraient davantage de cette direction.

La recherche de la loi suivant laquelle leur intensité varierait autour de chaque centre d'ébranlement, présenterait sans doute de grandes difficultés : mais heureusement nous n'avons pas besoin de la connaître; car il est aisé de voir que les effets produits par ces rayons se détruisent presque complétement dès qu'ils s'inclinent sensiblement sur la normale, en sorte que ceux qui influent d'une manière appréciable sur la quantité de lumière que reçoit chaque point *P* peuvent être regardés comme d'égale intensité (1).

En effet, considérons les rayons sensiblement inclinés *EP, FP, IP,* concourant au point *P,* que je suppose distant de l'onde *E A* d'un grand nombre d'ondulations. Prenons les deux arcs *E F* et *F I* d'une longueur telle que les différences *EP-FP* et *FP-IP* soient égales à une demi-ondulation. À cause de l'obliquité prononcée des rayons et de la petitesse d'une demi-ondulation par rapport à leur longueur, ces deux arcs seront presque égaux, et les rayons qu'ils envoient au point *P,* sensiblement parallèles; en sorte qu'en raison de la différence d'une demi-ondulation qui existe entre

(1) Lorsque le centre d'ébranlement a éprouvé une condensation, la force expansive tend à pousser les molécules dans toutes directions; et si elles n'ont pas de mouvemens rétrogrades, cela tient uniquement à ce que leurs vitesses initiales en avant détruisent celles que la dilatation tend à leur imprimer en arrière : mais il ne s'ensuit pas que l'ébranlement ne puisse se propager que suivant la direction des vitesses initiales; car la force expansive, dans un sens perpendiculaire, par exemple, se combine avec l'impulsion primitive sans que ses effets en soient affaiblis. Il est clair que l'intensité de l'onde ainsi produite doit varier beaucoup dans les différens points de sa circonférence, non-seulement à cause de l'impulsion initiale, mais encore parce que les condensations ne sont pas assujetties à la même loi autour du centre de la partie ébranlée. Mais les variations d'intensité de l'onde dérivée doivent suivre nécessairement une loi de continuité, et peuvent par conséquent être considérées comme insensibles dans un intervalle angulaire très-petit, sur-tout auprès de la normale à l'onde génératrice; car, les vitesses initiales des molécules rapportées à une direction quelconque étant proportionnelles au cosinus de l'angle que cette direction fait avec la normale, ces composantes varient dans un rapport beaucoup moindre que l'intervalle angulaire quand il est peu considérable.

les rayons correspondans des deux arcs, leurs effets se détruiront mutuellement.

On peut donc supposer que tous les rayons que les diverses parties de l'onde primitive $A\ E$ envoient au point P sont d'égale intensité, puisque les seuls rayons pour lesquels cette hypothèse soit inexacte, n'ont pas d'influence sensible sur la quantité de lumière qu'il reçoit. On peut aussi, par la même raison, pour simplifier le calcul de la résultante de toutes ces ondes élémentaires, considérer leurs mouvemens vibratoires comme s'exécutant suivant une même direction, vu la petitesse des angles que les rayons font entre eux ; en sorte que le problème se trouve ramené à celui-ci, que nous avons déjà résolu : *Trouver la résultante d'un nombre quelconque de systèmes d'ondes lumineuses parallèles, de même longueur, dont les intensités et les positions relatives sont connues.* Les intensités sont ici proportionnelles à la longueur des arcs éclairans, et les positions relatives sont données par les différences de chemins parcourus.

Nous n'avons considéré, à proprement parler, que la section de l'onde faite par un plan perpendiculaire au bord de l'écran projeté en A. Envisageons-la maintenant dans toute son étendue, et concevons-la divisée en fuseaux infiniment minces par des méridiens équidistans perpendiculaires au plan de la figure; on pourra leur appliquer les raisonnemens que nous venons de faire pour une section de l'onde, et démontrer ainsi que les rayons d'une obliquité prononcée se détruisent mutuellement.

Ces fuseaux parallèles au bord de l'écran étant tous indéfiniment étendus dans le cas dont nous nous occupons, où l'onde lumineuse n'est interceptée que d'un seul côté, l'intensité de la résultante de toutes les vibrations qu'ils envoient en P sera la même pour chacun d'eux; car les rayons qui émanent de ces fuseaux doivent être considérés comme d'égale inten-

sité, du moins dans la partie très-peu étendue de l'onde génératrice qui a une influence sensible sur la lumière envoyée en *P*, à cause de l'extrême petitesse de la différence entre les chemins parcourus. De plus, chaque résultante élémentaire sera évidemment en arrière de la même quantité par rapport au rayon parti du point du fuseau le plus voisin de *P*, c'est-à-dire, du point où ce fuseau rencontre le plan de la figure. Ainsi les intervalles entre ces résultantes élémentaires seront égaux aux différences des chemins parcourus par les rayons *A P*, *m' P*, *m P*, &c., compris dans le plan de la figure, et leurs intensités seront proportionnelles aux arcs *A m'*, *m' m*, *m M*, &c. Pour avoir l'intensité de leur résultante générale, il faut donc faire le même calcul auquel nous avions déjà été conduits, en ne considérant que la section de l'onde par un plan perpendiculaire au bord de l'écran (1).

Avant de calculer l'expression analytique de cette résultante, je vais d'abord tirer du principe d'Huygens les conséquences qu'on peut en déduire par de simples considérations géométriques.

Soit *A G* (*fig. 4*) un corps opaque assez étroit pour qu'on puisse distinguer des franges dans l'intérieur de son ombre à la distance *A B*. Soient *C* le point éclairant, *B D* le carton blanc sur lequel on reçoit les franges, ou le plan du foyer de la loupe avec laquelle on les observe.

Concevons l'onde primitive divisée en petits arcs, *A m*,

(1) Tant que le bord de l'écran est rectiligne, il suffit, pour déterminer les positions des bandes obscures et brillantes et leurs intensités relatives, de considérer la section de l'onde faite par un plan perpendiculaire au bord de l'écran; mais, lorsqu'il est courbe ou composé de lignes droites faisant entre elles des angles quelconques, il devient nécessaire d'intégrer suivant les deux sens rectangulaires, ou circulairement autour du point que l'on considère. Cette dernière méthode est plus simple dans quelques cas particuliers, comme lorsqu'il s'agit, par exemple, de calculer l'intensité de la lumière dans la projection du centre d'un écran ou d'une ouverture circulaire.

mm', $m'm''$, &c., Gn, nn', $n'n''$, $n''n'''$, &c., de façon que les rayons menés du point P que l'on considère dans l'intérieur de l'ombre à deux points de division consécutifs diffèrent d'une demi-ondulation. Toutes les petites ondes envoyées en P par les élémens de chacun de ces arcs seront en discordance complète avec les ondes élémentaires qui émanent des parties correspondantes des deux arcs entre lesquels il est compris; en sorte que, si tous ces arcs étaient égaux, les rayons qu'ils envoient en P se détruiraient mutuellement, à l'exception de l'arc extrême mA, dont les rayons conserveraient la moitié de leur intensité; la moitié de la lumière envoyée par l'arc mm' avec lequel il se trouve en discordance complète, étant détruite par la moitié de celle de l'arc précédent $m''m'$.

Ces arcs sont sensiblement égaux lorsque les rayons qui concourent au point P sont suffisamment inclinés par rapport à la normale. Alors l'onde résultante répond à peu près au milieu de mA, le seul arc qui produise un effet sensible, et se trouve ainsi en arrière d'un quart d'ondulation par rapport à l'onde élémentaire partie du bord A du corps opaque. La même chose ayant lieu relativement à l'autre partie Gn de l'onde incidente, le degré d'accord ou de discordance entre les vibrations lumineuses qui se manifeste au point P, se trouve déterminé par la différence de longueur entre les deux rayons sP et tP qui émanent des milieux des arcs Am et Gn, ou, ce qui revient au même, par la différence entre les deux rayons AP et GP partis des bords mêmes du corps opaque. Ainsi, lorsque les franges intérieures que l'on considère sont suffisamment éloignées des bords de l'ombre géométrique, on peut leur appliquer sans erreur sensible la formule basée sur l'hypothèse que les ondes infléchies ont leurs centres aux bords mêmes du corps opaque. Mais, à mesure que le point P se rapproche de B, l'arc Am devient plus grand par rapport à l'arc mm', l'arc mm' par rapport à l'arc $m'm''$, &c.; et de

même, dans l'arc *m A*, les élémens qui avoisinent le point *A* deviennent sensiblement plus grands que ceux situés vers le point *m*, et répondant à des différences égales de chemins parcourus. Il en résulte que le rayon *efficace* *s P* (1) ne doit plus être la moyenne entre les rayons extrêmes *m P* et *A P*, mais se rapprocher davantage de la longueur de celui-ci. De l'autre côté du corps opaque, au contraire, la différence entre le rayon *G P* et le rayon efficace *t P* approche d'autant plus d'être exactement égale à un quart d'ondulation, que le point *P* s'éloigne davantage de *D*. Ainsi la différence des chemins parcourus varie plus rapidement entre les rayons efficaces *s P* et *t P* qu'entre les rayons *A P* et *G P*; par conséquent, les franges qui avoisinent le point *B*, doivent être un peu moins éloignées du centre de l'ombre que ne l'indique la formule fondée sur la première hypothèse.

Après avoir examiné le cas où les franges sont produites par un corps étroit, je passe à celui où elles le sont par une petite ouverture.

Soit *A G* (*fig. 5*) l'ouverture par laquelle on fait passer la lumière : je la suppose d'abord assez étroite pour que les bandes obscures du premier ordre soient dans l'intérieur de l'ombre géométrique de l'écran et suffisamment éloignées des bords *B* et *D*. Soit *P* le point le plus sombre d'une de ces deux bandes; il est aisé de voir qu'il doit répondre à une différence d'une ondulation entre les deux rayons extrêmes *A P* et *P G*. En effet, si l'on conçoit un autre rayon *P I* mené de façon que sa longueur soit moyenne entre celle des deux autres, en conséquence de leur obliquité prononcée sur l'arc *A I G*, le point *I* en sera à peu près le milieu. Cet arc se trouvera donc composé de deux autres, dont les élémens

(1) J'appelle ainsi celui qui mesure la distance de l'onde résultante à l'onde primitive, parce que la situation des bandes obscures et brillantes est la même que si ces rayons *efficaces* concouraient seuls à leur production.

correspondans seront sensiblement égaux, et enverront au point *P* des vibrations contraires qui devront par conséquent se détruire mutuellement.

Il est aisé de voir, par des raisonnemens semblables, que les points les plus sombres des autres bandes obscures répondent à des différences d'un nombre pair de demi-ondulations entre les rayons partant des deux bords du diaphragme, et les points les plus éclairés des bandes brillantes, à des différences d'un nombre impair de demi-ondulations, c'est-à-dire qu'elles doivent être situées dans des positions absolument inverses de celles que l'on conclurait des accords ou des discordances des rayons extrêmes, dans l'hypothèse où ils concourraient seuls à la production des franges, à l'exception cependant de la bande du milieu, qui doit être brillante dans un système comme dans l'autre. L'expérience confirme les conséquences déduites de celui où l'on considère les franges comme résultant du concours des vibrations de tous les points de l'arc *A G*, et contredit par conséquent le système d'après lequel on les regarderait comme produites uniquement par les rayons infléchis et réfléchis sur les bords mêmes du diaphragme. Ce sont aussi les premiers phénomènes qui m'ont fait reconnaître l'inexactitude de cette hypothèse, et m'ont conduit à la théorie dont je viens d'exposer le principe fondamental, qui n'est autre que celui d'Huygens, combiné avec le principe des interférences.

Dans le cas que nous venons de considérer, où les bandes obscures du premier ordre sont rejetées par la petitesse de l'ouverture à une distance assez considérable des bords de l'ombre géométrique, il résulte de la théorie, comme de l'expérience, que l'espace compris entre leurs points les plus sombres est à très-peu près le double des autres intervalles entre les milieux de deux bandes obscures consécutives, et d'autant plus exactement que l'ouverture est plus étroite ou

le diaphragme plus éloigné du point lumineux et du foyer de la loupe avec laquelle on observe les franges; car, en augmentant suffisamment ces distances, on peut produire les mêmes effets avec une ouverture d'une largeur quelconque.

Mais, lorsque ces distances ne sont pas assez considérables, et que l'ouverture est trop large pour que les rayons qui concourent à la formation des franges soient suffisamment inclinés sur l'onde lumineuse *A G*, il arrive que les élémens correspondans des arcs dans lesquels nous l'avons supposée divisée, ne peuvent plus être considérés comme égaux entre eux, mais sont sensiblement plus larges du côté le plus voisin de la bande que l'on considère. Alors on ne peut plus déduire rigoureusement de la théorie la position des *maxima* ou *minima* d'intensité de lumière, qu'en calculant la résultante de toutes les petites ondes élémentaires qui émanent de l'onde incidente.

Mais il est un cas très-remarquable où la connaissance de cette intégrale n'est pas nécessaire pour déterminer la loi des franges produites par une ouverture d'une largeur beaucoup plus considérable : c'est lorsqu'on place devant le diaphragme une lentille qui porte le foyer des rayons réfractés sur le plan dans lequel on observe les franges. Alors le centre de courbure de l'onde émergente se trouve dans ce plan, au lieu d'être au point lumineux; ce qui simplifie beaucoup le problème.

Soit *O* la projection du milieu de l'ouverture sur ce plan; si du point *O* comme centre, et d'un rayon égal à *A O*, on décrit l'arc *A I' G*, il représentera l'onde incidente telle qu'elle se trouve modifiée par l'interposition de la lentille. Maintenant, si du point *P* comme centre, et d'un rayon égal à *A P*, on décrit l'arc *A E F*, les parties des rayons lumineux qui concourent au point *P* comprises entre l'arc *A I' G* et l'arc *A E F* seront les différences des chemins parcourus par les ondes

élémentaires. Or, ces deux arcs ayant des courbures égales et tournées dans le même sens, il s'ensuit qu'à des intervalles égaux sur l'onde $AI'G$ répondront des différences égales dans les chemins parcourus. Si donc on suppose cette onde divisée de manière que deux rayons consécutifs menés par les points de division diffèrent d'une demi-ondulation, lorsque le point P sera placé de façon que le nombre de ces arcs soit pair, il ne recevra plus de lumière, puisque les effets produits par ces arcs se détruiront deux à deux, les vibrations de leurs élémens correspondans étant à-la-fois d'égale intensité et en discordance complète. La lumière envoyée au point P parviendra, au contraire, à son *maximum* d'intensité quand ces arcs seront en nombre pair. Il en résulte que les points les plus éclairés des bandes brillantes répondront à une différence d'un nombre impair de demi-ondulations entre les rayons partis des deux bords du diaphragme; et les points les plus sombres des bandes obscures, à une différence d'un nombre pair de demi-ondulations. Par conséquent, toutes les bandes obscures seront également espacées entre elles, à l'exception des deux premières, dont l'intervalle sera exactement double de celui qui sépare les autres. Ce résultat, que la théorie m'avait indiqué d'avance, se trouve parfaitement confirmé par l'expérience. Je ne rapporterai qu'une observation de ce genre faite dans une lumière rouge homogène. Pour porter le centre de l'onde incidente sur le micromètre, au lieu d'une lentille ordinaire, j'ai employé un verre à surface cylindrique, que j'ai placé de manière que la droite génératrice fût parallèle aux bords de l'ouverture du diaphragme, afin de conserver aux franges toute leur longueur.

Largeur de l'ouverture.................................... $2^{mm},00$.

Distance du point lumineux au diaphragme, ou a.......... $2^{m},507$.

Distance du diaphragme au micromètre, ou b.............. $1^{m},140$.

Intervalle entre les milieux des deux bandes obscures du 1.er ordre. 0mm,72.

Entre la bande du 1.er ordre et celle du 3.e.................. 0mm,73.

Entre celle du 3.e et celle du 5.e......................... 0mm,72.

On voit que le premier intervalle est égal aux doubles intervalles suivans.

J'observai la même loi, et à des distances aussi peu considérables, avec des ouvertures beaucoup plus larges, par exemple, d'un centimètre et même d'un centimètre et demi. Mais, en augmentant davantage l'ouverture du diaphragme, les franges devenaient confuses, quelque soin que je misse à bien placer le micromètre au foyer du verre cylindrique; ce qui tenait à ce que les rayons réfractés par ce verre ne vibraient sensiblement d'accord qu'entre des limites assez rapprochées, comme cela a lieu pour les lentilles ordinaires.

Lorsque l'ouverture du diaphragme ainsi combiné avec un verre cylindrique n'est pas trop considérable, les bandes obscures et brillantes sont aussi prononcées que les franges produites par le concours des rayons réfléchis sur deux miroirs. Mais dans celles-ci l'intensité de la lumière reste la même pour toutes les franges, ou du moins les différences qu'on aperçoit tiennent uniquement à ce que la lumière employée n'est jamais d'une homogénéité parfaite; et si, d'une part, les bandes brillantes perdent par degrés une partie de leur éclat, les bandes obscures deviennent moins sombres; en sorte que la somme de lumière d'une frange entière reste sensiblement la même. Dans l'autre phénomène, au contraire, on observe, en s'éloignant du centre, une diminution rapide de la lumière, dont il est aisé de se rendre compte par la théorie que nous venons d'exposer. En effet, tous les rayons émanés de l'onde $A\,I'\,G$ qui concourent au milieu de la bande brillante du premier ordre, se trouvent avoir parcouru des chemins égaux; en sorte que toutes les petites ondes élémentaires qu'ils

apportent en ce point coïncident et se fortifient mutuellement. Il n'en est pas de même des autres bandes brillantes. Le point le plus éclairé de celle du second ordre, par exemple, répond à la division de l'onde $A\,I'\,G$ en trois arcs, dont les rayons extrêmes diffèrent d'une demi-ondulation; les effets produits par deux de ces arcs se neutralisant mutuellement, ce point ne reçoit de lumière que du troisième, dont les vibrations se détruisent même en partie, à cause de la différence d'une demi-ondulation entre ses rayons extrêmes. Un raisonnement semblable fait voir que le milieu de la bande brillante du troisième ordre ne doit être éclairé que par un cinquième de l'onde $A\,I'\,G$, dont la lumière est encore affaiblie par la discordance des rayons partis des points voisins de ses extrémités.

Reprenons le cas général des franges qui proviennent d'une ouverture étroite, sans que la courbure de l'onde incidente soit changée par l'interposition d'une lentille. Parmi les principaux phénomènes de diffraction, aucun ne présente des effets plus variés et plus compliqués. Néanmoins, sans connaître la nature de l'intégrale qui nous servira bientôt à déterminer la position et l'intensité des bandes obscures et brillantes, nous pouvons déjà résoudre un problème intéressant. *L'ouverture du diaphragme variant, quelles sont les variations que doivent éprouver les distances du diaphragme au point lumineux et au micromètre, pour que les franges conservent les mêmes largeurs et les mêmes rapports d'intensité!*

Soient $A\,G$ et $A'\,G'$ (*fig. 6*), les deux petites ouvertures inégales par lesquelles on fait passer la lumière. Je suppose que les points lumineux C et C' et les plans d'observation $P\,O$ et $P'\,O'$ se trouvent placés aux distances convenables pour que les franges soient absolument pareilles dans les deux cas. Soient P et P' deux points correspondans de la même frange; on doit avoir $P\,O = P'\,O'$, O et O' étant les projections des milieux

des deux ouvertures sur les plans PO et $P'O'$. Si des points C et C' comme centres, avec des rayons égaux à CA et $C'A'$, on décrit des arcs de cercle AIG et $A'I'G'$, et si l'on décrit ensuite des points O et O' comme centres les arcs tangens FIH, $F'I'H'$, les intervalles entre les premiers et les seconds seront les différences des chemins parcourus par les rayons qui concourent aux points O et O': or, pour que la résultante des ondes élémentaires qui émanent des différens points de l'onde incidente, présente les mêmes variations d'intensité, il faut qu'elle soit composée d'élémens semblables; et cette condition sera remplie si l'on a $AF = A'F'$. En effet, il en résulte d'abord que pour O et O' les différences des chemins parcourus par les rayons qui émanent des points correspondans des ondes AIG et $A'I'G'$ seront égales; par conséquent, si l'on conçoit les deux ondes divisées en petits arcs proportionnels, les vibrations qu'ils enverront en O et O' auront précisément entre elles les mêmes degrés d'accord et de discordance, et les deux résultantes seront ainsi composées d'élémens pareils. On voit aisément qu'il doit en être de même pour tous les autres points correspondans P et P', situés de façon que les droites CP et $C'P'$ divisent les ondes AG et $A'G'$ en parties proportionnelles. Par conséquent, la résultante des ondes élémentaires suit la même loi dans les deux cas.

Cela posé, je représente les largeurs AG et $A'G'$ des deux ouvertures par c et c', les distances CI et $C'I'$ par a et a', et IO et $I'O'$ par b et b'. Les droites CP et $C'P'$ divisant les arcs AG et $A'G'$ en parties proportionnelles, on a,

$$AG : A'G' \text{ ou } c : c' :: MI : M'I', \text{ d'où } \frac{c}{c'} = \frac{MI}{M'I'}.$$

Mais on a en outre les deux proportions,

$$CI : CO \text{ ou } a : a+b :: MI : PO,$$
$$\text{et } C'I' : C'O' \text{ ou } a' : a'+b' :: M'I' : P'O';$$

d'où l'on tire, $PO = \frac{MI(a+b)}{a}$, et $P'O' = \frac{M'I'(a'+b')}{a'}$.

Ces deux largeurs étant égales par hypothèse, on a :

$$\frac{MI(a+b)}{a} = \frac{M'I'(a'+b')}{a'}, \text{ ou } \frac{MI}{M'I'} = \frac{a(a'+b')}{a'(a+b)}.$$

Or $\frac{MI}{M'I'} = \frac{c}{c'}$; on a donc $\frac{c}{c'} = \frac{a(a'+b')}{a'(a+b)}$,

ou $ac'(a'+b') = a'c(a+b)$. Telle est la première équation de condition.

Il en faut encore une autre pour exprimer l'égalité des intervalles AF et $A'F'$. A cause de la petitesse des arcs AG et FH, $A'G'$ et $F'H'$, on a,

$$AF = \frac{AI^2}{2CI} + \frac{AI^2}{2OI} = \frac{1}{8}\left(\frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right) = \frac{1}{8}\,\frac{c^2(a+b)}{ab},$$

de même $A'F' = \frac{1}{8}\,\frac{c'^2(a'+b')}{a'b'}$;

par conséquent, la seconde équation de condition est,

$$\frac{c^2(a+b)}{ab} = \frac{c'^2(a'+b')}{a'b'}.$$

En combinant ces deux équations, on trouve les formules,

$b' = \frac{bc'}{c}$ et $a' = \frac{ab'^2}{b(a+b) - ab'}$, ou $a' = \frac{abc'^2}{c^2(a+b) - acc'}$,

au moyen desquelles on peut calculer les distances a' et b', la largeur c' de la seconde ouverture étant donnée.

Il est à remarquer que l'équation $b' = \frac{bc'}{c}$ donne la proportion, $b : b' :: c : c'$; c'est-à-dire qu'une des conditions de l'égalité des franges est que les distances du diaphragme au micromètre soient proportionnelles aux largeurs des ouvertures.

J'ai vérifié l'exactitude de cette loi par l'expérience suivante. La largeur de l'ouverture étant d'abord de deux millimètres,

sa distance au point lumineux de $3^m,008$, et sa distance au micromètre de $1^m,236$, je me suis proposé de produire les mêmes franges avec une ouverture de $1^{mm},50$. D'après les formules ci-dessus, sa distance au point lumineux devait être de $1^m,052$; et sa distance au micromètre, de $0^m,927$.

Le tableau suivant présente à-la-fois les résultats de la première et de la seconde observation. On voit qu'elles s'accordent parfaitement.

NUMÉROS des bandes obscures en partant du centre.	NOTES communes aux deux observations.	DISTANCES du centre aux points les plus sombres des bandes obscures. 1.re observation.	2.e observation.	DIFFÉRENCES.
		mm.	mm.	mm.
1.	Grosse bande.	0.	0.	0.
	Brillant.			
2.	Très-pâle.	0,63.	0,63.	0.
	Brillant.			
3.	*Minimum* peu prononcé.	1,11.	1,11.	0.
	Sombre.			
4.	*Minimum* peu prononcé.	1,53.	1,54.	+ 0,01.
	Obscur.			
5.	Très-obscur.	1,96.	1,96.	0.

On peut faire sur les franges produites par des corps opaques très-étroits, des raisonnemens analogues à ceux que nous venons de faire pour les petites ouvertures. En représentant les mêmes distances par les mêmes lettres, et la largeur du corps étroit par c, comme celle de la petite ouverture, on est conduit aux mêmes formules :

$$b' = \frac{bc'}{c} \text{ et } a' = \frac{abc'^2}{(a+b)c^2 - acc'}.$$

J'ai encore vérifié la loi dans ce cas par l'expérience. Après avoir employé un fil d'acier de $1^{mm},325$ de diamètre, placé à $3^{m},047$ du point lumineux, et à $3^{m},526$ du micromètre, je me suis servi d'un autre fil d'acier qui avait seulement $0^{mm},78$ de diamètre, et j'ai disposé ce fil et le micromètre par rapport au point lumineux, de façon que a' fût égal à $0^{m},779$, et b' à $2^{m},078$, valeurs calculées d'après les formules ci-dessus. Voici les résultats de ces deux observations :

NUMÉROS des bandes obscures en partant du centre.	NOTES communes aux deux observations.	DISTANCES du centre aux points les plus sombres des bandes obscures. 1.re observation.	2.e observation.	DIFFÉRENCES.
Bandes intérieures.				
1.	Très-noire.	mm. 0,76.	mm. 0,74.	mm. + 0,02.
2.	....	2,12.	2,13.	— 0,01.
3.	Extrêmement pâle.	3,37.	3,40.	— 0,03.
Bandes extérieures				
4 (1.re)	Étroite.	4,31.	4,32.	— 0,01.
5 (2.e)	*Idem.*	5,75.	5,77.	— 0,02.
6 (3.e)	Très-vague.	″	″	″
7 (4.e)	....	7,54.	7,58.	— 0,04.

Ces deux observations ne s'accordent pas aussi bien que celles du tableau précédent ; mais les différences n'excèdent pas cependant les limites des inexactitudes que comportent les mesures, en raison de la largeur des franges.

Les franges produites par une ouverture ou un corps opaque très-étroit ne varient pas seulement de grandeur absolue lorsqu'on fait varier a ou b, mais encore de positions et d'intensités relatives; en sorte que l'aspect du phénomène change entièrement. Cela vient de ce que la résultante des vibrations envoyées par l'onde lumineuse n'est plus composée d'élémens semblables. Au contraire, les bandes obscures et brillantes qui bordent l'ombre d'un écran indéfiniment étendu, sont toujours disposées de la même façon, et présentent les mêmes rapports dans leurs intensités et les intervalles qui les séparent. La raison en est facile à apercevoir.

Soit AB et $A'B'$ (*fig. 7*) le corps opaque dans deux positions différentes relativement au point lumineux et au micromètre, ou au plan sur lequel on reçoit les franges. Le point lumineux et ce plan sont en C et TP dans le premier cas, je suppose, et en C' et $T'P'$ dans le second. Soit P un point quelconque pris sur le plan TP; on peut toujours, dans l'autre plan $P'T'$, trouver un point P' pour lequel la résultante des vibrations envoyées par l'onde incidente soit composée d'élémens semblables. Des points C et C' comme centres et avec des rayons égaux à CA et $C'A'$, je décris les arcs AMI et $A'M'I'$, qui représentent l'onde incidente; et des points P et P' comme centres, je décris les arcs tangens EMF, $E'M'F'$; les intervalles entre ceux-ci et les précédens donnent les différences des chemins parcourus par les rayons qui concourent en P et P'. Pour que les mouvemens lumineux qui se manifestent aux points P et P' soient composés de vibrations élémentaires semblables, ayant entre elles les mêmes degrés d'accord ou de discordance, il suffit que les intervalles AF et $A'F'$ soient égaux; car, si l'on conçoit les deux ondes incidentes divisées en parties proportionnelles aux arcs AM et $A'M'$, la différence des chemins parcourus sera la même alors pour tous les rayons partis des

points de division correspondans. En raison de la petitesse des arcs AM et MF, $A'M'$ et $M'F'$, on a,

$$AF = \frac{AM^2}{2.MC} + \frac{AM^2}{2MP}, \text{ ou } AF = AM^2\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right),$$

$$\text{et } A'F' = A'M'^2\left(\frac{1}{2a'} + \frac{1}{2b'}\right).$$

On a donc, $AM^2\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right) = A'M'^2\left(\frac{1}{2a'} + \frac{1}{2b'}\right)$;

mais les triangles semblables CAM et CTP donnent,

$$AM = \frac{a.TP}{a+b}.$$

On trouve de même, $A'M' = \frac{a'.T'P'}{a'+b'}$.

Substituant ces valeurs dans l'équation précédente, on a pour l'équation de condition, entre TP et $T'P'$,

$$T'P' = TP.\frac{\sqrt{\frac{2b'(a'+b')}{a'}}}{\sqrt{\frac{2b(a+b)}{a}}}.$$

Il en résulte que les variations de $T'P'$ seront proportionnelles à celles de TP, et que par conséquent les parties correspondantes des franges seront situées d'une manière absolument semblable dans les deux cas. Voilà pourquoi les intervalles entre les bandes obscures ou brillantes, et leurs intensités, conservent toujours les mêmes rapports, quelles que soient les valeurs de a et de b (1).

Je suppose que le point P, que l'on considère, soit, par

(1) En regardant les franges extérieures d'un fil de soie aussi près que possible de leur origine avec une lentille d'une ligne de foyer, il m'a semblé que les rapports des intervalles étaient un peu changés; mais il est clair que cette loi doit changer lorsque b ou a deviennent très-petits, puisque, les rayons qui concourent à la production des franges ayant alors des inclinaisons très-sensibles, l'hypothèse sur laquelle elle repose n'est plus exacte. Il est possible encore qu'à une distance aussi petite la lumière réfléchie par le fil influe d'une manière sensible sur le phénomène et en altère la loi.

exemple, le point le plus sombre de la bande obscure du premier ordre, et qu'on représente par δ l'intervalle AF, qui répond à ce *minimum*; on aura,

$$\delta = AM\left(\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}\right);$$

$$\text{mais } AM = \frac{a.TP}{a+b}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, on en tire

$$TP = \sqrt{\frac{2b(a+b)\delta}{a}}.$$

Cette formule est absolument semblable à celle que nous avons trouvée, en supposant que les franges extérieures sont produites par le concours des rayons directs et des rayons réfléchis sur le bord de l'écran. On voit qu'il résulte de la nouvelle théorie, comme de la première hypothèse, que les valeurs de TP correspondantes aux différentes valeurs de b ne leur sont pas proportionnelles, mais sont les ordonnées d'une hyperbole dont celles-ci seraient les abscisses.

Je viens d'exposer les rapports généraux qui existent entre les largeurs d'une même frange, lorsqu'on donne au corps opaque des positions diverses par rapport au point lumineux ou au micromètre. Nous avons vu que ces lois pouvaient se déduire de la théorie, indépendamment de la connaissance de l'intégrale qui doit représenter dans chaque point la résultante de toutes les vibrations élémentaires : mais, pour trouver la largeur absolue de ces franges, il est indispensable de calculer cette résultante; car on ne peut déterminer la position des *maxima* et *minima* d'intensité de lumière que par la comparaison de ses différentes valeurs, ou du moins par la connaissance de la fonction qui la représente. Pour y parvenir, nous allons appliquer au principe de Huygens la méthode que nous avons indiquée pour calculer la résultante

d'un nombre quelconque de systèmes d'ondes lumineuses, dont les intensités et les positions relatives sont données.

Application de la Théorie des interférences au Principe de Huygens.

Soit *C* (*fig.* 8), un point lumineux dont les ondes se trouvent interceptées en partie par le corps opaque *A G*. Je suppose d'abord que cet écran est assez étendu pour que la lumière qui vient du côté *G* soit sensiblement nulle; en sorte que l'on n'ait à considérer que la partie de l'onde située à gauche du point *A*. *D B* représente le plan sur lequel on reçoit l'ombre et les franges dont elle est bordée; il s'agit de trouver l'expression de l'intensité de la lumière dans un point quelconque *P* de ce plan.

Si du point *C* comme centre, et d'un rayon égal à *C A*, on décrit l'arc de cercle *A M I*, il représentera l'onde lumineuse au moment où elle se trouve interceptée en partie par le corps opaque. C'est dans cette position que je la considère pour calculer la résultante des vibrations élémentaires envoyées en *P*. Si l'on partait d'une position antérieure *A' M' I'*, il faudrait déterminer l'effet produit par l'interposition du corps *A G* sur chacune des ondes élémentaires émanées de l'arc *A' M' I'*, et si l'on considérait l'onde dans une situation postérieure *A" M" I"*, il faudrait d'abord déterminer les intensités relatives de ses différens points, dont l'égalité aurait déjà été altérée par l'interposition de l'écran; ce qui rendrait les calculs beaucoup plus compliqués et peut-être impraticables. En prenant l'onde, au contraire, au moment où elle arrive en *A*, les élémens du calcul sont très-simples, parce que toutes ses parties ont encore la même intensité, et qu'en outre les ondes élémentaires qui en émanent ne peuvent plus éprouver d'altération de la part du corps opaque. Quelque

nombreuses que soient les subdivisions que l'on peut encore imaginer dans ces ondes élémentaires, il est clair qu'elles seront alors les mêmes pour chacune, puisqu'elles se propagent librement dans toutes les directions. Il suffit donc de considérer les axes de ces faisceaux de rayons brisés, c'est-à-dire, les lignes droites menées en P des divers points de l'onde AMI, et les différences de longueurs de ces rayons directs donneront les différences des chemins parcourus par les résultantes élémentaires qui concourent au point P (1).

Cela posé, pour calculer leur résultante totale, je les rapporte à l'onde émanée du point M situé sur la droite CP,

---

(1) Par des raisonnemens semblables, on peut démontrer mathématiquement, sans effectuer les calculs, que le résultat doit toujours être le même, soit que l'on considère l'onde génératrice à l'instant où elle atteint le bord de l'écran, soit qu'on l'envisage dans une position antérieure ou postérieure, en ayant égard, dans le premier cas, aux modifications que les ondes élémentaires éprouvent de la part de l'écran, et, dans le second, à celles que l'onde génératrice a déjà éprouvées. En y réfléchissant un peu, on reconnaîtra que ces diverses manières de calculer la résultante ne diffèrent que par la manière de grouper les vibrations élémentaires dans lesquelles on divise l'ébranlement primitif, et qu'on doit toujours arriver à la même valeur de l'intensité de la lumière au point P, s'il résulte de cette théorie, comme de toutes les autres, que la vitesse d'oscillation des molécules du fluide est en raison inverse de la distance au centre d'ébranlement. Or c'est ce que nous pouvons déjà vérifier sans connaître l'expression de l'intégrale qui représente cette vîtesse.

Prenons pour unité de distance celle du point lumineux à l'onde génératrice dans une première position, et pour unité d'intensité d'oscillation, celle de l'onde dans la même position. Considérons maintenant un point situé au-delà, à une distance x du point lumineux, et par conséquent à une distance $x-1$ de l'onde génératrice, et un autre à une distance x' du point lumineux, et par conséquent à une distance $x'-1$ de l'onde génératrice, et cherchons successivement la résultante de toutes les vibrations élémentaires envoyées dans ces deux points par l'onde génératrice. Nous ne savons pas quelle est leur intensité pour un élément $dz\,dy$ de cette onde; mais nous savons que leur vîtesse d'oscillation doit diminuer comme la distance augmente, et que, si elle est $\frac{1}{x-1}$, par exemple, dans le premier point, elle sera $\frac{1}{x'-1}$ dans le second. Cela posé, pour comparer plus aisément les deux résultantes, concevons successivement,

et à une autre onde distante de celle-ci d'un quart d'ondulation, d'après le procédé que j'ai indiqué, en donnant la solution du problème des interférences. Je représente par dz une quelconque des petites parties $n\,n'$ de l'onde primitive, et par z sa distance au point M, ne considérant que la section de l'onde dans le plan perpendiculaire au bord de l'écran; ce qui suffit pour déterminer la position et les intensités *relatives* des bandes obscures et brillantes, ainsi que je l'ai démontré. L'intervalle $n\,s$ compris entre l'onde $A\,M\,I$ et l'arc tangent $E\,M\,F$ décrit du point P comme centre, sera égal à $\frac{1}{2}\,\frac{z^2(a+b)}{a\,b}$, a et b exprimant toujours les distances $C\,A$ et $A\,B$. Si l'on représente par λ la longueur d'une ondulation,

dans les deux cas, l'onde génératrice divisée en élémens qui répondent pour les deux points à des différences égales entre les chemins parcourus : alors leurs degrés d'accord ou de discordance seront les mêmes. Dans les petites obliquités où ces rayons peuvent produire des effets sensibles, la différence de longueur de chacun d'eux avec le rayon normal est proportionnelle au carré de l'intervalle entre les points dont ils émanent : ainsi les élémens correspondans des deux divisions seront proportionnels entre eux. On trouve, par un calcul géométrique fort simple, que les dimensions des élémens de la division relative au premier point sont aux dimensions des élémens relatifs au second,

$$\text{comme } \sqrt{\frac{x-1}{x}} \text{ est à } \sqrt{\frac{x'-1}{x'}}.$$

Les surfaces des élémens correspondans seront donc entre elles comme $\frac{x-1}{x}$ est à $\frac{x'-1}{x'}$; et par conséquent les deux résultantes seraient dans le même rapport, si les rayons avaient une intensité égale dans les deux cas : mais nous venons de remarquer que la vitesse d'oscillation des rayons envoyés dans le premier point est à celle des rayons envoyés dans le second, comme $\frac{1}{x-1}$: $\frac{1}{x'-1}$; ainsi la première résultante sera à la seconde comme $\frac{x-1}{x}\cdot\frac{1}{x-1}$ est à $\frac{x'-1}{x'}\cdot\frac{1}{x'-1}$, ou comme $\frac{1}{x}$ est à $\frac{1}{x'}$, c'est-à-dire, en raison inverse des distances de ces deux points au point lumineux. *C. Q. F. D.*

on aura, pour la composante de l'onde que l'on considère, rapportée à l'onde émanée du point *M*,

$$dz.\cos\left(\pi.\frac{z^2(a+b)}{ab.\lambda}\right);$$

et pour l'autre composante rapportée à une onde distante d'un quart d'ondulation de la première,

$$dz.\sin\left(\pi.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right).$$

En faisant la somme des composantes semblables de toutes les autres ondes élémentaires, on a donc,

$$\int dz.\cos\left(\pi\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right) \text{ et } \int dz.\sin\left(\pi.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right);$$

et par conséquent la résultante générale de tous ces petits mouvemens, ou l'intensité des vibrations lumineuses au point *P*, est égale à

$$\sqrt{\left(\int dz.\cos\left(\pi\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right)^2+\left(\int dz.\sin\left(\pi.\left(\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right)\right)^2}.$$

Quant à l'intensité de la sensation, comme elle doit être proportionnelle au carré des vîtesses qui animent les molécules du fluide, son expression sera,

$$\left(\int dz.\cos\left(\pi\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right)^2+\left(\int dz.\sin\left(\pi.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right)^2.$$

C'est ce que j'appellerai l'*intensité de la lumière*, pour me conformer à l'acception la plus ordinaire de ce mot, réservant l'expression *intensité des vibrations* pour désigner le degré de vîtesse des molécules éthérées dans leurs oscillations.

Dans le cas que nous considérons, où le corps *A G* est assez étendu pour qu'on puisse négliger la lumière qui vient du côté *G*, les intégrales doivent être prises depuis *A* jusqu'à l'infini du côté *I*. Elles se divisent naturellement en deux parties, l'une comprise entre *A* et *M*, et l'autre entre *M* et

l'infini. Celle-ci reste constante, tandis que la première varie avec la position du point P; ce sont ces variations qui déterminent la largeur et les intensités relatives des bandes obscures et brillantes.

L'analyse donne l'expression finie des intégrales

$$\int dz.\cos\left(\pi.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right) \text{ et } \int dz.\sin\left(\pi.\left(\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right),$$

prises depuis $z = 0$ jusqu'à $z = \infty$; mais on ne peut avoir leur valeur entre d'autres limites que par le moyen des séries ou des intégrations partielles. C'est par ce dernier procédé, qui m'a paru le plus commode, que j'ai calculé la table suivante, en rapprochant assez les limites de chaque intégrale partielle pour pouvoir négliger le carré de la moitié de l'arc qu'elles comprennent (1). Cet arc est ici d'un dixième de quadrans; ce qui donne dans les résultats une exactitude plus grande que celle à laquelle peuvent atteindre les observations. J'ai substitué, pour plus de simplicité, aux intégrales ci-dessus, $\int dv.\cos q.v^2$ et $\int dv.\sin q.v^2$, q représentant le quadrans ou $\frac{1}{2}\pi$, vu qu'il est très-facile de passer des unes aux autres.

---

(1) i et $i+t$ étant les limites très-rapprochées entre lesquelles il faut intégrer $dv.\cos qv^2$ et $dv.\sin qv^2$, on trouve, pour les formules approximatives qui donnent ces intégrales, en négligeant le carré de $\frac{1}{2}t$,

$$\int dv \cos qv^2 = \frac{1}{2q(i+t)}\left[\sin q(i+t)(i+3t) - \sin q(i+t)(i-t)\right],$$

$$\int dv.\sin qv^2 = \frac{1}{2q(i+t)}\left[-\cos q(i+t)(i+3t) + \cos q(i+t)(i-t)\right].$$

Ce sont ces formules que j'ai employées dans le calcul de la table.

Lorsque t est assez petit pour qu'on puisse négliger son carré, au lieu de négliger seulement le carré de sa moitié, on peut se servir des formules suivantes, qui sont plus simples :

$$\int dv.\cos qv^2 \begin{pmatrix} v=i \\ v=i+t \end{pmatrix} = \frac{1}{2iq}\left[\sin qi(i+2t) - \sin qi^2\right].$$

$$\int dv.\sin qv^2 \begin{pmatrix} v=i \\ v=i+t \end{pmatrix} = \frac{1}{2iq}\left[-\cos qi(i+2t) + \cos qi^2\right].$$

TABLEAU

Des Valeurs numériques des Intégrales $\int dv.\cos qv^2$ *et* $\int dv.\sin qv^2$.

LIMITES des intégrales.	$\int dv. \cos q v^2$.	$\int dv. \sin q v^2$.	LIMITES des intégrales.	$\int dv. \cos q v^2$.	$\int dv. \sin q v^2$.
de $v = 0^q$			de $v = 0^q$.		
à $v = 0^q,10$.	0,0999.	0,0006.	à $v = 2^q,90$.	0,5627.	0,4098.
à $v = 0,20$.	0,1999.	0,0042.	à 3,00.	0,6061.	0,4959.
0,30.	0,2993.	0,0140.	3,10.	0,5621.	0,5815.
0,40.	0,3974.	0,0332.	3,20.	0,4668.	0,5931.
0,50.	0,4923.	0,0644.	3,30.	0,4061.	0,5191.
0,60.	0,5811.	0,1101.	3,40.	0,4388.	0,4294.
0,70.	0,6597.	0,1716.	3,50.	0,5328.	0,4149.
0,80.	0,7230.	0,2487.	3,60.	0,5883.	0,4919.
0,90.	0,7651.	0,3391.	3,70.	0,5424.	0,5746.
1,00.	0,7803.	0,4376.	3,80.	0,4485.	0,5654.
1,10.	0,7643.	0,5359.	3,90.	0,4226.	0,4750.
1,20.	0,7161.	0,6229.	4,00.	0,4986.	0,4202.
1,30.	0,6393.	0,6859.	4,10.	0,5739.	0,4754.
1,40.	0,5439.	0,7132.	4,20.	0,5420.	0,5628.
1,50.	0,4461.	0,6973.	4,30.	0,4497.	0,5537.
1,60.	0,3662.	0,6388.	4,40.	0,4385.	0,4620.
1,70.	0,3245.	0,5492.	4,50.	0,5261.	0,4339.
1,80.	0,3342.	0,4509.	4,60.	0,5674.	0,5158.
1,90.	0,3949.	0,3732.	4,70.	0,4917.	0,5668.
2,00.	0,4886.	0,3432.	4,80.	0,4340.	0,4965.
2,10.	0,5819.	0,3739.	4,90.	0,5003.	0,4347.
2,20.	0,6367.	0,4553.	5,00.	0,5638.	0,4987.
2,30.	0,6271.	0,5528.	5,10.	0,5000.	0,5620.
2,40.	0,5556.	0,6194.	5,20.	0,4390.	0,4966.
2,50.	0,4581.	0,6190.	5,30.	0,5078.	0,4401.
2,60.	0,3895.	0,5499.	5,40.	0,5573.	0,5136.
2,70.	0,3929.	0,4528.	5,50.	0,4785.	0,5533.
2,80.	0,4678.	0,3913.			

$\int dv \cos qv^2$ et $\int dv \sin qv^2$, prises depuis zéro jusqu'à l'infini, sont égales l'une et l'autre à $\frac{1}{2}$. Ainsi, pour avoir, à

l'aide de cette table, l'intensité de lumière qui répond à une position donnée du point *P*, ou, ce qui revient au même, à une valeur déterminée de v considérée comme une des limites de l'intégration poussée de l'autre part jusqu'à l'infini, il faut chercher dans la table les valeurs de $\int dv.\cos q v^2$ et $\int dv.\sin q v^2$ qui répondent à cette valeur de v, les augmenter de $\frac{1}{2}$ l'une et l'autre, et faire la somme de leurs carrés.

La seule inspection de cette table indique des variations périodiques d'intensité dans la lumière, à mesure qu'on s'éloigne du bord de l'ombre géométrique. Pour avoir les valeurs de v qui répondent aux *maxima* et *minima*, c'est-à-dire, aux points les plus éclairés et les plus sombres des bandes obscures et brillantes, j'ai d'abord cherché dans la table les nombres qui en approchaient le plus, en calculant les intensités de lumière correspondantes; ensuite, au moyen de ces données et à l'aide d'une formule approximative très-simple, j'ai déterminé avec une exactitude suffisante les valeurs de v qui répondent aux *maxima* et *minima*.

Si l'on représente par i la valeur approchée de v que donne immédiatement la table, par I et Y celles de $\frac{1}{2}+\int dv.\cos q v^2$ et $\frac{1}{2}+\int dv.\sin q v^2$ qui lui correspondent, et par t, enfin, le petit arc qu'il faut ajouter à v pour atteindre le *maximum* ou le *minimum* de lumière, en négligeant dans le calcul le carré de t, on trouve, pour la formule qui donne la valeur de t répondant au *maximum* ou au *minimum* :

$$\sin(q(i^2+2it)) = \frac{2qi.I-\sin q i^2}{\sqrt{(qiI-\sin q i^2)^2+(2qiY+\cos q i^2)^2}} \quad (1).$$

(1) Je crois devoir placer ici le calcul qui m'a conduit à cette formule, pour faire voir que les inexactitudes qu'elle comporte sont aussi petites que celles de la table.

$$\int dv.\cos q v^2 \begin{pmatrix} v=-\infty \\ v=i+t \end{pmatrix} = \int dv \cos q v^2 \begin{pmatrix} v=-\infty \\ v=i \end{pmatrix}$$

$$+\int dv.\cos q v^2 \begin{pmatrix} v=i \\ v=i+t \end{pmatrix} = I+\int dv.\cos q v^2 \begin{pmatrix} v=i \\ v=i+t \end{pmatrix};$$

En substituant dans cette formule les nombres tirés de la table, on obtient les résultats suivans :

TABLEAU

Des Maxima *et* Minima *pour les Franges extérieures, et des Intensités de lumière correspondantes.*

	VALEURS de v.	INTENSITÉS de lumière.
Maximum du 1.er ordre.........	1,2172.	2,7413.
Minimum du 1.er ordre.........	1,8726.	1,5570.
Maximum du 2.e ordre.........	2,3449.	2,3990.
Minimum du 2.e ordre.........	2,7392.	1,6867.
Maximum du 3.e ordre.........	3,0820.	2,3022.
Minimum du 3.e ordre.........	3,3913.	1,7440.
Maximum du 4.e ordre.........	3,6742.	2,2523.
Minimum du 4.e ordre.........	3,9372.	1,7783.
Maximum du 5.e ordre.........	4,1832.	2,2206.
Minimum du 5.e ordre.........	4,4160.	1,8014.
Maximum du 6.e ordre.........	4,6369.	2,1985.
Minimum du 6.e ordre.........	4,8479.	1,8185.
Maximum du 7.e ordre.........	5,0500.	2,1818.
Minimum du 7.e ordre.........	5,2442.	1,8317.

Il est à remarquer qu'aucun *minimum* n'est égal à zéro, comme dans les anneaux colorés, ou dans les franges produites

pour intégrer $\int dv. \cos q v^2$ depuis $v = i$ jusqu'à $v = i + t$, je fais $v = i + u$, et j'ai, $\int dv. \cos q v^2 \begin{pmatrix} v = i \\ v = i + t \end{pmatrix} = \int du. \cos q (i^2 + 2iu + u^2) \begin{pmatrix} u = o \\ u = t \end{pmatrix}$: or, i étant le nombre de la table le plus voisin de l'arc cherché $i + t$, t est plus petit que la moitié de l'intervalle qui sépare deux nombres consécutifs, et l'on peut par conséquent négliger son carré dans l'intégration sans commettre d'erreur plus grande que celles de la table. Ainsi, puisque l'intégrale dont il s'agit doit être prise seulement depuis $u = o$ jusqu'à $u = t$, on peut négliger u^2 dans

par le concours de deux faisceaux lumineux d'égale intensité, et que la différence entre les *maxima* et les *minima* diminue à

---

la parenthèse, et elle devient $\int du. \cos q\,(i^2+2iu)\begin{pmatrix}u=o\\u=t\end{pmatrix}$, qui est égale à

$\frac{1}{2qi}\,[\sin q\,(i^2+2it)-\sin q i^2]$; on a donc,

$$\int dv. \cos q v^2 \begin{pmatrix}v=-\infty\\v=i+t\end{pmatrix} = I + \frac{1}{2qi}\,[\sin q\,(i^2+2it)-\sin q i^2].$$

On trouve de même,

$$\int dv. \sin q v^2 \begin{pmatrix}v=-\infty\\v=i+t\end{pmatrix} = Y + \frac{1}{2qi}\,[-\cos q\,(i^2+2it)+\cos q i^2];$$

par conséquent, l'expression de l'intensité de la lumière au point que l'on considère est,

$$[I+\frac{1}{2qi}\,(\sin q\,(i^2+2it)-\sin q i^2]^2$$
$$+\,[Y+\frac{1}{2qi}\,(-\cos q\,(i^2+2it)+\cos q\,i^2)\,]^2.$$

Pour trouver la valeur de t qui répond au *maximum* ou au *minimum* de cette expression, il faut égaler à zéro son coefficient différentiel pris par rapport à t; ce qui donne l'équation de condition,

$$o=[I+\frac{1}{2qi}(\sin q\,(i^2+2it)-\sin q\,i^2)]\,[\cos q\,(i^2+2it)]$$
$$+\,[Y+\frac{1}{2qi}\,(-\cos q\,(i^2+2it)+\cos q i^2)]\,[\sin q\,(i^2+2it)].$$

Effectuant les multiplications et réduisant, elle devient

$$o=\cos q\,(i^2+2it).\,(I-\frac{1}{2qi}\sin q\,i^2)$$
$$+\sin q\,(i^2+2it).\,(Y+\frac{1}{2qi}.\cos q i^2).$$

Si l'on représente, pour abréger, $\sin q\,(i^2+2it)$ par x, $\cos q\,(i^2+2it)$ sera égal à $\sqrt{1-x^2}$: substituant et faisant disparaître les radicaux, on trouve,

$$x^2\,(Y+\frac{1}{2qi}.\cos q\,i^2)^2=(1-x)^2\,(-I+\frac{1}{2qi}\sin q\,i^2)^2;$$

d'où l'on tire,

$$x,\ \text{ou}\ \sin q\,(i^2+2it)=\frac{2qi.I-\sin q\,i^2}{\sqrt{(q.i.I-\sin q\,i^2)^2+(2qi.Y+\cos q\,i^2)^2}}.$$

mesure qu'on s'éloigne de la tangente au bord du corps opaque; ce qui explique très-bien pourquoi les franges qui bordent les ombres sont beaucoup moins vives et moins nombreuses que les anneaux colorés, ou celles qu'on obtient par la réflexion d'un point lumineux sur deux miroirs légèrement inclinés entre eux.

Pour calculer la largeur des franges extérieures à l'aide de ces nombres, il faut se rappeler que nous avons substitué les intégrales $\int dv.\cos qv^2$ et $\int dv.\sin qv^2$ aux intégrales du problème $\int dz.\cos\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)$ et $\int dz.\sin\left(2q\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)$, en faisant $2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda} = qv^2$; d'où l'on tire $z = v\sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}$; par conséquent,

$$\int dz.\cos\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right) = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}.\int dv.\cos qv^2,$$

$$\text{et } \int dz.\sin\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right) = \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}.\int dv.\sin qv^2;$$

ainsi,

$$\left[\int dz.\cos\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right]^2 = \left[\int dz.\sin\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right]^2$$
$$= \frac{ab\lambda}{2a(a+b)}\left[\left(\int dv.\cos qv^2\right)^2 + \left(\int dv.\sin qv^2\right)^2\right]:$$

or, $\frac{ab\lambda}{2a(a+b)}$ étant un facteur constant, il en résulte que les deux quantités

$$\left[\int dz.\cos\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right]^2 + \left[\int dz.\sin\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right)\right]^2$$
$$\text{et } \left(\int dv.\cos qv^2\right)^2 + \left(\int dv.\sin qv^2\right)^2$$

atteindront en même temps leur *maximum* ou leur *minimum*; et si l'on représente par n la valeur de v qui répond à un *maximum* ou à un *minimum*, la valeur correspondante de z

sera donnée par l'équation

$$z = n \sqrt{\frac{ab\lambda}{2(a+b)}}.$$

On en déduit ensuite la largeur x de la frange par la proportion $a : z :: a + b : x$, d'où l'on tire $x' = \frac{z(a+b)}{a}$, ou substituant à la place de z sa valeur,

$$x = n \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)b\lambda}{a}}.$$

Il est à remarquer que le radical est précisément la distance entre le bord de l'ombre géométrique et le point qui répond à une différence d'un quart d'ondulation entre le rayon direct et le rayon parti du bord du corps opaque. Ce résultat était facile à prévoir ; car c'est précisément la valeur correspondante de v qui a été prise pour unité dans la table des valeurs numériques des intégrales $\int dv. \cos q v^2$ et $\int dv. \sin q v^2$.

Si l'on substitue dans la formule

$$x = n \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)b\lambda}{a}},$$

à la place de n, la valeur qui correspond au *minimum* du premier ordre, c'est-à-dire, au point le plus sombre de la bande obscure du premier ordre, on a,

$$x = (1{,}873) \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)b\lambda}{a}}.$$

En partant de l'hypothèse que les franges sont produites par le concours des rayons directs et des rayons réfléchis sur le bord du corps opaque, et en supposant en outre que les rayons réfléchis éprouvent un retard d'une demi-ondulation, nous avons trouvé pour la même bande,

$$x = \sqrt{\frac{2(a+b)b\lambda}{a}} \text{ ou } x = 2 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)b\lambda}{a}};$$

ainsi ces deux valeurs sont entre elles comme 1 à 1,873. Le second résultat est sensiblement plus petit que le premier, puisqu'il y a près d'un quinzième de différence, et l'on peut en conséquence, par des observations très-précises, décider laquelle des deux théories s'accorde le mieux avec l'expérience, en se servant d'une lumière homogène dont la longueur d'ondulation soit bien connue.

La méthode qui m'avait d'abord paru la plus commode pour déterminer la longueur des ondes, était de mesurer la largeur des franges produites par deux miroirs légèrement inclinés l'un sur l'autre, en mesurant en même temps la distance entre les deux images du point lumineux; mais, les moindres courbures dans les miroirs pouvant altérer l'exactitude des résultats, j'ai préféré me servir des franges produites par une ouverture étroite combinée avec le verre à surface cylindrique dont j'ai déjà parlé. Nous avons vu qu'alors l'intervalle entre les milieux de deux bandes obscures consécutives quelconques, à droite ou à gauche du centre de l'ouverture, est égal à $\frac{b\lambda}{c}$, λ représentant toujours la longueur d'ondulation, et c et b, la largeur de l'ouverture et sa distance au micromètre; tandis que la distance entre les points les plus sombres des deux bandes du premier ordre est précisément le double de cet intervalle. Avec ces données, il est aisé de déduire la valeur de λ de la mesure des franges.

Le tableau ci-dessous présente les résultats de cinq observations de ce genre, et les longueurs d'ondes qui s'en déduisent. J'y ai introduit les différentes valeurs de a, ou de la distance du point lumineux au diaphragme, quoiqu'elles soient inutiles pour le calcul, afin de présenter toutes les circonstances de l'expérience. Ces mesures ont été prises dans une lumière rouge sensiblement homogène, obtenue au moyen du verre coloré dont j'ai déjà parlé, et dont je me suis servi dans toutes

mes observations, afin qu'elles fussent parfaitement comparables. Chacune de ces mesures a été prise au moins quatre fois, et ce sont les moyennes que j'ai portées dans ce tableau.

DISTANCES du point lumineux au diaphragme ou valeurs de a.	DISTANCES du diaphragme au micromètre ou valeurs de b.	LARGEURS de l'ouverture.	NOMBRES des intervalles $\frac{b.\lambda}{c}$ compris dans chaque mesure.	MOYENNES des mesures micrométriques.	LONGUEURS d'ondes déduites de ces mesures.
m.	m.	mm.		mm.	mm.
2,507.	1,140.	2,00.	6.	2,185.	0,000639.
2,010.	1,302.	4,00.	10.	2,075.	0,000637.
2,010.	1,302.	3,00.	8.	2,222.	0,000640.
1,304.	2,046.	3,00.	8.	3,466.	0,000635.
1,304.	2,046.	2,00.	6.	3,922.	0,000639.
Somme des cinq résultats..................					0,003190.
Cinquième de la somme, ou moyenne........					0,000638.

On voit que ces résultats s'accordent assez bien entre eux, puisque les moins concordans ne diffèrent pas d'un centième. Leur moyenne $0^{mm},000638$ est la longueur d'onde que j'ai adoptée, et dont je me suis servi dans tous mes calculs pour comparer la théorie à l'expérience (1).

(1) D'après les observations de Newton sur les anneaux colorés, la longueur d'ondulation des rayons rouges extrêmes est $0^{mm},000645$; celle des rayons à la séparation du rouge et de l'orangé, $0^{mm},000596$; et par conséquent celle des rayons rouges moyens, $0^{mm},000620$: ainsi la longueur $0^{mm},000638$ répondrait à un point du spectre solaire un peu plus voisin de l'extrémité que du milieu du rouge, si toutefois les résultats de Newton ne sont pas un peu faibles.

Dans les premières expériences de diffraction que j'ai faites avec une lumière homogène, et qui ont été publiées dans les Annales de chimie et de physique, je n'avais pas employé le même verre rouge que pour celles-ci; mais je pense

Avant d'employer cette valeur de λ dans le calcul des franges extérieures et intérieures des ombres des corps, j'ai voulu encore la vérifier sur les franges produites par deux miroirs formant entre eux un angle très-obtus. C'est le cas le plus simple des interférences, puisqu'on n'a à considérer que deux systèmes d'ondes qui ont leurs centres aux deux images du point lumineux (1). On peut appliquer à ce phénomène la formule $\frac{b\lambda}{c}$ donnant l'intervalle compris entre deux *minima* consécutifs, que nous avons trouvée pour les franges intérieures de l'ombre d'un corps étroit, dans l'hypothèse où toute la lumière infléchie partait des bords mêmes de l'écran, dont c représentait la largeur. Dans le phénomène d'interférences produit par deux miroirs, c représente la distance entre les deux images du point lumineux.

Je ne rapporterai que deux expériences de ce genre, les seules dans lesquelles je n'aie oublié aucune des précautions nécessaires pour éviter les erreurs. N'ayant pas pu me procurer des miroirs métalliques assez exactement plans, je me suis

---

que la lumière qu'il donne doit différer très-peu de celle du verre rouge dont je me suis servi en dernier lieu. Si l'on emploie la longueur d'ondulation $0^{mm},000638$ pour calculer les observations de mon premier Mémoire, on trouvera cependant des différences assez notables entre l'expérience et la théorie, comme M. Babinet me l'a fait remarquer. Mais elles tiennent à l'inexactitude de mes premières observations, qui avaient été faites dans la chambre obscure de l'École polytechnique, dont le plancher, quoique solide, n'avait pas toute la stabilité nécessaire, comme je m'en suis aperçu depuis, en remarquant que le fil du micromètre changeait un peu de position quand on portait le poids du corps à gauche ou à droite du pied de l'instrument. Les nouvelles observations dont je présente ici les résultats, méritent beaucoup plus de confiance, parce que le pied du micromètre reposait sur une voûte, et que j'avais acquis plus d'expérience en général sur toutes les précautions qu'il est nécessaire de prendre pour obtenir des mesures exactes.

(1) Si l'on subdivisait chacune des deux ondes incidentes en petites ondes élémentaires, comme nous l'avons fait pour les autres phénomènes de diffraction, il est clair qu'on arriverait au même résultat, puisque les intégrales de ces deux systèmes d'ondes élémentaires fictives sont précisément les deux ondes réelles réfléchies par les miroirs.

servi de deux glaces non étamées, travaillées avec une grande perfection, que j'ai fait enduire d'un vernis noir par derrière pour éteindre la seconde réflexion. Je les ai fixées l'une à côté de l'autre sur un support avec de la cire molle, en ne les pressant que très-légèrement pour éviter les flexions. Un inconvénient qui résulte de cette manière de les fixer, c'est qu'il arrive souvent qu'elles changent un peu de position pendant l'expérience, et les moindres variations rendent l'opération fausse. Pour éviter les erreurs de ce genre, j'ai eu soin de mesurer les franges avant et après la mesure de l'intervalle compris entre les deux images du point lumineux, afin de m'assurer qu'elles n'avaient point changé de largeur pendant cette opération. J'ai déterminé l'intervalle compris entre les deux images du point lumineux, au moyen d'un écran placé à une certaine distance du micromètre, et percé d'un petit trou circulaire qui avait cependant assez de largeur pour que le centre de son ombre, au lieu d'être clair et dilaté, comme cela a lieu quand on se sert d'une ouverture très-étroite, fût occupé par un cercle obscur d'une très-petite étendue; ce qui rend les mesures plus précises. Cet écran était assez éloigné des deux miroirs pour que les bords du trou fussent suffisamment distans des limites de la partie commune des deux champs lumineux, de façon qu'elles n'eussent pas d'influence sensible sur les franges centrales du petit trou. Je mesurais la distance entre les centres des deux projections lumineuses du petit trou, qui étaient disposées d'une manière symétrique relativement aux franges produites par les deux miroirs, et se trouvaient à la hauteur du micromètre, en sorte que je n'étais point obligé de changer sa position, condition indispensable, parce qu'il n'arrive presque jamais que ces franges aient exactement la même largeur dans toute leur étendue. Connaissant d'ailleurs la distance du petit trou au micromètre et aux deux images du point lumineux, je pouvais, par une simple

proportion, déterminer l'intervalle compris entre ces deux images. Voici les résultats de mes observations : chaque mesure micrométrique a été prise au moins quatre fois.

1.re OBSERVATION.

	m.
Distance du point lumineux aux miroirs	2,323.
des miroirs au petit trou	3,171.
du petit trou au micromètre	1,522.
Distance totale ou valeur de b	7,016.
Intervalle entre les centres des deux projections lumineuses du petit trou	3,370 mm.
On en déduit pour l'intervalle entre les deux images du point lumineux	12,16 mm.
D'après ces données, on trouve pour la largeur de onze franges, au moyen de la formule $\frac{11\,b\,\lambda}{c}$	4,05 mm.
L'observation m'avait donné	4,06.
DIFFÉRENCE	—0,01.

2.e OBSERVATION.

	m.
Distance du point lumineux aux miroirs	2,321.
des miroirs au petit trou	3,105.
du petit trou au micromètre	1,533.
Distance totale ou valeur de b	6,959.
Intervalle entre les centres des deux projections lumineuses du petit trou	4,140 mm.
On en déduit pour l'intervalle entre les deux images du point lumineux	14,65 mm.
D'après ces données, on trouve pour la largeur de onze franges, au moyen de la formule $\frac{11\,b\,\lambda}{c}$	3,33 mm.
L'observation m'avait donné	3,35.
DIFFÉRENCE	—0,02.

On produit un phénomène absolument semblable à celui que présentent les deux miroirs, en se servant d'un verre plan d'un côté, et dont l'autre surface est composée de deux plans formant entre eux un angle saillant très-obtus, afin que les deux images du point lumineux, produites par ce verre, soient assez rapprochées pour que les franges aient une largeur suffisante et puissent être aperçues. L'interposition de ce verre fait naître, comme la réflexion sur deux miroirs, deux systèmes d'ondes lumineuses, dont les intersections produisent des bandes obscures ou brillantes, selon l'accord ou la discordance de leurs mouvemens vibratoires. Il est évident que les mêmes formules doivent s'appliquer aux deux phénomènes. Voici les résultats d'une expérience faite avec un verre prismatique, en suivant du reste les mêmes procédés que dans les observations précédentes sur les franges produites par deux miroirs.

	m.
Distance du point lumineux au petit trou	5,877.
du petit trou au micromètre	1,265.
Distance totale ou valeur de b	7,142.
	mm.
Intervalle entre les centres des projections lumineuses du petit trou	4,66.
On en déduit pour l'intervalle entre les deux images du point lumineux	21,65.

D'après ces données, on trouve pour la largeur de onze franges,

	mm.
au moyen de la formule $\frac{11\, b\, \lambda}{c}$	2,31.
L'observation m'avait donné	2,30.
DIFFÉRENCE	+0,01.

Après avoir ainsi vérifié sur les phénomènes dont les lois théoriques sont les plus simples et les plus évidentes, la longueur d'ondulation que j'avais déduite de la mesure des franges

produites par une ouverture étroite combinée avec une lentille cylindrique, j'ai appliqué cette même longueur d'ondulation au calcul des franges extérieures des ombres, au moyen de la formule

$$x = n\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)b\lambda}{a}},$$

dans laquelle j'ai substitué à la place de n les différentes valeurs tirées du tableau des *maxima* et *minima*.

Le tableau suivant présente les résultats du calcul comparés à ceux de l'observation. J'ai déterminé seulement la position des *minima* dans mes expériences (ce qui est suffisant pour la vérification de la théorie), parce que mon œil assignait mieux en général le point le plus sombre d'une bande obscure que le point le plus éclairé d'une bande brillante.

TABLEAU COMPARATIF

Des Résultats de l'Observation et de ceux de la Théorie sur les Franges extérieures des ombres dans une lumière rouge homogène, pour laquelle la longueur d'ondulation est égale à $0^{mm},000638$.

NUMÉROS des observations.	DISTANCES du point lumineux au corps opaque, ou valeurs de *a*.	DISTANCES du corps opaque au micromètre, ou valeurs de *b*.	ORDRES des bandes obscures.	DISTANCES du point le plus obscur de chaque bande au bord de l'ombre géométrique. Observation	Calcul.	DIFFÉRENCES.
				mm.	mm.	
1.	$0^m,1000$.	$0^m,7985$.	1.	2,84.	2,83.	— 1.
			2.	4,14.	4,14.	0.
			3.	5,14.	5,13.	— 1.
			4.	5,96.	5,96.	0.
			5.	6,68.	6,68.	0.

NUMÉROS des observations.	DISTANCES du point lumineux au corps opaque, ou valeurs de *a*.	DISTANCES du corps opaque au micromètre, ou valeurs de *b*.	ORDRES des bandes obscures.	DISTANCES du point le plus obscur de chaque bande au bord de l'ombre géométrique. Observation	Calcul.	DIFFÉRENCES.
	m.	m.		mm.	mm.	
2.	0,1985.	0,637.	1.	1,73.	1,73.	0.
			2.	2,54.	2,53.	− 1.
			3.	3,14.	3,14.	0.
			4.	3,65.	3,64.	− 1.
			5.	4,06.	4,08.	+ 2.
3.	0,202.	0,640.	1.	1,72.	1,73.	+ 1.
			2.	2,50.	2,53.	+ 3.
			3.	3,13.	3,13.	0.
			4.	3,62.	3,63.	+ 1.
			5.	4,07.	4,07.	0.
4.	0,510.	0,110.	1.	0,39.	0,39.	0.
			2.	0,58.	0,57.	− 1.
			3.	0,71.	0,70.	− 1.
			4.	0,82.	0,81.	− 1.
			5.	0,91.	0,91.	0.
5.	0,510.	0,501.	1.	1,05.	1,05.	0.
			2.	1,54.	1,54.	0.
			3.	1,90.	1,91.	+ 1.
			4.	2,21.	2,22.	+ 1.
			5.	2,49.	2,49.	0.
6.	0,510.	1,005.	1.	1,82.	1,83.	+ 1.
			2.	2,66.	2,67.	+ 1.
			3.	3,30.	3,31.	+ 1.
			4.	3,84.	3,84.	0.
			5.	4,31.	4,31.	0.
7.	1,011.	0,116.	1.	0,38.	0,38.	0.
			2.	0,57.	0,56.	− 1.
			3.	0,69.	0,69.	0.
			4.	0,80.	0,80.	0.
			5.	0,90.	0,90.	0.

NUMÉROS des observa-tions.	DISTANCES du point lumineux au corps opaque, ou valeurs de *a*.	DISTANCES du corps opaque au micromètre, ou valeurs de *b*.	ORDRES des bandes obs-cures.	DISTANCES du point le plus obscur de chaque bande au bord de l'ombre géométrique. Observation	Calcul.	DIFFÉRENCES.
	m.	m.		mm.	mm.	
			1.	0,92.	0,92.	0.
			2.	1,35.	1,34.	— 1.
8.	1,011.	0,502.	3.	1,68.	1,66.	— 2.
			4.	1,93.	1,93.	0.
			5.	2,15.	2,16.	+ 1.
			1.	1,49.	1,49.	0.
			2.	2,18.	2,18.	0.
9.	1,011.	0,996.	3.	2,70.	2,69.	— 1.
			4.	3,12.	3,13.	+ 1.
			5.	3,51.	3,51.	0.
			1.	2,59.	2,59.	0.
			2.	3,79.	3,79.	0.
10.	1,011.	2,010.	3.	4,68.	4,69.	+ 1.
			4.	5,45.	5,45.	0.
			5.	6,10.	6,11.	+ 1.
			1.	0,37.	0,37.	0.
			2.	0,55.	0,55.	0.
11.	2,008.	0,118.	3.	0,68.	0,68.	0.
			4.	0,78.	0,79.	+ 1.
			5.	0,87.	0,88.	+ 1.
			1.	1,30.	1,29.	— 1.
			2.	1,89.	1,89.	0.
12.	2,008.	0,999.	3.	2,34.	2,34.	0.
			4.	2,71.	2,72.	+ 1.
			5.	3,03.	3,05.	+ 2.
			1.	2,89.	2,89.	0.
			2.	4,23.	4,23.	0.
13.	2,008.	2,998.	3.	5,22.	5,24.	+ 2.
			4.	6,08.	6,08.	0.
			5.	6,80.	6,82.	+ 2.

NUMÉROS des observations.	DISTANCES du point lumineux au corps opaque, ou valeurs de *a*.	DISTANCES du corps opaque au micromètre, ou valeurs de *b*.	ORDRES des bandes obscures.	DISTANCES du point le plus obscur de chaque bande au bord de l'ombre géométrique.		DIFFÉRENCES.
				Observation	Calcul.	
	m.	m.		mm.	mm.	
14.	3,018.	0,0017.	1.	0,04.	0,04.	0.
			2.	0,06.	0,06.	0.
			3.	0,08.	0,08.	0.
15.	3,018.	0,253.	1.	0,54.	0,55.	+ 1.
			2.	0,80.	0,81.	+ 1.
			3.	1,00.	1,00.	0.
			4.	1,16.	1,16.	0.
			5.	1,31.	1,31.	0.
16.	3,018.	0,500.	1.	0,81.	0,81.	0.
			2.	1,17.	1,18.	+ 1.
			3.	1,45.	1,46.	+ 1.
			4.	1,69.	1,70.	+ 1.
			5.	1,89.	1,90.	+ 1.
17.	3,018.	1,003.	1.	1,21.	1,22.	+ 1.
			2.	1,78.	1,79.	+ 1.
			3.	2,20.	2,21.	+ 1.
			4.	2,56.	2,57.	+ 1.
			5.	2,87.	2,88.	+ 1.
18.	3,018.	1,998.	1.	1,92.	1,93.	+ 1.
			2.	2,83.	2,82.	− 1.
			3.	3,49.	3,49.	0.
			4.	4,04.	4,05.	+ 1.
			5.	4,54.	4,55.	+ 1.
19.	3,018.	3,002.	1.	2,58.	2,59.	+ 1.
			2.	3,78.	3,79.	+ 1.
			3.	4,68.	4,69.	+ 1.
			4.	5,44.	5,44.	0.
			5.	6,09.	6,10.	+ 1.

NUMÉROS des observations.	DISTANCES du point lumineux au corps opaque, ou valeurs de *a*.	DISTANCES du corps opaque au micromètre, ou valeurs de *b*.	ORDRES des bandes obscures.	DISTANCES du point le plus obscur de chaque bande au bord de l'ombre géométrique. Observation	Calcul.	DIFFÉRENCES.
				mm.	mm.	
			1.	3,19.	3,22.	+ 3.
	m.	m.	2.	4,70.	4,71.	+ 1.
20.	3,018.	3,995.	3.	5,83.	5,84.	+ 1.
			4.	6,73.	6,78.	+ 5.
			5.	7,58.	7,60.	+ 2.
			1.	0,38.	0,39.	+ 1.
			2.	0,56.	0,57.	+ 1.
21.	4,507.	0,131.	3.	0,70.	0,70.	0.
			4.	0,81.	0,82.	+ 1.
			5.	0,92.	0,92.	0.
			1.	1,18.	1,18.	0.
			2.	1,73.	1,73.	0.
22.	4,507.	1,018.	3.	2,13.	2,14.	+ 1.
			4.	2,49.	2,48.	− 1.
			5.	2,80.	2,79.	− 1.
			1.	2,11.	2,09.	− 2.
			2.	3,07.	3,05.	− 2.
23.	4,507.	2,506.	3.	3,78.	3,78.	0.
			4.	4,39.	4,39.	0.
			5.	4,90.	4,93.	+ 3.
			1.	0,36.	0,37.	+ 1.
			2.	0,53.	0,53.	0.
24.	6,007.	0,117.	3.	0,66.	0,66.	0.
			4.	0,77.	0,77.	0.
			5.	0,85.	0,86.	+ 1.
			1.	1,13.	1,14.	+ 1.
			2.	1,67.	1,67.	0.
25.	6,007.	0,999.	3.	2,06.	2,07.	+ 1.
			4.	2,40.	2,40.	0.
			5.	2,69.	2,69.	0.

On ne pouvait pas s'attendre à un accord plus frappant entre l'expérience et la théorie. Si l'on compare la petitesse des différences à l'étendue des largeurs mesurées, et si l'on fait attention aux grandes variations que a et b ont éprouvées dans ces observations diverses, on se refusera difficilement à regarder l'intégrale qui nous a conduits à ces résultats comme l'expression fidèle de la loi des phénomènes. Mais ce qui augmente encore beaucoup les probabilités en faveur de la nouvelle théorie, c'est que la longueur d'ondulation employée dans ces calculs a été déduite de phénomènes très-différens, et dont la loi se laissait apercevoir aisément.

Si l'on substituait cette longueur d'ondulation dans les formules auxquelles nous avions été conduits par la première hypothèse, on trouverait des résultats qui différeraient sensiblement de ceux de l'expérience. Je ne présente ici qu'une application de ces formules, qui me paraît suffisante pour faire voir qu'elles ne s'accordent pas aussi bien avec les mesures. J'ai choisi l'observation n.° 23, qui est une des plus favorables à la première théorie.

NUMÉRO de l'observation.	DISTANCE du point lumineux au corps opaque, ou valeur de a.	DISTANCE du corps opaque au micromètre, ou valeur de b.	ORDRES des bandes obscures.	DISTANCES du point le plus obscur de chaque bande au bord de l'ombre géométrique. Observation	Calcul.	DIFFÉRENCES.
				mm	mm	mm
23.	m 4,507.	m 2,506.	1.	2,11.	2,23.	+ 0,12.
			2.	3,07.	3,15.	+ 0,08.
			3.	3,78.	3,86.	+ 0,08.
			4.	4,39.	4,46.	+ 0,07.
			5.	4,90.	4,99.	+ 0,09.

On ne pourrait pas expliquer ces discordances en suppo-

sant que la longueur d'ondulation employée $0^{mm},000638$ est trop faible ; car, si on l'augmente de façon à faire concorder le calcul avec la théorie pour la bande obscure du premier ordre, elle sera évidemment trop forte pour celle du quatrième. En effet, il résulte de ces formules que la distance du bord de l'ombre géométrique à la bande du quatrième ordre doit être le double de la distance du même point à la bande du premier ordre : or, en doublant $2^{mm},11$, on trouve $4^{mm},22$, au lieu de $4^{mm},39$, que donne l'observation. Par conséquent, en partant de la plus grande quantité pour calculer la plus petite, d'après la distance observée pour la bande du quatrième ordre, celle de la bande du premier ordre devrait être $2^{mm},19$, au lieu de $2^{mm},11$, et la différence est de $0^{mm},08$. En faisant des calculs semblables sur toutes les observations comprises dans le tableau ci-dessus, on trouve :

NUMÉROS des observations.	DISTANCES du bord de l'ombre géométrique au point le plus obscur de la bande du premier ordre, d'après l'observation.	MOITIÉ de la distance du bord de l'ombre géométrique au point le plus obscur de la bande du quatrième ordre.	DIFFÉRENCES.
	mm.	mm.	mm.
1.	2,84.	2,98.	+ 0,14.
2.	1,73.	1,82.	+ 0,09.
3.	1,72.	1,81.	+ 0,09.
4.	0,39.	0,41.	+ 0,02.
5.	1,05.	1,10.	+ 0,05.
6.	1,82.	1,92.	+ 0,10.
7.	0,38.	0,40.	+ 0,02.
8.	0,92.	0,96.	+ 0,04.
9.	1,49.	1,56.	+ 0,07.
10.	2,59.	2,72.	+ 0,13.
11.	0,37.	0,39.	+ 0,02.
12.	1,30.	1,35.	+ 0,05.
13.	2,89.	3,04.	+ 0,15.
14.	"	"	"
15.	0,54.	0,58.	+ 0,04.
16.	0,81.	0,84.	+ 0,03.

NUMÉROS des observations.	DISTANCES du bord de l'ombre géométrique au point le plus obscur de la bande du premier ordre, d'après l'observation.	MOITIÉ de la distance du bord de l'ombre géométrique au point le plus obscur de la bande du quatrième ordre.	DIFFÉRENCES.
	mm.	mm.	mm.
17.	1,21.	1,28.	+ 0,07.
18.	1,92.	2,02.	+ 0,10.
19.	2,58.	2,72.	+ 0,14.
20.	3,19.	3,36.	+ 0,17.
21.	0,38.	0,40.	+ 0,02.
22.	1,18.	1,24.	+ 0,06.
23.	2,11.	2,19.	+ 0,08.
24.	0,36.	0,38.	+ 0,02.
25.	1,13.	1,20.	+ 0,07.

On voit que toutes les observations s'accordent à donner pour le *minimum* du premier ordre une distance plus petite que la moitié de celle du *minimum* du quatrième ordre, et que les différences entre les résultats de l'observation et du calcul dans ce dernier tableau sont plussensibles que dans le précédent. Ainsi, indépendamment des considérations théoriques et des expériences qui m'ont servi à déterminer la longueur d'ondulation, il est évident que les rapports de largeur des franges sont plus fidèlement représentés par les distances répondant aux *minima* de l'intégrale déduite du principe d'Huygens, que par les formules calculées d'après la première hypothèse.

Pour reconnaître ainsi laquelle des deux théories conduisait aux résultats les plus exacts, malgré la petitesse de leurs différences, il fallait pousser la précision des mesures presque aussi loin que le comporte ce genre d'observations; car, en raison du vague des franges, cette limite est assez rapprochée. Je crois devoir donner ici quelques détails sur le procédé que j'ai suivi et les précautions que j'ai prises dans ces expériences.

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler d'abord aux physiciens qui voudraient répéter ces expérience, que l'observateur doit regarder le point lumineux en tenant son œil derrière la loupe du micromètre et à une distance telle, que sa surface lui paraisse entièrement illuminée quand elle est hors de l'ombre; c'est dans cette position réciproque de l'œil et de la loupe qu'il faut chercher et mesurer les franges : alors elles se peignent sur la rétine telles qu'elles sont réellement au foyer de la loupe, comme l'image aérienne produite par l'objectif d'une lunette est transmise fidèlement à l'œil par l'oculaire, qui en augmente seulement les dimensions apparentes.

Au lieu d'un fil de soie, je me suis ordinairement servi d'un verre fixé devant la lentille du micromètre et sur lequel était gravé un trait fin, qui ne se prolongeait pas dans toute l'étendue du champ de la lentille, mais s'arrêtait au milieu, de sorte que je pouvais voir au-delà de l'extrémité du trait le prolongement de la bande obscure devant laquelle je l'avais amené; ce qui est plus commode pour bien juger s'il est vis-à-vis l'endroit le plus sombre, sur-tout lorsque les franges ont peu de largeur. Pour déterminer la position du bord de l'ombre géométrique par rapport aux bandes obscures, au lieu d'un corps opaque d'une largeur connue, j'ai employé deux plaques d'acier, que je pouvais écarter ou rapprocher à volonté l'une de l'autre, et dont j'évaluais l'intervalle à moins d'un centième de millimètre près, à l'aide d'un vernier fixé au coursier de ce petit instrument. Ces deux plaques étaient terminées par un double biseau légèrement arrondi. Je mesurais avec le micromètre les distances entre les bandes obscures produites par les bords des deux plaques, et, connaissant d'ailleurs l'intervalle qui séparait ces deux bords, ainsi que leur distance au point lumineux et au micromètre, je trouvais, par un calcul très-simple, la largeur comprise entre les limites des ombres géométriques des

deux écrans. Il suffisait alors d'en retrancher l'intervalle entre deux bandes correspondantes et de prendre la moitié du reste pour avoir la distance d'une de ces bandes au bord de l'ombre géométrique la plus voisine. Chaque mesure a été prise au moins deux fois.

J'avais soin que les plaques fussent séparées par un intervalle assez grand pour que l'une n'eût aucune influence sur les franges produites par l'autre. Dans presque toutes mes observations, cet intervalle était d'un centimètre.

Je me servais, pour former le point lumineux, de lentilles d'autant plus convexes, que le corps opaque en était plus rapproché. Dans les expériences 1, 2 et 3, la lentille que j'ai employée n'avait qu'un demi-millimètre de foyer, afin que les franges fussent moins vagues en raison de la finesse du point lumineux, et sur-tout afin de pouvoir mesurer avec une exactitude suffisante la distance de ce point au corps opaque; ce qui est plus facile quand le foyer de la lentille est plus court. Pour que la petite image du soleil qui formait le point lumineux au foyer de la lentille ne changeât pas de position par l'effet du mouvement diurne pendant la mesure des franges, les rayons solaires étaient réfléchis dans une direction constante par le miroir d'un héliostat que M. Berthollet avait eu la bonté de me prêter, et qui m'a été du plus grand secours dans mes expériences. C'est un instrument presque indispensable pour ce genre d'observations.

Nous venons de voir qu'on pouvait expliquer d'une manière satisfaisante la formation et la position des franges extérieures, en les considérant comme produites par le concours d'une infinité d'ondes élémentaires qui émanent de la partie de l'onde non interceptée par le corps opaque. Il résulte de la même théorie que la lumière infléchie dans l'ombre ne doit produire aucune bande obscure et brillante, mais diminuer continuellement d'intensité lorsque l'écran est assez étendu pour

qu'il ne vienne point de lumière sensible de l'autre côté, quoique cette lumière infléchie résulte du concours d'une infinité d'ondes élémentaires, comme celles qui donnent naissance aux franges extérieures; c'est ce que l'on reconnaît à l'inspection du tableau ci-dessous, qui représente l'intensité de la lumière répandue dans l'ombre pour différentes inclinaisons des rayons infléchis. Ces intensités ont été calculées au moyen de la table des valeurs numériques des intégrales

$$\int dv \cos qv^2 \text{ et } \int dv \sin qv^2,$$

en faisant la somme des carrés des nombres correspondans diminués de $\frac{1}{2}$. Malgré les inexactitudes qui proviennent de ce que les limites des intégrations partielles n'avaient pas été assez rapprochées dans la première table, on voit que l'intensité de la lumière s'affaiblit rapidement à mesure que v augmente, sans qu'il se présente aucun de ces *maxima* ou *minima* que nous avons observés à l'extérieur de l'ombre.

Intensités de la Lumière infléchie dans l'ombre sous différentes obliquités.

VALEURS de v.	INTENSITÉS correspondantes.	VALEURS de v.	INTENSITÉS correspondantes.
q.		q.	
0,10.	0,4095.	1,80.	0,0299.
0,20.	0,3359.	1,90.	0,0271.
0,30.	0,2765.	2,00.	0,0247.
0,40.	0,2284.	2,10.	0,0226.
0,50.	0,1898.	2,20.	0,0207.
0,60.	0,1586.	2,30.	0,0189.
0,70.	0,1334.	2,40.	0,0173.
0,80.	0,1129.	2,50.	0,0159.
0,90.	0,0962.	2,60.	0,0147.
1,00.	0,0825.	2,70.	0,0137.
1,10.	0,0711.	2,80.	0,0129.
1,20.	0,0618.	2,90.	0,0121.
1,30.	0,0540.	3,00.	0,0113.
1,40.	0,0474.	3,10.	0,0105.
1,50.	0,0418.	3,20.	0,0098.
1,60.	0,0372.	3,30.	0,0092.
1,70.	0,0332.	3,40.	0,0087.

VALEURS de v.	INTENSITÉS correspondantes.	VALEURS de v.	INTENSITÉS correspondantes.
q. 3,50.	0,0083.	q. 4,60.	0,0048.
3,60.	0,0079.	4,70.	0,0045.
3,70.	0,0074.	4,80.	0,0044.
3,80.	0,0069.	4,90.	0,0043.
3,90.	0,0066.	5,00.	0,0041.
4,00.	0,0064.	5,10.	0,0038.
4,10.	0,0061.	5,20.	0,0037.
4,20.	0,0057.	5,30.	0,0036.
4,30.	0,0054.	5,40.	0,0035.
4,40.	0,0052.	5,50.	0,0033.
4,50.	0,0051.		

a et b représentant toujours les distances de l'écran au point lumineux et au plan sur lequel on reçoit son ombre, et x la distance du bord de l'ombre géométrique au point que l'on considère dans ce plan, on a

$$x = v\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)b\lambda}{a}};$$

et par conséquent

$$\frac{x}{b} = v\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)\lambda}{ab}}.$$

A l'aide de ces formules, on peut calculer les valeurs de la distance x ou de l'inclinaison $\frac{x}{b}$ du rayon infléchi qui correspond aux différentes valeurs de v; et réciproquement, étant donné x ou l'obliquité $\frac{x}{b}$, on peut en déduire v, et déterminer l'intensité de la lumière infléchie. Une conséquence remarquable de la formule

$$x = v\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(a+b)b\lambda}{a}},$$

c'est que les valeurs de x ne sont pas proportionnelles aux valeurs de b, mais aux ordonnées d'une hyperbole dont celles-ci seraient les abscisses. Ainsi il résulte de cette théorie que

les points de même intensité par rapport au bord de l'ombre géométrique ne suivent pas une ligne droite quand on fait varier *b*, mais une hyperbole qui a une courbure sensible, comme les trajectoires des franges extérieures.

Je n'ai pas encore vérifié par des expériences directes les rapports d'intensité de la lumière infléchie que j'ai déduits de la théorie des interférences appliquée au principe d'Huygens. Ce genre d'observations présente de grandes difficultés (1); et j'ai peine à croire qu'on puisse y porter autant d'exactitude que dans la détermination des points les plus sombres et les plus brillans des franges, dont les résultats me paraissent aussi des vérifications (à la vérité, indirectes) de ces mêmes rapports d'intensité; car la position des *maxima* et *minima* étant déduite de l'expression générale de l'intensité de la lumière, si l'expérience s'accorde à cet égard avec le calcul, toutes les fois du moins que les observations peuvent être faites avec précision, il devient bien probable que cette intégrale représente réellement toutes les variations d'intensité de la lumière infléchie.

---

(1) Il est très-difficile de mesurer avec précision l'intensité de la lumière, même dans les circonstances les plus favorables, lorsque les espaces éclairés qu'il s'agit de comparer sont suffisamment étendus et présentent chacun une lumière uniforme; à plus forte raison lorsque ces espaces varient de clarté d'un point à un autre, et ne peuvent être considérés comme ayant une intensité uniforme que dans un intervalle extrêmement étroit, ou, pour ainsi dire, une seule ligne lumineuse. Je crois cependant qu'on pourrait parvenir à vérifier les formules d'intensité de lumière dans les phénomènes de diffraction, d'une manière suffisante, quoique toujours indirecte, à l'aide d'un procédé très-simple, auquel j'ai songé depuis que mon Mémoire a été déposé à l'Institut : ce serait de superposer, à l'aide de la double réfraction, des franges différentes les unes sur les autres, celles de l'intérieur d'une ombre étroite, par exemple, sur celles de l'extérieur, et d'observer la position des nouveaux *maxima* et *minima* résultant de ce mélange. Si, comme j'en suis persuadé, les formules appliquées à ces superpositions de franges diverses s'accordaient encore avec l'observation sur la position des nouveaux *maxima* et *minima*, on ne pourrait plus douter qu'elles ne représentassent effectivement les intensités relatives des différens points des franges.

A l'aide du tableau des *maxima* et *minima* des franges extérieures, on peut calculer aisément, comme nous l'avons vu, les positions des points les plus sombres et les plus éclairés de leurs bandes obscures et brillantes pour toutes les valeurs de a et de b. Il n'en est pas de même à l'égard des franges intérieures de l'ombre d'un corps étroit, ou de celles qui sont produites par une petite ouverture. Les deux limites de l'intégrale variant à-la-fois, il n'est plus possible de présenter des résultats généraux applicables à tous les cas; et l'on est obligé de déterminer les *maxima* et les *minima* dans chaque cas particulier, à l'aide de la table qui donne les valeurs numériques de

$$\int dv \cos qv^2 \text{ et } \int dv \sin qv^2.$$

Je vais présenter le résultat de tous les calculs de cette espèce que j'ai faits jusqu'à présent pour la vérification de la théorie. Comme ils sont très-longs (1), je n'ai pas pu les multiplier autant que je l'aurais desiré; mais j'ai tâché de compenser ce défaut par la variété des cas auxquels je les ai appliqués, et en vérifiant la théorie de préférence sur les observations qui m'avaient présenté les dispositions de franges les plus extraordinaires.

Je vais d'abord m'occuper des franges produites par une petite ouverture, qui tiennent à-la-fois des franges extérieures et de celles qu'on observe dans l'ombre d'un corps étroit.

Soit C (*fig.* 9) le point lumineux, AG une ouverture étroite dont les bords A et G sont rectilignes et parallèles, BD sa projection conique sur le plan où l'on observe les franges, et P un point pris dans ce plan, dont on veut connaître l'intensité. Pour cela, il faut intégrer

$$\int dz. \cos\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right) \text{ et } \int dz. \sin\left(2q.\frac{z^2(a+b)}{ab\lambda}\right).$$

(1) Il est très-possible qu'il y ait des procédés plus courts, que mon peu d'usage de l'analyse m'aura empêché d'apercevoir.

entre les limites A et G, et faire la somme des carrés de ces intégrales : ce sera l'intensité de la lumière en P. Mais il faut se rappeler que l'origine des z est sur le rayon direct CP, et qu'en conséquence les deux limites A et G répondent à

$$z = MG \text{ et } z = -AM.$$

Après avoir calculé les valeurs correspondantes de v avec la formule

$$v = z\sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}} \text{ ou } v = x\sqrt{\frac{2a}{(a+b)b\lambda}},$$

dans laquelle x représente la distance du point P au bord de l'ombre géométrique, on cherchera dans la table des intégrales

$$\int dv.\cos qv^2 \text{ et } \int dv.\sin qv^2,$$

les nombres qui approchent le plus de ces valeurs de v.

Je suppose que t soit la différence entre la valeur calculée et le nombre i de la table, on trouvera les intégrales correspondantes au moyen des formules approximatives,

$$\int_0^{i+t} dv.\cos qv^2 = \int_0^i dv.\cos qv^2 + \frac{1}{2iq}[\sin qi(i+2t) - \sin qi^2],$$

$$\int_0^{i+t} dv.\sin qv^2 = \int_0^i dv.\sin qv^2 + \frac{1}{2iq}[-\cos qi(i+2t) + \cos qi^2].$$

Après avoir fait le même calcul pour les deux valeurs de v qui répondent aux limites A et G de l'ouverture, on ajoutera ensemble les intégrales homologues si le point M est en dedans; on les retranchera, au contraire, l'une de l'autre s'il est en dehors ; et l'on fera enfin la somme des carrés des deux nombres trouvés. On aura de même les intensités de lumière pour tous les autres points dont la position sera donnée, et en comparant ces différens résultats, on reconnaîtra entre lesquels sont placés les *maxima* et les *minima*. Étant données les intensités

lumineuses de trois points assez rapprochés entre lesquels se trouve un *maximum* ou un *minimum*, on peut aisément déterminer sa position avec une exactitude suffisante par la méthode des interpolations, en supposant que, dans ce petit espace, la courbe qui aurait pour ordonnées les intensités de ces points, et pour abscisses leurs distances à une origine commune, coïncide sensiblement avec une courbe du second degré. Cette hypothèse conduit à la formule:

$$z = \frac{p' z''^2 - p'' z'^2}{2(p' z'' - p'' z')},$$

dans laquelle z' et z'' représentent les distances d'un des points extrêmes aux deux autres, p' et p'' les différences de leurs intensités, et enfin z la distance du même point au *maximum* ou au *minimum*. J'ai essayé cette formule sur les *maxima* et les *minima* des franges extérieures, déjà calculés par un autre procédé; et, sans employer des nombres plus rapprochés que ceux de la table, j'ai obtenu des résultats d'une exactitude suffisante, même pour le *minimum* du septième ordre, quoique la différence de deux valeurs consécutives de v dans la table soit une partie considérable de l'intervalle qui sépare le *minimum* et le *maximum* du septième ordre.

Pour appliquer cette méthode de calcul aux observations, j'ai d'abord déterminé la valeur tabulaire de c, c'est-à-dire, de la largeur de l'ouverture, au moyen de la formule

$$v = c \sqrt{\frac{2(a+b)}{ab\lambda}},$$

qui m'a donné ainsi l'intervalle tabulaire des deux limites. Par des tâtonnemens faciles, j'ai cherché entre quels nombres de la table se trouvaient les *maxima* ou les *minima;* j'ai ensuite déterminé leur position d'une manière plus exacte par le procédé que je viens d'indiquer. Ayant ainsi calculé les valeurs de v répondant aux *maxima* ou aux *minima*, je les ai retranchées de la moitié de la valeur tabulaire de c, pour les rapporter au

milieu de l'ouverture. Enfin la formule

$$x = v\sqrt{\frac{(a+b)b\lambda}{2a}}$$

m'a donné la distance des mêmes *minima* ou *maxima* au milieu de la projection lumineuse de l'ouverture, origine que j'avais adoptée dans mes observations.

TABLEAU COMPARATIF

Des Résultats de la Théorie et de l'Expérience sur la position des maxima *et des* minima *dans les Franges produites par une ouverture étroite.*

NUMÉROS des bandes brillantes et obscures comptés à partir du milieu.	VALEURS approchées de v comptées du bord de l'ouverture.	INTENSITÉS correspondantes.	VALEURS de v répondant aux *maxima* ou *minima*, comptées du bord de l'ouverture.	DISTANCES des *maxima* ou *minima* à la projection du milieu de l'ouverture. Calcul.	Observations.	DIFFÉRENCES
1.re OBSERVATION. $a = 2^m{,}010$; $b = 0^m{,}617$; $c = 0^{mm}{,}50$; valeur tabulaire de $c = 1{,}288$.						
				mm.	mm.	mm.
1. Minimum.	+ 0,812. + 0,912. + 1,012.	0,03495. 0,01645. 0,03406.	+ 0,913.	0,79.	0,77.	+ 0,02.
2. Minimum.	+ 2,412. + 2,512. + 2,612.	0,00238. 0,00235. 0,00541.	+ 2,463.	1,58.	1,58.	0,00.
2.e OBSERVATION. $a = 2^m{,}010$; $b = 1^m{,}503$; $c = 1^{mm}{,}00$; valeur tabulaire de $c = 1{,}910$.						
				mm.	mm.	mm.
1. Minimum.	0. + 0,100. + 0,200.	0,2978. 0,2765. 0,2933.	+ 0,106.	0,97.	0,86.	+ 0,11.
2. Minimum.	+ 1,000. + 1,100. + 1,200.	0,04451. 0,02608. 0,02771.	+ 1,142.	1,92.	1,88.	+ 0,04.

NUMÉROS des bandes brillantes et obscures comptés à partir du milieu.	VALEURS approchées de v comptées du bord de l'ouverture.	INTENSITÉS correspondantes.	VALEURS de v répondant aux *maxima* ou *minima*, comptées du bord de l'ouverture.	DISTANCES des *maxima* ou *minima* à la projection du milieu de l'ouverture. Calcul.	Observations.	DIFFÉRENCES
3.e OBSERVATION. $a = 2^m,010$; $b = 0^m,401$; $c = 1^{mm},00$; valeur tabulaire de $c = 3,062$.						
				mm.	mm.	mm.
1. Minimum.	— 1,262.	2,2578.	— 1,181.	0,14.	0,16.	— 0,02.
	— 1,162.	2,2153.				
	— 1,100.	2,2577.				
2. Minimum.	— 0,300.	0,7135.	— 0,215.	0,51.	0,48.	+ 3.
	— 0,262.	0,6925.				
	— 0,162.	0,6950.				
3. Minimum.	+ 0,400.	0,1501.	+ 0,431.	0,77.	0,76.	+ 1.
	+ 0,438.	0,1477.				
	+ 0,500.	0,1604.				
4. Minimum.	+ 0,938.	0,0799.	+ 1,084.	1,02.	1,01.	+ 1.
	+ 1,038.	0,0417.				
	+ 1,138.	0,0432.				
5. Minimum.	+ 1,800.	0,0170.	+ 1,736.	1,28.	1,28.	0.
	+ 1,738.	0,0128.				
	+ 1,700.	0,0141.				
4.e OBSERVATION. $a = 3^m,008$; $b = 1^m,236$; $c = 2^{mm},00$; valeur tabulaire de $c = 3,783$.						
1. Minimum.	— 1,983.	1,2813.	— 1,892.	0	0	0
	— 1,892.	1,1753.				
	— 1,800.	1,2813.				
				mm.	mm.	mm.
2. Minimum.	— 1,013.	2,2164.	— 0,998.	0,67.	0,63.	+ 0,04.
	— 1,000.	2,2139.				
	— 0,980.	2,2172.				
3. Minimum.	— 0,323.	0,8465.	— 0,303.	1,18.	1,11.	+ 7.
	— 0,303.	0,8451.				
	— 0,283.	0,8465.				

NUMÉROS des bandes brillantes et obscures comptés à partir du milieu.	VALEURS approchées de *v* comptées du bord de l'ouverture.	INTENSITÉS correspondantes.	VALEURS de *v* répondant aux *maxima* ou *minima*, comptées du bord de l'ouverture.	DISTANCES des *maxima* ou *minima* à la projection du milieu de l'ouverture. Calcul.	Observations.	DIFFÉRENCES
4. Minimum.	+0,117. +0,217. +0,317.	0,3183. 0,2516. 0,2770.	+0,239.	1,59.	1,53.	+6.
5. Minimum.	+0,617. +0,717. +0,817.	0,1422. 0,0838. 0,0909.	+0,739.	1,96.	1,96.	0.
			5.e OBSERVATION.			
			$a = 2^m{,}010$; $b = 0^m{,}492$; $c = 1^{mm}{,}50$; valeur tabulaire de $c = 4{,}224$.			
1. Maximum.	−1,300. −1,200. −1,100.	2,7239. 3,0466. 2,9780.	−1,168.	mm. 0,42.	mm. 0,43.	mm. −0,01.
			6.e OBSERVATION.			
			$a = 2^m{,}010$; $b = 0^m{,}276$; $c = 1^{mm}{,}50$; valeur tabulaire de $c = 5{,}391$.			
1. Minimum.	−2,791. −2,695. −2,600.	1,6110. 1,4474. 1,6110.	−2,695.	0.	0.	0.
2. Minimum.	−2,091. −1,991. −1,891.	1,7500. 1,4408. 1,4770.	−1,951.	mm. 0,24.	mm. 0,24.	0.

On voit que les mesures et la théorie s'accordent, en général, assez bien, excepté dans la deuxième et la quatrième observation, où les différences sont très-sensibles, et beaucoup plus que ne le comporte la largeur des franges : car, dans la seconde observation, les mesures partielles ne différaient au plus que

de $0^{mm},04$; et la quatrième observation, que j'ai déjà rapportée, s'accordait parfaitement, comme on l'a vu, avec une autre expérience qui devait présenter les mêmes franges. Ainsi l'on ne peut expliquer ces différences qu'en supposant que la théorie est inexacte, ou qu'une illusion d'optique occasionne ici des erreurs constantes dans les observations.

La théorie repose sur une hypothèse si simple et si probable en elle-même, et elle se trouve d'ailleurs déjà vérifiée d'une manière si frappante par des expériences variées et nombreuses, qu'on ne peut guère douter de l'exactitude du principe fondamental. Il est très-vraisemblable que cette anomalie n'est qu'apparente, et qu'elle tient à un faux jugement de l'œil sur la position des *minima* dont il s'agit. Il est à remarquer d'abord qu'ils étaient peu prononcés, et se trouvaient compris chacun entre deux bandes brillantes d'intensités très-différentes : or, pour juger de la position du *minimum*, mon œil embrassant une partie de ces deux bandes, la moitié de la bande obscure, située du côté de la plus brillante, devait me paraître plus sombre par l'effet de son voisinage, ce qui en rapprochait le *minimum* apparent; et c'est effectivement dans ce sens que se trouvent toutes les différences. Ce qui prouve bien que l'œil embrasse une étendue assez considérable des franges pour juger de la position des *minima* ou des *maxima*, c'est qu'ayant essayé, en répétant la quatrième observation, de détruire l'illusion dont je viens de parler au moyen d'un diaphragme d'une ouverture très-étroite placé au foyer du micromètre et qui ne laissait voir que la bande obscure, elle me paraissait d'une teinte uniforme, et je ne pouvais plus en assigner le *minimum*.

Si j'ai déterminé avec assez d'exactitude les *minima* des franges extérieures, même dans des bandes très-vagues, c'est sans doute parce que les bandes brillantes entre lesquelles elles sont comprises diffèrent peu d'intensité; et si les résultats de l'expérience se sont encore très-bien accordés avec ceux de

la théorie pour les franges produites par une ouverture étroite combinée avec un verre cylindrique, malgré les grandes différences d'intensité entre deux bandes brillantes consécutives, sur-tout entre celles du premier et du second ordre, c'est que la bande obscure qui les sépare est d'un noir presque complet à son *minimum*. En général, toutes les fois que le *minimum* ou le *maximum* étaient très-prononcés, j'ai trouvé que l'expérience s'accordait parfaitement avec le calcul. Dans la cinquième observation, par exemple, j'ai mesuré la distance du centre au *maximum* du premier ordre, parce que cette bande brillante était très-fine, et que je pouvais en déterminer le point le plus éclairé avec beaucoup de précision. Or on voit que la différence entre le calcul et la mesure n'est ici que d'un centième de millimètre.

La théorie représente avec fidélité non-seulement la position des *maxima* et des *minima*, mais encore toutes les apparences des phénomènes, autant qu'on peut en juger du moins, sans déterminer par des mesures précises les variations d'intensité de la lumière. Ainsi, par exemple, dans la cinquième observation, la partie correspondante au centre de l'ouverture était occupée par une large bande obscure d'une teinte qui me paraissait sensiblement uniforme jusqu'à deux limites distantes du centre d'environ $0^{mm},26$, après lesquelles l'intensité de la lumière augmentait brusquement pour former la bande brillante du premier ordre, dont je viens de parler. Or, en calculant l'intensité de la lumière entre ces limites, on trouve qu'effectivement elle varie fort peu, et que son accroissement est, au contraire, très-rapide dans le passage de ces limites à la bande brillante. Voici les résultats du calcul pour différens points de la bande obscure et des deux bandes brillantes entre lesquelles elle est comprise. La position de chaque point est désignée ici par la valeur correspondante de v, comptée toujours à partir d'un des bords de l'ouverture.

	NUMÉROS.	VALEURS DE v.	INTENSITÉS.
	1.	1,100.	2,9780.
	2.	1,200.	3,0466.
	3.	1,300.	2,7239.
	4.	1,400.	2,2843.
Limite de la teinte plate d'après l'observation.	5.	1,524.	1,9671.
	6.	1,824.	1,9100.
	7.	2,112.	1,9802.
Les mêmes intensités de l'autre côté du centre.			

En prenant pour abscisses les distances de ces points à une origine commune, et pour ordonnées les intensités correspondantes, j'ai construit la courbe *MCM'* (*fig. 10*) qui présente bien, en effet, l'image du phénomène, comme on peut s'en assurer en répétant l'expérience. J'aurais desiré faire des constructions semblables pour toutes les autres observations, afin de faciliter la comparaison de la théorie avec l'expérience; mais la longueur des calculs et le peu de temps qui me restait pour terminer mon Mémoire ne me l'ont pas permis.

C'est par la même raison que je ne puis présenter qu'un petit nombre de résultats sur les franges produites par un corps étroit. J'ai suivi, dans la détermination de leurs *maxima* et *minima*, une marche absolument analogue à celle que j'ai indiquée pour les franges qui proviennent d'une petite ouverture: seulement, au lieu de prendre l'intégrale entre *A* et *G* (*fig. 9*), *AG* représentant maintenant la largeur du corps qui intercepte la lumière, je l'ai prise depuis *A* jusqu'à l'infini du côté *S*, et depuis *G* jusqu'à l'infini du côté *T*, ou, ce qui revient au même, j'ai retranché de 1 l'intégrale tabulaire prise entre les limites *A* et *G*.

TABLEAU COMPARATIF

Des Résultats de la Théorie et de l'Expérience sur la position des maxima *et des* minima *dans les Franges produites par l'interposition d'un corps opaque étroit.*

NUMÉROS des bandes brillantes et obscures comptés à partir du milieu.	VALEURS approchées de *v* comptées du bord du corps opaque.	INTENSITÉS correspondantes.	VALEURS de *v* répondant aux *maxima* ou aux *minima*, comptées du bord du corps opaque.	DISTANCES des *maxima* ou *minima* à la projection du milieu de l'ouverture.		DIFFÉRENCES
				Calcul.	Observations.	
1.re OBSERVATION.						
$a = 5^{m},049$; $b = 0^{m},615$; $c = 0^{mm},78$; valeur tabulaire de $c = 1,865$.						
1.er minimum, bande intérieure du 1.er ordre.	— 0,565. — 0,465. — 0,365.	0,08541. 0,05519. 0,11333.	— 0,481.	mm. 0,21.	mm. 0,23.	— 2.
4.e minimum, bande extérieure du 1.er ordre.	+ 1,735. + 1,835. + 1,935.	1,5834. 1,3669. 1,5797.	+ 1,835.	1,30.	1,30.	0.
5.e minimum, bande extérieure du 2.e ordre.	+ 2,635. + 2,735. + 2,835.	1,9025. 1,5395. 1,6959.	+ 2,755.	1,73.	1,72.	+ 1.
2.e OBSERVATION.						
$a = 3^{m},047$; $b = 1^{m},213$; $c = 1^{mm},326$; valeur tabulaire de $c = 2,520$.						
1.er minimum, bande intérieure du 1.er ordre.	— 1,000. — 0,900. — 0,800.	0,05937. 0,01568. 0,05127.	— 0,895.	mm. 0,27.	mm. 0,27.	0.
2.e minimum, bande intérieure du 2.e ordre.	— 0,300. — 0,200. — 0,100.	0,2649. 0,2147. 0,2722.	— 0,203.	0,78.	0,81.	— 3.

NUMÉROS des bandes brillantes et obscures comptés à partir du milieu.	VALEURS approchées de v comptées du bord du corps opaque.	INTENSITÉS correspondantes.	VALEURS de v répondant aux *maxima* ou aux *minima*, comptées du bord du corps opaque.	DISTANCES des *maxima* ou *minima* à la projection du milieu de l'ouverture. Calcul.	Observations.	DIFFÉRENCES.
6.e maximum, bande brillante extérieure du 2.e ordre.	+ 2,200. + 2,300. + 2,400.	2,1547. 2,5708. 2,4681.	+ 2,330.	mm. 2,64.	mm. 2,64.	0.
3.e OBSERVATION.						
$a = 6^m,598$; $b = 0^m,553$; $c = 1^{mm},322$; valeur tabulaire de $c = 3,277$.						
3.e minimum, bande intérieure du 3.e ordre.	— 0,300. — 0,200. — 0,100.	0,2725. 0,2332. 0,3293.	— 0,221.	mm. 0,62.	mm. 0,63.	— 1.
5.e minimum, bande intérieure du 5.e ordre.	+ 0,723. + 0,760. + 0,800.	1,9753. 1,9514. 1,9737.	+ 0,762.	1,05.	1,10.	— 5.
4.e OBSERVATION.						
$a = 0^m,778$; $b = 0^m,553$; $c = 1^{mm},322$; valeur tabulaire de $c = 4,117$.						
3.e minimum, bande intérieure du 3.e ordre.	— 1,000. — 0,900. — 0,800.	0,10815. 0,05264. 0,07836.	— 0,882.	mm. 0,65.	mm. 0,65.	0.
5.e minimum, bande intérieure du 5.e ordre.	— 0,100. 0,000. + 0,083.	0,4813. 0,4368. 0,4843.	— 0,010.	1,13.	1,16.	— 3.

On voit que le calcul s'accorde bien avec l'expérience, excepté au cinquième *minimum* de la troisième observation, où la différence est trop sensible relativement à la largeur des

franges, pour qu'on puisse l'attribuer à l'incertitude ordinaire des mesures. Mais il est à remarquer que ce *minimum* est très-peu prononcé, et qu'il se trouve d'ailleurs entre deux bandes brillantes d'intensités très-différentes : le *minimum* doit donc paraître plus voisin de la bande la plus brillante, ou plus éloigné du centre de l'ombre, qu'il ne l'est effectivement; et c'est aussi dans ce sens que le calcul diffère de l'observation.

Les observations 3 et 4 confirment ce que la théorie nous avait appris relativement à l'influence des variations de *a* sur la position des franges intérieures. Nous voyons que leurs largeurs ne restent pas constantes, quoique *c* et *b* soient les mêmes dans les deux expériences: elles sont sensiblement plus larges dans la seconde. La différence de position donnée par l'observation pour le *minimum* du cinquième ordre est $0^{mm},06$, et celle déduite de la théorie $0^{mm},08$: on voit qu'elles sont à peu près égales.

Dans la première observation, les franges extérieures étaient singulièrement altérées par le peu de largeur du corps opaque: les bandes obscures du premier et du deuxième ordre étaient beaucoup plus fines qu'elles ne le sont ordinairement, et la troisième bande obscure se trouvait presque effacée. J'ai voulu vérifier la théorie relativement à ce caractère remarquable du phénomène. J'ai calculé les intensités de la lumière pour différens points de ces franges, et, en les comparant à celles des mêmes points, dans le cas d'un écran indéfiniment étendu, j'ai trouvé qu'en effet les variations d'intensité étaient plus rapides pour les bandes obscures du premier et du deuxième ordre, et plus lentes pour celles du troisième, dans le premier cas que dans le second. Les courbes *A B C E F G H I K* et *a b c e f g h i k* (*fig. 11*) ont été construites d'après les résultats de mon calcul réunis dans le tableau ci-dessous. La première représente les variations de la lumière pour le cas de l'obser-

vation n.° 1; et l'autre, ces mêmes variations dans le cas ordinaire d'un écran très-large.

NUMÉROS des ordonnées.	ABSCISSES.	ORDONNÉES pour l'observation n.° 1.	ORDONNÉES pour le cas ordinaire.
1.	1,535.	2,5202.	2,2327.
2.	1,735.	1,5834.	1,7042.
3.	1,835.	1,3669.	1,5689.
4.	1,935.	1,5797.	1,5894.
5.	2,135.	2,1851.	2,0323.
6'.	2,535.	2,2772.	2,0743.
6.	2,635.	1,9025.	1,8091.
7.	2,735.	1,5395.	1,6870.
8.	2,835.	1,6959.	1,7934.
8'.	2,935.	2,2098.	2,0544.
9.	3,200.	1,9532.	2,1296.
10.	3,300.	1,8984.	1,8596.
11.	3,350.	1,8907.	1,7693.
12.	3,400.	1,8999.	1,7451.
13.	3,500.	1,8303.	1,9037.
14.	3,600.	2,0319.	2,1683.

L'observation n.° 2 offrait aussi une altération singulière des franges extérieures. La bande obscure du premier ordre présentait une teinte à peu près uniforme entre deux limites, la première située à $2^{mm},16$ environ du centre de l'ombre, la deuxième à $2^{mm},44$, après laquelle l'intensité de la lumière augmentait brusquement. La bande brillante du second ordre était plus vive et beaucoup plus fine qu'à l'ordinaire; et la bande obscure du même ordre était, au contraire, devenue plus vague et plus étendue. La théorie s'accorde encore ici avec l'observation, comme on le reconnaîtra en jetant les yeux sur la *figure 12*, qui représente les variations d'intensité des différens points de ces franges, pour le cas de l'observation n.° 2,

et celui d'un écran indéfiniment étendu. Cette figure a été construite d'après les résultats du calcul réunis dans le tableau ci-dessous :

	NUMÉROS des ordonnées.	ABSCISSES ou valeurs de v.	ORDONNÉES pour l'observation n.° 2.	ORDONNÉES pour le cas ordinaire.
	1.	1,600.	1,9304.	2,0472.
Limite observée.	2.	1,677.	1,6378.	1,8369.
	3.	1,900.	1,7466.	1,5633.
Limite observée.	4.	2,057.	1,6907.	1,8187.
	5.	2,200.	2,1547.	2,2047.
	6.	2,300.	2,5708.	2,3787.
	7.	2,400.	2,4681.	2,3673.
	8.	2,500.	2,0166.	2,0511.
	9.	2,600.	1,8093.	1,8935.
	10.	2,700.	1,8532.	1,7051.
	11.	2,800.	1,7789.	1,7310.
	12.	2,900.	1,7981.	1,9571.
	13.	3,000.	2,2184.	2,2153.

Je viens d'appliquer le principe d'Huygens aux trois classes principales de phénomènes que présente la diffraction; savoir: 1.° aux franges produites par le bord rectiligne et indéfini d'un seul écran assez large pour qu'il ne vienne pas de lumière sensible de l'autre côté; 2.° aux franges qui résultent du système de deux écrans semblables très-rapprochés l'un de l'autre; 3.° à celles enfin qui accompagnent et subdivisent l'ombre d'un écran très-étroit (1). En comparant aux obser-

(1) Je ne comprends pas ici les franges produites par un verre prismatique ou par deux miroirs formant un angle rentrant très-obtus; à proprement parler, elles n'appartiennent pas à la diffraction, puisqu'elles ne sont point formées par des rayons diffractés ou infléchis, mais par deux faisceaux lumineux régulièrement réfléchis ou réfractés.

vations les résultats déduits de ce principe par la théorie des interférences, j'ai fait voir qu'il suffisait à l'explication des phénomènes dans ces différentes circonstances, et que l'expression générale de l'intensité de la lumière à laquelle il conduisait, les représentait fidèlement jusque dans leurs aspects les plus bizarres et en apparence les plus irréguliers.

Mais, outre ces trois cas généraux, on peut en imaginer une infinité d'autres résultant de leur combinaison. La théorie s'y appliquerait avec la même facilité, et sans doute avec le même succès : les calculs seraient seulement plus longs en raison de la multiplicité des limites des intégrales. Les expériences exigeraient aussi des appareils plus compliqués.

Dans la première section de ce Mémoire, j'ai décrit un phénomène qui présente la combinaison de deux des cas principaux de la diffraction : ce sont les franges que la lumière engendre en passant par deux ouvertures très-étroites et suffisamment rapprochées. Ayant découpé une feuille de cuivre dans la forme représentée par la *figure 2*, j'ai remarqué que, lorsque les larges franges produites par chacune des fentes $CEC'E'$ et $DFD'F'$ se trouvaient assez dilatées, en raison de la distance à laquelle je me plaçais de l'écran, pour que l'ombre de $CDFE$ ne contînt plus que la bande brillante du premier ordre, les franges qui résultaient du concours des deux faisceaux lumineux étaient beaucoup plus nettes et plus vives que les franges intérieures de $ACBD$. La partie inférieure $CEDF$, d'abord plus éclairée que l'autre, devenait plus obscure lorsque je m'éloignais assez de l'écran; mais ses franges continuaient à présenter des couleurs plus pures dans la lumière blanche, et des bandes obscures et brillantes plus tranchées dans la lumière homogène. L'appareil trop simple dont je me servais n'étant point susceptible de mesures exactes, je n'ai pas appliqué le calcul à cette expérience : je me bornerai à indiquer par des considérations générales comment on peut se rendre compte du phénomène.

Soit *L* (*fig. 13*) le point lumineux, *IK* la projection horizontale de la partie *A E B F* (*fig. 2*) de l'écran, et *P* un point que l'on considère dans l'intérieur de son ombre, sur la ligne milieu *L O*, par exemple. Du point *L* comme centre, et d'un rayon égal à *L I*, je décris l'arc *I M M'*, qui représente l'onde incidente. Si du point *P* comme centre, et d'un rayon égal à *I P*, je décris l'arc *I m m'*, les intervalles entre ces deux arcs donneront les différences des chemins parcourus par les ondes élémentaires qui concourent au point *P*. Considérons d'abord le cas de la partie supérieure de l'écran, c'est-à-dire, celui où l'onde *I m m'* n'est plus interceptée au-delà du point *I*. Concevons cette onde divisée en une infinité de petits arcs *I M*, *M M'*, &c., de façon que les droites menées en *P* par deux points de division consécutifs diffèrent de la longueur d'une demi-ondulation; et supposons, pour fixer et simplifier les idées, que le point *P* soit assez éloigné du bord de l'ombre, ou le rayon *I P* assez incliné sur l'onde incidente, pour que ces arcs soient sensiblement égaux; alors chacun d'eux se trouvera compris entre deux autres qui détruiront l'effet qu'il tend à produire au point *P*, excepté l'arc extrême *I M*, dont les rayons ne perdront que la moitié de leur intensité par leur discordance avec les vibrations de l'arc voisin *M M'*. Si l'on intercepte cet arc et tout le reste de l'onde, on augmentera donc la lumière au point *P* (1); c'est l'effet que produit à une certaine distance la partie *G C' E'* de l'écran (*fig. 2*). Mais à mesure que le point *P* (*fig. 13*) s'éloigne du corps opaque, l'arc *I m m'* se rapproche de l'onde *I M M'*, et il peut même s'en rapprocher indéfiniment si le point lumineux *L* est à une distance infinie. Les divisions *M*, *M'*, &c., étant déterminées par les intervalles entre ces deux arcs, s'écarteront du point *I*

(1) Elle serait augmentée bien davantage encore, si l'écran était percé vis-à-vis tous les arcs de rang pair, et interceptait seulement les rayons de ceux de rang impair.

à mesure qu'ils se rapprocheront; il en résultera donc une augmentation continuelle de la portion *M I* de l'onde incidente, dont les rayons envoyés au point *C* conserveront toujours au moins la moitié de leur intensité derrière la partie supérieure de l'écran. Mais, dans la partie inférieure, l'ouverture *C E C' E'* (*fig. 2*) n'augmentant pas de largeur, si le point lumineux est suffisamment éloigné, l'arc éclairant *I M* (*fig. 13*) deviendra à la fin assez grand par rapport à cette ouverture, pour que le point *P* reçoive plus de lumière dans la partie supérieure de l'ombre que dans la partie inférieure.

Considérons maintenant les franges produites par le concours des rayons lumineux qui viennent des deux côtés de l'écran *A E B F* (*fig. 2*). Derrière la partie supérieure *A B C D*, la lumière infléchie diminuant rapidement d'intensité à mesure qu'elle s'éloigne du bord de l'ombre géométrique, toutes les franges, excepté celles qui sont très-voisines du centre, sont formées par deux faisceaux lumineux qui diffèrent beaucoup d'intensité; par conséquent, les bandes obscures doivent être peu prononcées quand on se sert de lumière homogène, et les couleurs mêlées de gris lorsqu'on emploie la lumière blanche. Derrière la partie inférieure *C E D F*, les deux faisceaux lumineux introduits par les fentes *C E C' E'* et *D F D' F'* ont une intensité à peu près uniforme dans une étendue assez considérable de la bande brillante du premier ordre de chacune de ces ouvertures; et si elles sont assez étroites, par rapport à l'intervalle qui les sépare, pour que l'espace dans lequel la lumière infléchie est sensiblement uniforme, comprenne toutes les franges qui proviennent du concours des deux faisceaux lumineux, alors les vibrations lumineuses se détruiront presque entièrement dans les points de discordance complète; les bandes obscures seront en conséquence bien plus prononcées que dans la partie supérieure de l'ombre, lorsqu'on emploiera de la lumière homogène,

et la lumière blanche y fera naître des couleurs beaucoup plus pures.

Quand on observe ces franges près de l'écran, avant que les franges plus larges produites par chaque fente soient sorties de l'ombre de $AEBF$, le phénomène présente un aspect très-compliqué, et qui change rapidement avec la distance de la loupe, sur-tout lorsque l'intervalle entre les deux fentes n'est pas très-considérable relativement à leur largeur. Il serait intéressant de déterminer par le calcul la position des *maxima* et *minima* des bandes obscures et brillantes, et de comparer ces résultats avec ceux de l'observation. Je ne doute pas que la théorie n'en reçût encore une nouvelle confirmation.

Jusqu'à présent j'ai supposé que toutes les ondes émanaient d'un centre unique. Les points lumineux, dans les expériences de diffraction, sont toujours un assemblage d'une infinité de centres de vibration, et c'est à chacun d'eux en particulier qu'on doit appliquer tout ce qui a été dit précédemment. Tant qu'ils sont très-peu éloignés les uns des autres, les franges qu'ils produisent coïncident sensiblement; mais les bandes obscures des uns se mêlent avec les bandes brillantes des autres à mesure qu'on augmente les dimensions du point éclairant, et elles finissent par s'effacer complétement. Cet effet est d'autant plus sensible sur les franges extérieures, qu'on s'éloigne davantage de l'écran, parce qu'il augmente comme cette distance, tandis que la largeur des bandes obscures et brillantes croît dans un rapport plus lent. Voilà pourquoi un point lumineux assez fin pour produire des franges très-nettes dans le voisinage du corps opaque peut n'en donner que de très-confuses à une distance plus considérable.

Il n'est pas nécessaire que le corps interposé soit opaque, pour que cette interposition produise sur ses bords des phénomènes de diffraction; il suffit qu'une partie de l'onde soit retardée par rapport aux parties contiguës. C'est l'effet que

produisent les corps transparens dont le pouvoir réfringent diffère sensiblement du milieu qui les entoure : aussi font-ils naître des franges qui bordent en dedans et en dehors l'ombre de leur contour. Elles sont même tout-à-fait semblables aux franges extérieures des corps opaques, lorsque la différence de marche entre les rayons qui ont traversé l'écran transparent et les rayons extérieurs contient un nombre d'ondulations un peu considérable ; parce qu'alors les effets de leur influence mutuelle ne sont plus sensibles, et qu'il ne résulte de leur mélange qu'une simple addition de lumière uniforme. Mais il n'en est pas ainsi quand l'écran transparent est très-mince, ou que son pouvoir réfringent diffère très-peu de celui du milieu dans lequel il est plongé : alors les franges sont sensiblement altérées par l'influence mutuelle des rayons lumineux qui ont traversé la lame transparente, et de ceux qui ont passé à côté. C'est par une raison semblable que les stries des lames de mica résultant de légères variations d'épaisseur font naître des franges qui se colorent dans la lumière blanche d'une façon toute particulière, ainsi que M. Arago l'a remarqué.

Quant aux franges du genre de celles que nous avons appelées *intérieures*, on ne peut pas les obtenir avec un corps transparent suffisamment étroit, parce que la lumière directe qui le traverse, beaucoup plus vive que les rayons infléchis, masque les effets de leur influence mutuelle ; et que d'ailleurs les bandes obscures et brillantes que ce corps transparent tend à faire naître comme ouverture étroite, ne coïncident pas avec celles qu'il tend à produire, comme écran d'une petite étendue.

Les phénomènes de la diffraction une fois expliqués pour le cas d'une lumière homogène, sont faciles à concevoir dans la lumière blanche. Les franges résultent alors de la superposition de toutes les bandes obscures et brillantes de diverses largeurs produites par les différentes espèces d'ondes dont se

compose la lumière blanche. Ainsi, après avoir calculé l'intensité de chaque espèce principale de rayons dans le point que l'on considère, d'après leur longueur d'ondulation et au moyen de la théorie que je viens d'exposer, on trouvera la teinte qui s'y manifeste, en substituant ces valeurs dans la formule empirique que Newton a donnée pour déterminer le résultat d'un mélange quelconque de rayons colorés.

Les surfaces polies éclairées par un point lumineux présentent des phénomènes de diffraction tout-à-fait semblables à ceux qu'on observe dans la lumière directe. Le champ lumineux réfléchi par un miroir est bordé de franges pareilles à celles qui entourent les ombres des corps. Quand sa surface est très-étroite, ou qu'on la noircit en y conservant seulement une ligne brillante, ou qu'on l'incline beaucoup, de manière à diminuer suffisamment la largeur du champ lumineux (1), on reproduit le phénomène singulier d'un faisceau lumineux dilaté par une ouverture très-étroite. Deux lignes brillantes,

---

(1) L'aspect du phénomène est rigoureusement le même que si les rayons émanaient de l'image du point lumineux, et qu'on remplaçât le miroir par un écran percé d'une ouverture égale à la surface réfléchissante et semblablement inclinée. Mais les franges ainsi produites ne sont pas tout-à-fait pareilles à celles que formerait une ouverture dont le plan n'aurait pas la même inclinaison, serait, par exemple, perpendiculaire au faisceau lumineux, quoique d'ailleurs sa distance au point radieux et son ombre géométrique fussent égales à celles de l'ouverture inclinée. La différence est d'autant plus sensible, que la largeur de l'ouverture ou du miroir incliné est plus considérable par rapport à leur distance au point lumineux. Il en est de même des franges intérieures produites par un écran incliné, comparées à celles d'un écran perpendiculaire.

La raison de cette différence est facile à saisir. Soient A et G (*fig.* 14) les deux bords de l'écran incliné, et C le point lumineux. Considérons l'onde incidente, d'un côté, au moment où elle arrive en A; de l'autre, au moment où elle n'a point encore dépassé le point G; de sorte que les ondes élémentaires ne se trouvent modifiées ni antérieurement ni postérieurement par l'interposition de l'écran. Supprimons-le pour un instant, et prolongeons les arcs GN et AM jusqu'à leur rencontre D et B avec une droite commune CP menée par le point lumineux. Il est clair que la résultante de toutes les vibrations qui émanent de la demi-onde DGN et concourent au point P, doit être pareille de grandeur et de position à la résultante des ondes élémentaires parties

suffisamment rapprochées sur la surface d'un miroir noirci dans le reste de son étendue, font naître les mêmes franges que deux fentes pareilles dans un écran. Si, au lieu de noircir une grande partie de la surface réfléchissante, on n'y trace, au contraire, qu'une ligne noire d'une largeur peu considérable, elle produira des franges semblables à celles qu'on observe dans l'ombre d'un écran étroit. Enfin les phénomènes se passent absolument comme si, la surface du miroir étant transparente, les rayons émanaient réellement de l'image du point lumineux. La raison en est bien simple : on sait que l'image, placée sur la perpendiculaire abaissée du point lumineux et à une distance égale de la surface du miroir, jouit de cette propriété remarquable, que sa distance à un point quelconque de cette surface est égale à celle du même point au point lumineux : en considérant donc les rayons comme partis de l'image même du point lumineux, on ne change rien à la différence des chemins parcourus par les ondes élémentaires

---

de la demi-onde BAM, et concourant au même point P. Cela posé, s'agit-il de déterminer le milieu de la bande brillante du premier ordre dans l'ombre de l'écran AG; il faut chercher pour quelle position du point P il y a coïncidence parfaite entre la résultante des ondes élémentaires qui émanent de GN, et celle des ondes élémentaires qui prennent leur source dans l'onde MA. Il est clair que cette condition est satisfaite quand les arcs DG et AB, supprimés par l'écran, répondent à la même différence de chemins parcourus, c'est-à-dire, lorsque $CG+GP-CP=CA+AP-CP$, ou $CG+GP=CA+AP$; parce qu'alors les intégrales qui donnent les deux résultantes sont composées des mêmes élémens. Mais la ligne CP, qui satisfait à l'équation $CG+GP=CA+AP$, n'est point celle qui divise l'angle ACG en deux parties égales; elle s'approche davantage du côté A le plus voisin de la loupe, ce qui détruit la symétrie des franges intérieures par rapport aux bords de l'ombre géométrique; et cet effet se trouve encore augmenté, dans ses apparences, par la plus grande extension des franges extérieures qui viennent de l'autre côté de l'écran.

On démontrerait, par des raisonnemens semblables, que les franges produites par un diaphragme incliné ne doivent pas être disposées d'une manière symétrique relativement à la ligne qui divise en deux parties égales l'angle des deux rayons tangens aux bords de l'ouverture, ainsi que cela a lieu lorsque le plan du diaphragme est perpendiculaire au faisceau lumineux.

qui concourent à la formation des franges, et par conséquent à la largeur et aux intensités relatives de leurs bandes brillantes et obscures.

A cette occasion, je remarquerai que la position de la résultante des ondes élémentaires pour un endroit quelconque, dépendant uniquement de ces différences de chemins parcourus, doit être, après la réflexion, la même que si les rayons émanaient effectivement du point dont je viens de parler; par conséquent, dans le cas d'une surface polie indéfiniment étendue, toutes les résultantes partielles seront situées à la même distance de ce point, qui se trouvera ainsi le centre de l'onde réfléchie.

C'est par la considération de ces ondes élémentaires qu'Huygens a expliqué d'une manière si simple les lois de la réflexion et de la réfraction, en ramenant ces phénomènes aux mêmes principes que la propagation de la lumière dans un milieu homogène. Mais son explication laissait quelque chose à desirer. Il n'avait pas montré comment il ne résulte qu'un seul système d'ondes de cette multitude de systèmes d'ondes élémentaires, parce qu'il n'avait point fait entrer en considération le principe des interférences. Il supposait que la lumière n'est sensible que dans les points où les ondes élémentaires coïncident parfaitement; tandis que l'absence totale du mouvement lumineux ne peut tenir qu'à l'opposition des mouvemens élémentaires. C'est sans doute ce qui lui a fait croire qu'il ne s'infléchissait pas de lumière sensible dans les ombres, et l'a empêché de deviner les phénomènes de la diffraction, dont sa théorie pouvait lui dévoiler les lois sans le secours de l'expérience.

Cette théorie, aidée du principe des interférences, indique donc la marche des rayons réfléchis, non-seulement dans le cas particulier d'une surface polie indéfiniment étendue, mais encore dans ceux d'une surface très-étroite ou discontinue; elle fait voir comment le peu de largeur de la surface occa-

sionne la dilatation de la lumière réfléchie, et comment un système de miroirs très-étroits placés l'un à côté de l'autre, et séparés seulement par de très-petits intervalles, peut produire des images colorées en raison de l'influence mutuelle des faisceaux lumineux ainsi dilatés : c'est le phénomène des surfaces rayées. Elle explique avec la même facilité les images et les anneaux colorés produits par un tissu très-fin et un assemblage irrégulier de fils très-déliés ou d'atomes légers, d'une grosseur à peu près égale, placés entre l'œil du spectateur et un objet lumineux.

Je ne crois pas nécessaire de m'appesantir sur ces phénomènes, qui ne sont que des combinaisons de ceux que j'ai décrits précédemment et dont j'ai essayé de donner une théorie générale.

NOTE I.

Calcul de l'intensité de la Lumière au centre de l'ombre d'un Écran et d'une Ouverture circulaires éclairés par un point radieux.

Après le jugement de l'Académie sur les mémoires envoyés au concours pour le prix de diffraction, M. Poisson m'ayant fait remarquer que les intégrales définies qui représentent l'intensité de la lumière, pouvaient aisément s'obtenir pour le centre de l'ombre d'un écran ou d'une ouverture circulaires, je fis le calcul pour ce dernier cas, et j'y trouvai l'explication des couleurs si vives que j'avais souvent remarquées au centre du pinceau de lumière qui a traversé un petit trou parfaitement rond. M. Poisson m'avait déjà communiqué le théorème singulier auquel il avait été conduit dans le premier cas, *savoir*: que le centre de l'ombre d'un écran circulaire doit être aussi éclairé que si l'écran n'existait pas, du moins lorsque les rayons y pénètrent sous des incidences peu obliques. Je me propose de donner ici la solution la plus simple de ces deux problèmes, sans employer les intégrales définies qui m'ont servi dans le mémoire précédent à calculer les autres phénomènes de la diffraction.

Subdivisons l'ouverture par une suite de circonférences concentriques infiniment rapprochées les unes des autres. Si nous supposons que leurs rayons soient proportionnels aux racines carrées des nombres naturels 1, 2, 3, &c., les superficies des cercles suivront la progression 1, 2, 3, 4, &c., et celles des anneaux compris entre les petits intervalles qui séparent les circonférences consécutives, seront toutes égales entre elles. Ceci s'applique à la portion de la surface de l'onde incidente qui rencontre l'ouverture du diaphragme, que cette onde soit plane ou sphérique. Nous avons donc subdivisé l'onde incidente en une infinité de petits anneaux concentriques d'égales superficies, et qui envoient par conséquent chacun au centre de la projection de cette ouverture la même quantité de rayons, ayant sensiblement la même intensité, tant que les obliquités ne sont pas trop grandes. Il faut remarquer aussi que, pour chaque anneau, les

rayons qu'il envoie au centre de l'ombre sont tous de même longueur, ont ainsi parcouru des chemins égaux, et s'y trouvent en accord parfait. Par conséquent, les systèmes d'ondes résultans sont proportionnels aux superficies de ces anneaux, et, partant, d'égale intensité.

Cela posé, considérons le cas particulier où la différence de marche entre le rayon central et ceux qui sont partis des bords de l'ouverture, est un nombre entier de fois la longueur d'une demi-ondulation; et d'abord supposons que ce nombre soit pair : il est aisé de voir qu'alors toutes les ondes élémentaires qui arrivent au centre de l'ombre se détruisent mutuellement. En effet, divisons la portion de la surface de l'onde incidente comprise dans l'ouverture du diaphragme par des circonférences concentriques espacées de telle manière, que les rayons partis de deux circonférences consécutives et concourant au centre de l'ombre, diffèrent d'une demi-ondulation : nous aurons partagé cette ouverture en autant d'anneaux, y compris le petit cercle du milieu, qu'il y a de demi-ondulations de différence entre le rayon central et les rayons extrêmes; et comme le nombre de ces demi-ondulations est pair, celui des divisions de l'ouverture le sera aussi. Or il est évident qu'elles auront même superficie, ou, en d'autres termes, qu'elles contiendront chacune le même nombre des anneaux élémentaires dont nous avons parlé précédemment, et que, dans deux divisions consécutives, les anneaux élémentaires correspondans enverront des rayons qui se trouveront en discordance complète au centre de l'ombre. Par conséquent, tous les rayons envoyés en ce point par deux divisions consécutives se détruiront mutuellement; et puisqu'elles sont en nombre pair, il y aura destruction complète de toutes les ondes élémentaires qui émanent de l'onde incidente, et le centre de la projection de l'ouverture sera privé de lumière. Il en recevra au contraire la plus grande quantité possible, quand la différence de marche entre le rayon central et les rayons extrêmes contiendra un nombre impair de demi-ondulations, puisqu'alors une de ces divisions restera tout entière pour éclairer le centre de l'ombre.

Si l'on veut savoir maintenant quel rapport d'intensité il y a entre la lumière reçue dans ce dernier cas, et celle qui tombe au même point quand on supprime tout-à-fait l'écran, il suffit d'appliquer les raisonnemens ci-dessus au cas où l'ouverture serait infiniment large. Mais, pour arriver à un résultat exact, il ne faut plus supposer que chaque division de l'ouverture ou anneau principal détruit l'effet produit par l'anneau suivant, dont les rayons diffèrent d'une demi-ondulation; car,

quoique la superficie des deux anneaux et l'intensité des rayons qu'ils envoient diffèrent infiniment peu, ces différences, quelque petites qu'elles soient, étant répétées une infinité de fois, peuvent produire une quantité sensible. Il est bien plus rigoureux de dire que les vibrations qui émanent de chaque anneau, sont détruites par la moitié des vîtesses absolues qu'apportent les rayons de l'anneau qui le précède et de celui qui le suit; car, si les différences dont nous venons de parler sont des infiniment petits du premier ordre entre deux anneaux consécutifs, elles deviennent des infiniment petits du deuxième ordre quand on compare la superficie d'un anneau ou l'intensité de ses rayons avec la demi-somme des superficies ou de l'intensité des rayons des deux anneaux entre lesquels il est compris. On n'a donc plus à craindre que le résultat du calcul soit affecté d'une erreur sensible par la somme des quantités négligées, quelque nombreuses qu'elles soient.

En appliquant cette marche de calcul à une ouverture finie, nous arriverions aux mêmes résultats que nous venons de trouver par une autre combinaison des ondes élémentaires. En effet, les rayons de chaque anneau étant détruits par la moitié des vîtesses absolues des ondes des deux divisions contiguës, il ne restera que *la moitié* des vîtesses absolues du petit cercle central et de l'anneau extrême, qui se détruiront aussi mutuellement si le nombre des divisions est pair, et s'ajouteront s'il est impair, de manière à reproduire la même quantité de lumière qu'aurait fournie un seul anneau, ou le petit cercle central. Cette addition et cette soustraction ne sont exactes, bien entendu, qu'autant que les rayons extrêmes n'ont pas trop d'obliquité.

Supposons maintenant que l'ouverture circulaire soit infiniment grande; les ondes élémentaires devenant d'autant plus faibles que les rayons qui les apportent s'écartent davantage de la direction normale à l'onde incidente, on peut regarder comme nulles celles qui viennent de l'anneau extrême, et alors il ne reste plus que la moitié des vîtesses absolues imprimées aux molécules éthérées par les rayons du petit cercle central. Ainsi, l'intensité de la lumière étant proportionnelle au carré des vîtesses absolues, lorsque l'ouverture est indéfinie, ou qu'il n'y a pas d'écran, le point dont nous nous occupons reçoit quatre fois moins de lumière qu'avec un écran percé d'une ouverture circulaire d'un diamètre tel (relativement à sa position) qu'il y ait une différence d'un nombre impair de demi-ondulations entre l'axe et les rayons extrêmes. Quel que soit le diamètre du diaphragme, on peut toujours satisfaire à cette condition, en faisant varier convenablement la

distance du carton sur lequel on reçoit l'ombre, et même, s'il est nécessaire, celle du point lumineux.

En représentant par r le rayon de l'ouverture circulaire, et par a et b les distances de l'écran au point lumineux et au carton, on sait que la différence de marche entre l'axe et les rayons partis de la circonférence est égale à

$$\frac{\frac{1}{2} r^2 (a+b)}{ab}.$$

A l'aide de cette formule on peut aisément calculer les distances auxquelles il faut placer le carton ou le foyer de la loupe servant à observer les franges, pour obtenir un *minimum* ou un *maximum* de lumière au centre de la projection de l'ouverture. Il suffit d'égaler cette expression à un nombre pair ou impair de demi-ondulations : ce qui donne, dans le premier cas,

$$\frac{r^2 (a+b)}{ab} = 2 n \lambda;$$

et dans le second,

$$\frac{r^2 (a+b)}{ab} = (2n+1) \lambda.$$

A l'aide de ces deux équations on calcule, pour toutes les valeurs 1, 2, 3, &c., qu'on aura données à n, la distance de b qui correspond à un *maximum* ou à un *minimum*, dans une lumière homogène dont la longueur d'ondulation λ est connue.

J'ai vérifié ces formules par l'observation, avec la même lumière rouge homogène que j'avais déjà employée dans mes autres expériences de diffraction, et j'ai trouvé qu'effectivement, en plaçant le foyer de la loupe aux distances calculées d'après la première équation, on apercevait comme une tache d'encre au centre de l'ouverture circulaire, tandis que ce même point paraissait atteindre son *maximum* de clarté aux distances déduites de la seconde équation.

La tache noire n'était d'une obscurité complète que pour les distances correspondantes aux valeurs de n qui ne passaient pas les nombres 3 ou 4. Au-delà, c'est-à-dire, plus près de l'écran, le défaut d'homogénéité de la lumière employée commençait à se faire sentir, et la tache centrale n'était plus d'un noir aussi foncé.

Les raisonnemens que nous avons faits pour le cas d'une ouverture indéfinie, peuvent s'appliquer à un écran circulaire, et donner une démonstration bien simple du théorème singulier que M. Poisson avait

déduit des intégrales générales. En effet, divisons la surface de l'onde incidente, à partir du contour de l'écran circulaire, en une suite indéfinie d'anneaux principaux dont les rayons correspondans envoyés au centre de l'onde diffèrent encore d'une demi-ondulation. Ces divisions principales contiendront encore le même nombre de petits anneaux élémentaires d'égales superficies, et dont les rayons différeront d'une demi-ondulation d'une division à l'autre. Ainsi on pourra regarder tous les rayons venant de chaque anneau principal comme détruits complétement par la moitié des vibrations des rayons des deux anneaux contigus, excepté celui qui borde l'écran, et l'anneau extrême, dont les rayons conservent la moitié de leurs vîtesses absolues. Mais, ainsi que nous l'avons déjà remarqué, les rayons de l'anneau extrême peuvent être considérés comme nuls à cause de leur grande obliquité; en sorte qu'il ne reste plus que la moitié des vibrations des rayons de l'anneau contigu à l'écran. Or cet anneau a la même superficie que le petit cercle central de l'ouverture circulaire; d'un autre côté, les rayons qu'il envoie au centre de l'ombre ont sensiblement la même intensité que ceux qui émanaient de ce petit cercle central, si du moins leur inclinaison n'est pas trop prononcée; donc, dans ce cas, le centre de l'ombre d'un écran circulaire doit être autant éclairé que s'il recevait la lumière par une ouverture circulaire indéfinie, c'est-à-dire, que s'il n'y avait pas d'écran. C'est ce que M. Arago a vérifié sur l'ombre d'un écran de 2^{mm} de diamètre (1).

Ce théorème est indépendant, comme on voit, du diamètre de l'écran et de la distance à laquelle on reçoit son ombre, tant qu'il n'en résulte pas une trop grande obliquité pour les rayons infléchis; il est également indépendant de la longueur d'ondulation, c'est-à-dire que,

(1) Cet écran était collé par son centre, avec un peu de cire molle, sur une plaque de verre à faces parallèles. Dès que le diamètre de l'écran est un peu grand, par exemple d'un centimètre, les moindres défauts de ses bords ou de la plaque de verre sur laquelle il est fixé, altèrent la régularité des anneaux obscurs et brillans qui entourent la tache blanche du centre de l'ombre. Il faut que le petit disque métallique soit tourné avec le plus grand soin en forme de cône tronqué, de manière que ses bords soient taillés en biseau. La plaque de verre doit être parfaitement exempte de stries et avoir ses faces bien planes. En se servant d'un point lumineux extrêmement éloigné, tel qu'une étoile fixe, on pourrait employer des écrans beaucoup plus grands, si l'on s'en éloignait assez pour que le point brillant du centre de l'ombre acquît un diamètre suffisant. Mais peut-être qu'alors il vaudrait mieux suspendre l'écran à deux fils très-fins, que de le coller sur une plaque de verre.

pour toutes les espèces de rayons colorés, le centre de l'ombre reçoit autant de lumière que s'il n'y avait pas d'écran; par conséquent, ce point doit être toujours blanc, quand on emploie de la lumière blanche, et cela à toute distance de l'écran.

Il n'en est pas de même du centre de la projection d'une ouverture circulaire éclairée par un point lumineux; elle présente souvent dans la lumière blanche les plus vives couleurs, couleurs qui changent avec le diamètre de cette ouverture et sa distance au point lumineux ou au carton sur lequel on en reçoit l'ombre. La vivacité de ces teintes tient à ce qu'il y a successivement destruction *totale* de chacune des espèces de rayons colorés qui composent la lumière blanche; ce qui laisse mieux dominer la couleur des autres.

Pour calculer ces teintes, il devient nécessaire de trouver l'expression générale de l'intensité de la lumière, lorsque la différence de marche entre le rayon central et ceux qui partent des bords de l'ouverture contient un nombre fractionnaire quelconque de demi-ondulations.

Pour un point de l'ouverture distant du centre d'une quantité égale à z, la différence de longueur entre le rayon qui en émane et l'axe, est, ainsi que nous l'avons déjà rappelé,

$$\frac{\frac{1}{2}z^2(a+b)}{ab}.$$

La surface du petit anneau élémentaire qui passe par ce point est égale à $2\pi z\,dz$, et la résultante élémentaire de toutes les vibrations qu'il envoie au centre de l'ombre est proportionnelle à cette expression. Je décompose ce système d'ondes en deux autres, dont l'un soit en accord parfait avec les vibrations envoyées par le centre de l'ouverture, et l'autre en diffère d'un quart d'ondulation : l'intensité du premier sera

$$2\pi z\,dz \cos\left(\frac{\pi z^2(a+b)}{ab\lambda}\right),$$

et celle du second,

$$2\pi z\,dz \sin\left(\frac{\pi z^2(a+b)}{ab\lambda}\right).$$

Pour avoir la somme de toutes les composantes élémentaires en accord parfait avec le rayon central, il faut intégrer la première expression; l'intégrale de la seconde donnera la somme de toutes les composantes dont les vibrations diffèrent des premières d'un quart d'ondulation. Ces intégrations sont très-faciles, parce que $2z\,dz$ est précisément la différentielle de z^2. En intégrant depuis $z = 0$ jusqu'à

$z = r$, et ajoutant les carrés des deux intégrales, on trouve pour le carré de la résultante définitive,

$$2\left(\frac{ab\lambda}{a+b}\right)^2\left[1-\cos\left(\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}\right)\right].$$

Afin de donner plus de clarté et de précision à cette expression de l'intensité de la lumière, il faut la rapporter à une autre intensité fixe prise pour unité, par exemple, à celle de chaque espèce d'ondes à l'unité de distance du point lumineux. Dans ce cas, $a+b=1$. De plus, nous savons que, quand il n'y a plus d'écran, la résultante générale des ondes élémentaires est égale à la moitié de celle que donnerait une ouverture circulaire qui ne comprendrait que le petit cercle central, c'est-à-dire, pour laquelle la différence de chemins parcourus

$$\frac{1}{2}\,\frac{(a+b)r^2}{ab}$$

serait égale à $\frac{1}{2}\lambda$; en sorte qu'on aurait $\frac{(a+b)r^2}{ab\lambda}=1$. Dans ce cas particulier, la formule précédente devient $2(ab\lambda)^2$. Or une pareille ouverture donne un système d'ondes dans lequel les vitesses absolues des molécules éthérées sont doubles de ce qu'elles seraient s'il n'y avait pas d'écran; par conséquent, l'intensité de la lumière est quadruple, et celle qu'on aurait en supprimant le diaphragme, se trouve représentée par $\frac{1}{2}(ab\lambda)^2$, en la déduisant de la formule générale ci-dessus. Mais, puisque cette dernière intensité de lumière est celle que nous prenons pour unité, il faut modifier la formule générale de manière à trouver 1 au lieu de $\frac{1}{2}(ab\lambda)^2$, quand il n'y a plus de diaphragme, c'est-à-dire qu'il faut la diviser par $\frac{1}{2}(ab\lambda)^2$. Elle devient alors

$$\frac{2}{(a+b)^2}\left[1-\cos\left(\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}\right)\right].$$

Cette formule nous conduit aux mêmes équations que nous avons trouvées plus haut pour déterminer les distances b, qui répondent aux *maxima* et *minima* de lumière. En effet, on voit qu'elle devient nulle quand $\cos\left(\frac{\pi(a+b)r^2}{ab\lambda}\right)$ est égal à $+1$, ou $\frac{(a+b)r^2}{ab\lambda}$ égal à un nombre pair, et qu'elle atteint son *maximum*, au contraire, lorsque $\frac{(a+b)r^2}{ab\lambda}$ est un nombre impair. Dans le premier cas, on a

$$\frac{(a+b)r^2}{ab\lambda}=2;\ \frac{(a+b)r^2}{ab\lambda}=4,\ \&c.;$$

d'où l'on tire

$$b = \frac{ar^2}{2d\lambda - r^2};\ b = \frac{ar^2}{4d\lambda - r^2};\ \&c.$$

Je ne rapporterai qu'une des expériences par lesquelles j'ai vérifié cette formule. La distance de l'écran au point lumineux était de 4000^{mm} et le diamètre de l'ouverture de $2^{mm},01$, ou son rayon de $1^{mm},005$. En substituant 4000^{mm} à la place de a et $1^{mm},005$ à la place de r dans la première des valeurs de b, on trouve 987^{mm} pour la distance à laquelle le centre de l'ombre est un noir du premier ordre dans la lumière rouge dont la longueur d'ondulation λ est égale à $0^{mm},000638$; et en effet, en plaçant le foyer de la loupe à cette distance, le centre de l'ouverture circulaire me paraissait d'un noir très-foncé.

Dans la lumière blanche, sa teinte était d'un bleu clair moyen entre le bleu et l'indigo, autant que j'en ai pu juger du moins, sans avoir le spectre solaire pour objet de comparaison.

L'expression générale de l'intensité de la lumière pour les anneaux colorés réfléchis sous l'incidence perpendiculaire est $1 - \cos\left(\frac{4\pi e}{\lambda}\right)$, e représentant l'épaisseur de la lame d'air. En comparant cette formule à la précédente, on voit que le centre de l'ombre d'une ouverture circulaire doit présenter la même série de teintes que les anneaux réfléchis, et que, dans l'expérience dont il s'agit, la teinte centrale doit être celle que donne une lame d'air d'une épaisseur égale à $0^{mm},000319$, ou à 12,56 en millionièmes de pouce anglais. Or, dans la table de Newton, l'indigo pur est donné par une épaisseur de 12,83 : ainsi 12,56 doit répondre à un indigo légèrement violacé; ce qui ne s'accorde pas très-exactement avec l'observation, qui m'a offert une teinte à peu près moyenne entre l'indigo et le bleu.

Mais, en calculant l'intensité des sept principales espèces de rayons, et déterminant la teinte par la formule empirique de Newton pour les mélanges des rayons colorés, on arrive à un résultat qui s'accorde mieux avec l'observation.

On trouve d'abord pour les intensités des sept principales espèces de couleurs :

u	violet	1,998.
i	indigo	1,879.
b	bleu	1,836.
v	vert	0,975.

j . . . . jaune . . . . 0,448.
o . . . . orangé . . . . 0,169.
r . . . . rouge . . . . 0,016.

Substituant ces valeurs dans les formules suivantes (1) :

$$X = \frac{(r+u)\,0{,}8228 + (o+i)\,0{,}2074 - (j+b)\,0{,}5140 - v.\,0{,}9538}{r+o+j+v+b+i+u}, \text{ et}$$

$$Y = \frac{(r-u)\,0{,}4823 + (o-i)\,0{,}9632 + (j-b)\,0{,}8137}{r+o+j+v+b+i+u}, \text{ on a ,}$$

$$X = -\frac{0{,}022}{7{,}321} = -0{,}0030, \text{ et } Y = -\frac{3{,}732}{7{,}321} = -0{,}5098.$$

Mais tang $U = \frac{Y}{X} = \frac{3{,}732}{0{,}022}$; d'où il résulte que $U = 269°.\ 40'$.

Or la séparation du bleu et de l'indigo répond à 265°. 4', angle qui ne diffère du précédent que de 4°. 36'. Ainsi la teinte centrale doit être presque exactement moyenne entre le bleu et l'indigo. De plus, on trouve pour Δ, qui est égal à $\frac{Y}{\sin U}$, 0,510, et par conséquent pour $1 - \Delta$, 0,490; c'est-à-dire que ce bleu contient *moitié* de lumière blanche, ce qui doit le rendre beaucoup plus clair que le bleu du spectre solaire auquel il répond. Ces résultats s'accordent assez bien, comme on voit, avec l'observation, et indiquent en même temps une légère différence entre la table de Newton et les teintes calculées, au moyen de sa formule, d'après les intensités déduites du principe des interférences.

---

(1) Voyez le *Traité de physique* de M. Biot, tome III, page 451.

NOTE II.

Explication de la Réfraction dans le système des ondes.

La théorie des vibrations lumineuses est encore si peu connue, que nous ne croirons pas déplaire aux lecteurs en leur présentant d'une manière succincte l'explication qu'elle donne des lois de la réfraction.

Les partisans les plus zélés du sytème de l'émission ne peuvent nier la supériorité de l'autre, quant aux résultats, c'est-à-dire, aux formules qui en ont été déduites. C'est la théorie des ondulations qui a révélé au docteur Young des relations numériques si remarquables entre les phénomènes de l'optique les plus différens; c'est elle aussi qui a fait connaître les lois générales de la diffraction, que la simple observation n'aurait pu jamais découvrir, et les véritables principes de la coloration des lames cristallisées. On a reproché à cette théorie le vague de ses explications, qui conduisent cependant à des formules confirmées par les faits; et quoiqu'elle calcule la marche des rayons réfractés dans un grand nombre de cas où ils suivent des lois beaucoup plus compliquées que la loi de Descartes, on a prétendu qu'elle ne pouvait pas encore expliquer celle-ci d'une manière satisfaisante : c'est ce que nous allons tâcher de mettre le lecteur à portée de juger lui-même.

Nous rappellerons d'abord en peu de mots les définitions et les principes nécessaires à l'intelligence de la démonstration.

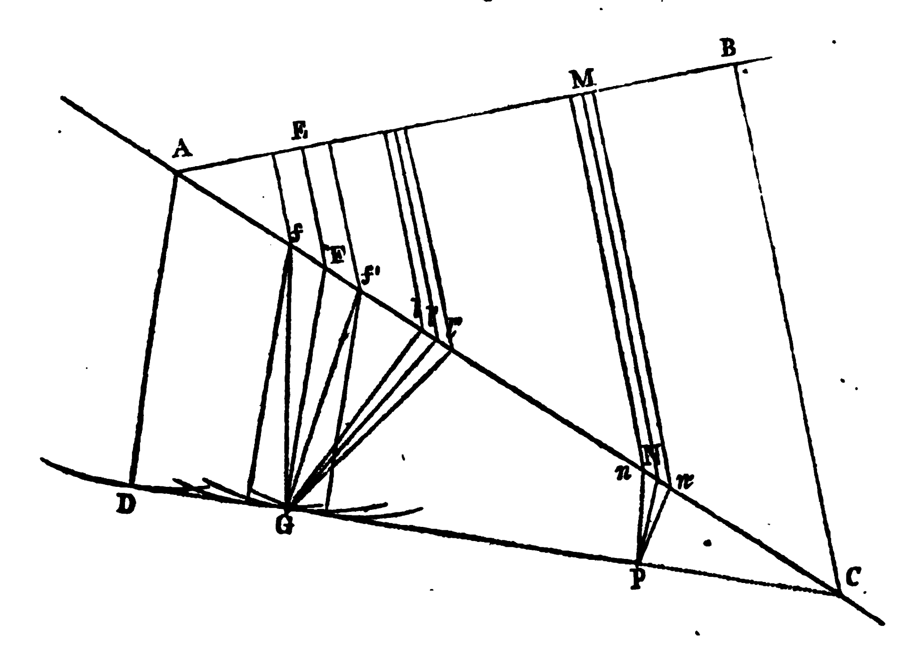
Lorsqu'un ébranlement est excité dans un point d'un fluide dont l'élasticité est uniforme, l'ébranlement se propage avec une égale promptitude en tout sens, et forme ainsi des ondes sphériques dont ce point est le centre. Nous appelons *surface de l'onde* la surface sur tous les points de laquelle l'ébranlement arrive au même instant, ou, en d'autres termes, la réunion de tous les points qui éprouvent simultanément un mouvement correspondant à la même époque de l'oscillation du moteur, telle que celle où sa vîtesse est nulle ou atteint son *maximum*. Cette surface est sphérique dans le cas particulier que nous considérons; mais elle peut affecter une autre forme et devenir

ellipsoïdale, par exemple, quand l'élasticité du milieu n'est pas la même dans toutes les directions. On appelle *rayon* la ligne droite menée du centre d'ébranlement à la surface de l'onde; c'est la ligne suivant laquelle se propage l'ébranlement : elle est perpendiculaire à la surface de l'onde, quand celle-ci est sphérique. Cette normale est la direction suivant laquelle s'opère la vision, soit à l'œil nu, soit avec une lunette.

La nature de l'ébranlement est une chose essentielle à considérer dans la question qui nous occupe : nous admettrons qu'il est oscillatoire, et que les oscillations de la molécule vibrante qui agite l'éther, se répètent régulièrement un très-grand nombre de fois; il en résultera une suite non interrompue d'ondulations de même longueur. Nous appelons *ondulation entière* toute la partie du fluide ébranlée par une oscillation complète, c'est-à-dire, une allée et un retour de la molécule vibrante : l'ondulation entière est composée de deux demi-ondulations qui répondent l'une à l'allée et l'autre au retour de la molécule vibrante; elles sont tout-à-fait pareilles et symétriques, quant à l'intensité des vîtesses absolues des molécules du fluide et des forces accélératrices résultant de leurs déplacemens relatifs, mais contraires quant au signe de ces vîtesses et de ces forces accélératrices, qui sont positives dans l'une et négatives dans l'autre. C'est une conséquence nécessaire de la nature oscillatoire de l'ébranlement primitif. Il en résulte que, lorsque deux séries d'ondes semblables, ayant la même longueur d'ondulation, se propagent suivant la même direction, et que l'une est en retard sur l'autre d'une demi-ondulation, il y a opposition complète entre les mouvemens qu'elles tendent à imprimer aux molécules éthérées, si d'ailleurs ces mouvemens sont parallèles dans les deux systèmes d'ondes : car les vîtesses et les forces accélératrices qu'ils apportent en chaque point de l'éther seront partout de signes contraires; et si elles sont égales, c'est-à-dire, si les deux systèmes d'ondes ont la même intensité, elles se neutraliseront mutuellement dans toute l'étendue de ceux-ci, excepté les deux demi-ondulations extrêmes, qui échappent à l'interférence, mais qui sont une trop petite partie du mouvement total pour affecter l'œil d'une manière sensible. Ainsi, toutes les fois que deux systèmes d'ondes parallèles de même nature et de même intensité diffèrent dans leur marche d'une demi-ondulation, on peut dire qu'ils se détruisent complétement.

Cela posé, soit A C la surface de séparation de deux milieux dans

lesquels la marche de la lumière n'a pas le même degré de rapidité. Soit A B une onde incidente, inclinée d'un angle quelconque sur A C et supposée plane, comme la surface réfringente, pour simplifier les raisonnemens; c'est supposer le point lumineux infiniment éloigné. Les diverses parties de la surface de cette onde ne rencontreront A C que les unes après les autres : si l'on veut comparer les instans d'arrivée des deux points E et B, par exemple, il faut mener perpendiculairement à l'onde les lignes E F et B C, qui seront les rayons correspondans à ces points, les lignes suivant lesquelles se propage l'ébranlement et se mesure la vîtesse de propagation; la différence entre B C et E F sera celle des chemins parcourus par les points E et B, quelles que soient d'ailleurs les petites inflexions que l'onde et les rayons peuvent éprouver dans le voisinage de A C, puisqu'elles seront les mêmes pour toutes les parties de l'onde qui atteindront successivement A C, à cause de la similitude parfaite des circonstances; si donc on divise B C — E F par la vîtesse de propagation de la lumière dans le premier milieu, on aura le temps qui s'écoule entre les arrivées des points E et B à la surface réfringente A C.



D'après le principe de la coexistence des petits mouvemens, nous

pouvons considérer chaque point ébranlé de cette surface comme étant lui-même un centre d'ébranlement par rapport au second milieu, dans lequel il produirait, s'il agissait seul, une onde sphérique décrite de ce même point comme centre. Cette onde aurait-elle la même intensité dans toute l'étendue de sa surface, c'est-à-dire, les oscillations des molécules éthérées y auraient-elles par-tout la même amplitude, la même vîtesse absolue? Non sans doute, et cette vîtesse pourrait même être nulle dans une partie de la surface de l'onde. Mais, 1.° comme les vîtesses absolues des molécules n'ont aucune influence sur la vîtesse de propagation, elle sera la même en tout sens, et l'onde dérivée sera sphérique (1). 2.° Les vîtesses absolues des molécules ne changeront brusquement ni d'intensité, ni de direction d'un point de la surface de l'onde au point suivant, mais graduellement et d'une manière conforme à la loi de continuité. Ainsi, toutes les fois que l'on considérera deux points très-voisins de la surface de l'onde, ou plus généralement deux points dont les rayons font entre eux un très-petit angle, on pourra dire que les vîtesses absolues des molécules y sont sensiblement égales et parallèles. 3.° Quelles que soient les altérations qu'ait éprouvées l'ébranlement en passant du premier milieu dans le second, il n'a pas pu perdre son caractère de mouvement oscillatoire; et les ondes qui émanent de chaque point de la surface réfringente seront toujours composées chacune de deux demi-ondulations de signes contraires, dans lesquelles les intensités des

(1) On pourrait objecter que, si les ondes propagées par un milieu dont l'élasticité est la même en tout sens, sont évidemment sphériques quand le centre d'ébranlement est dans l'intérieur de ce milieu, il n'est pas également certain que des ondes qui prennent naissance à sa limite conservent encore la forme sphérique. Mais il est aisé d'éviter cette difficulté, en faisant partir les ondes d'un plan inférieur parallèle à la surface réfringente, au lieu de placer leurs centres sur cette surface même. Dans le cas que nous considérons, où, l'onde incidente étant plane, les rayons incidens sont parallèles, il est clair que les différences entre les instans d'arrivée des divers rayons à ce second plan seront les mêmes que les différences entre leurs instans d'arrivée à la surface réfringente, puisqu'ils devront tous employer le même intervalle de temps à parcourir l'espace compris entre ces deux plans, vu la similitude des circonstances. Ainsi rien ne sera changé aux conséquences qu'on déduit de ces différences; et, les centres des ondes élémentaires se trouvant alors situés dans l'intérieur du second milieu et aussi éloignés qu'on voudra de la surface réfringente, on ne pourra plus objecter que ces ondes ne sont pas sphériques, sur-tout dans la portion de leur surface qui concourra à la formation de l'onde réfractée.

vîtesses absolues et des forces accélératrices seront les mêmes de part et d'autre; car les quantités positives et négatives étant égales dans l'ébranlement primitif, devront l'être encore dans les ondes dérivées. En effet, le déplacement très-petit d'une molécule, soit dans l'intérieur d'un milieu homogène, soit à la surface de contact de deux milieux élastiques différens, s'exécutant avec la même vîtesse et suivant la même direction, mais en sens contraires, produit dans les deux cas, sur les molécules voisines, des forces accélératrices de signes contraires, mais dont l'intensité et la direction sont d'ailleurs les mêmes; c'est ce qui a toujours lieu, quelle que soit la loi des forces que les molécules exercent les unes sur les autres, quand le déplacement est très-petit. Ainsi les molécules voisines se mouvront dans les deux cas avec les mêmes vîtesses et suivant les mêmes directions, mais en sens opposés. Ce que nous venons de dire de la première molécule déplacée peut s'appliquer à celles qu'elle a ébranlées, et ainsi de suite; d'où l'on voit que les mouvemens des molécules et les forces accélératrices résultant de leurs déplacemens relatifs seront exactement pareils dans les deux cas, quant à l'intensité et à la direction, et ne différeront que par le signe. Or, dans les deux moitiés de l'onde incidente, tout est pareil de part et d'autre, au signe près, et les vîtesses des molécules et leurs dérangemens relatifs, ainsi que les forces accélératrices qui en résultent; donc les effets produits dans le second milieu, comparés à chaque instant, et molécule à molécule, seront les mêmes quant aux grandeurs de ces quantités, et opposés quant à leurs signes.

Quoique le principe dont nous venons de donner la raison fondamentale soit presque évident par lui-même, comme il a paru à un savant géomètre susceptible d'être contesté, nous allons essayer de le démontrer encore d'une autre manière.

D'après le principe général de la composition des petits mouvemens, le mouvement total produit en un point, par un nombre quelconque d'ébranlemens divers, à un instant déterminé, est la résultante statique de toutes les vîtesses absolues que chaque ébranlement aurait envoyées en ce point au même instant, en agissant isolément. Cela posé, concevons dans le premier milieu deux systèmes d'ondes semblables à celui que nous avons considéré d'abord, dont les intensités soient égales, les surfaces parallèles, et qui diffèrent d'une demi-ondulation; il n'y aura plus de vibrations dans le premier milieu. Or l'effet produit dans le second doit être en chaque point

la résultante statique des vibrations qu'y produiraient séparément les deux systèmes d'ondes incidens : c'est une conséquence du principe que nous venons d'énoncer; et, d'après le même principe, le mouvement apporté en un point du second milieu par chaque système est la résultante statique de tous les mouvemens qu'y apporteraient au même instant les ondes élémentaires produites par les diverses parties ébranlées de la surface A C, si chacun de ces petits centres d'ébranlement agissait isolément. Mais les systèmes d'ondes élémentaires qui émaneraient des mêmes points de la surface auraient la même intensité, comme les deux systèmes incidens qui les ont produits; ils se superposeraient exactement, et différeraient seulement dans leurs vibrations d'une demi-ondulation : or il est évident que, s'ils ne se détruisaient pas mutuellement, si les vîtesses positives l'emportaient, par exemple, sur les négatives, il y aurait mouvement dans le second milieu, tandis qu'il n'y en avait pas dans le premier; ce qui serait absurde. On peut donc dire que deux systèmes d'ondes élémentaires réfractées, de même intensité et dont les surfaces ou les rayons sont parallèles, se détruisent mutuellement quand ils diffèrent d'une demi-ondulation. C'est un principe dont nous allons bientôt nous servir.

Cherchons maintenant quelles seront les positions respectives de toutes les ondes élémentaires parties des différens points de A C, à un instant déterminé, par exemple, quand l'ébranlement B arrive en C. Si du point A, comme centre, et d'un rayon A D égal à l'espace que la lumière parcourt dans le second milieu pendant le même intervalle de temps qu'elle met à parcourir B C dans le premier, on décrit un arc de cercle, cet arc représentera l'onde partie du point A au moment où le rayon parti de B arrive en C; et si par la droite projetée en C on mène à cette onde le plan tangent C D, il sera tangent aussi, au même instant, à toutes les autres ondes élémentaires envoyées par les différens points de A C. En effet, prenons pour unité de temps celui que la lumière a mis à parcourir B C et A D, ces deux lignes représenteront les vîtesses de propagation de la lumière dans les deux milieux : un autre point quelconque E de l'onde incidente parcourra E F dans un intervalle de temps égal à $\frac{EF}{BC}$; et si du point F comme centre on décrit un arc de cercle tangent à C D, le rayon F G sera parcouru par la lumière dans un intervalle de temps égal à $\frac{FG}{AD}$: or, à l'aide des triangles semblables A E F et ABC d'une part, C F G et C A D de

l'autre, on démontre aisément que ces deux quotiens ajoutés ensemble donnent une somme égale à l'unité, c'est-à-dire, au temps que la lumière a mis à aller de B en C, ou de A en D; ainsi l'arc décrit du point F, comme centre tangentiellement à C D, représente bien la position de l'onde partie de F, à l'instant que nous considérons. Pareillement, pour avoir les positions simultanées des ondes parties de tous les autres points f, f', il faut décrire de chacun de ces points comme centre des arcs de cercle tangens à C D, qui sera ainsi le lieu géométrique des premiers ébranlemens.

L'onde réfractée, ou plus exactement le système des ondes réfractées, doit être formé par la réunion de tous les systèmes d'ondes élémentaires partis de A C. Pour déterminer les mouvemens qui s'opèrent en un point quelconque G, il faut chercher la résultante statique de tous les mouvemens envoyés en G au même instant par les différens points f, F, f', &c. de la surface A C.

Ce problème serait très-difficile à résoudre, si le point G était voisin de A C; il faudrait connaître suivant quelle loi l'intensité des rayons élémentaires varie autour de chaque centre d'ébranlement. Mais cela n'est plus nécessaire quand G est éloigné de la surface réfringente d'une quantité très-grande relativement à la longueur d'une ondulation, parce qu'il arrive alors que tous les rayons lG, l'G, l''G, dont l'obliquité sur F G est un peu prononcée, se détruisent mutuellement; en sorte qu'il n'y a que des rayons fG, f' G presque parallèles à F G, qui exercent une influence sensible sur l'intensité et la position en G du système d'ondes résultant. Or ces rayons, étant sensiblement parallèles, sont inclinés de la même manière relativement à la surface réfringente, et, se trouvant ainsi dans des circonstances semblables, doivent apporter en G des oscillations parallèles et égales en intensité; la composition des mouvemens se réduit alors à des additions et des soustractions des vîtesses absolues apportées par ces rayons.

Il est aisé de voir pourquoi les rayons un peu obliques à FG se détruisent mutuellement. La ligne brisée EFG est celle par laquelle l'ébranlement arrive le plus promptement en G; car, les ondes parties des divers points f, F, f', &c., venant toucher CD au même instant, il est clair que les rayons fG et f'G n'arriveront en G qu'après le rayon FG. Cela posé, divisons AC en petites portions telles que les rayons partis de deux points de division consécutifs diffèrent d'une demi-ondulation en arrivant en G : la géométrie démontre que ces petites parties sont très-inégales près du plus court chemin, c'est-

à-dire, près de F; mais qu'à mesure qu'on s'en éloigne, elles approchent de plus en plus de l'égalité, et qu'elles ne diffèrent presque plus entre elles dès que des lignes menées des points de division en G sont un peu inclinées sur FG (en supposant toujours la *longueur* de FG très-grande relativement à celle d'une demi-ondulation). Il résulte de cette égalité d'étendue entre deux portions consécutives, qu'elles contiennent le même nombre de centres d'ébranlemens égaux, et envoient l'une et l'autre la même quantité de lumière en G; car, en raison du peu de distance entre les points de division relativement à leur éloignement de G, les rayons envoyés sont sensiblement parallèles, et doivent apporter en conséquence des vibrations de même intensité et qui s'exécutent suivant la même direction; et, puisque les rayons correspondans de ces deux parties diffèrent d'ailleurs d'une demi-ondulation, tous les systèmes d'ondes qu'ils apportent se neutraliseront mutuellement. Ainsi les rayons envoyés par deux parties contiguës se détruisent, dès qu'ils sont un peu inclinés sur FG; ou, plus exactement, les vîtesses absolues excitées par une de ces parties sont détruites par la moitié des vîtesses absolues de celle qui la précède et de celle qui la suit; car, si la différence d'intensité est un infiniment petit du premier ordre entre les rayons de deux parties contiguës, elle n'est plus qu'un infiniment petit du second entre les rayons d'une partie intermédiaire et la demi-somme de ceux des parties qui la comprennent; en sorte que, négligeant dans le calcul une infinité de ces petites différences, nous ne commettons cependant point d'erreur sensible : la même observation s'applique aux petites différences de direction dans les oscillations envoyées par trois divisions consécutives (1). Ainsi il n'y a de rayons qui concourent efficacement à la formation du système d'ondes résultant en G, que ceux qui sont sensiblement parallèles à FG.

Considérons un autre point quelconque P sur la ligne CD; soit MNP la ligne de plus court chemin de ce point à l'onde incidente

---

(1) En expliquant le principe des interférences, nous avons remarqué que, lorsque deux systèmes d'ondes diffèrent dans leur marche d'une demi-ondulation, les deux demi-ondes extrêmes échappent à l'interférence. Comme il y a ici une infinité de sytèmes d'ondes, on pourrait supposer, au premier abord, qu'une infinité de demi-ondes échappent à l'interférence; mais, en y réfléchissant un peu, on voit qu'elles se détruisent deux à deux, ou, ce qui revient au même, que chaque système élémentaire est détruit sur toute son étendue par celui qui est en avant et celui qui est en arrière d'une demi-ondulation.

AB : l'onde résultante en P ne sera pareillement formée que par les ondes élémentaires parties de points tels que n, n', assez rapprochés de N pour que les rayons nP et $n'P$ soient presque parallèles à NP, et les rayons d'une obliquité prononcée se détruiront mutuellement. Or il est évident que les divisions correspondantes à des différences d'une demi-ondulation, et qui seront inégales dans le voisinage du point N, comme dans celui du point F, suivront d'ailleurs la même loi de décroissement; elles seront seulement plus petites dans le rapport de $\sqrt{NP}$ à $\sqrt{FG}$: si donc on les subdivise les unes et les autres en petits élémens respectivement proportionnels à $\sqrt{NP}$ et $\sqrt{FG}$, elles en contiendront le même nombre de part et d'autre, et il y aura les mêmes différences de chemins parcourus entre les rayons envoyés par les élémens correspondans; par conséquent, tous les systèmes d'ondes élémentaires apportés en P se trouveront dans les mêmes positions par rapport au point P, que les systèmes d'ondes élémentaires envoyés en G par rapport à G : ainsi les deux systèmes d'ondes résultant en P et en G seront situés de la même manière relativement à ces points. En employant les formules d'interférences données dans le tome XI des *Annales de physique et de chimie*, pages 255, 256, 286, 287, et intégrant successivement suivant les deux dimensions, c'est-à-dire, parallèlement et perpendiculairement au plan de la figure, qui est ici le plan d'incidence, on trouve que le système d'ondes résultant est en arrière d'un quart d'ondulation relativement au système d'ondes élémentaires qui a suivi le plus court chemin. Mais nous n'avons pas besoin ici de connaître ces intégrales pour déterminer la direction des surfaces des ondes du système résultant; car nous venons de voir qu'il doit se trouver situé de la même manière relativement à tous les points P, G, &c., de DC : donc les surfaces de ses ondes seront parallèles à DC.

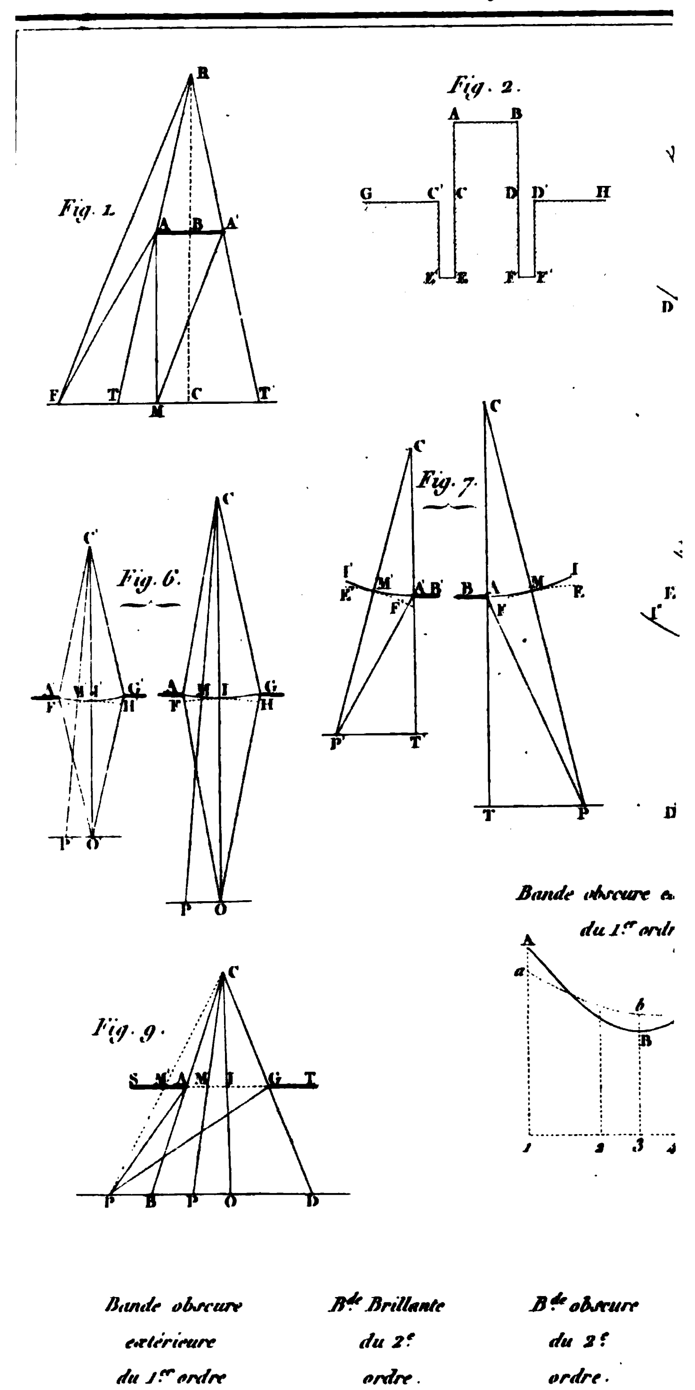
Or, sin. ACD : sin. BAC :: AD : BC; c'est-à-dire que les sinus des angles que les ondes incidentes et réfractées font avec la surface réfringente, sont dans le rapport constant des vîtesses de propagation de la lumière dans les deux milieux; mais ces angles sont égaux à ceux que les normales aux ondes, c'est-à-dire les rayons, font avec la normale à la surface : donc les sinus des angles d'incidence et de réfraction des rayons sont entre eux dans le rapport constant des vîtesses de propagation.

Pour compléter cette démonstration et faire voir que la théorie

s'accorde avec les lois expérimentales de la réfraction, il nous resterait à prouver que la normale à l'onde, que nous avons appelée *rayon*, est effectivement la direction du rayon visuel; on y parvient aisément par des considérations analogues à celles que nous venons d'employer pour déterminer la direction de l'onde réfractée. Mais nous nous bornerons à ce résultat, ne pouvant donner plus d'étendue aux développemens théoriques qui font l'objet de cette note : d'ailleurs, sans approfondir la théorie de la vision, il est presque évident, *à priori*, que l'onde émergente doit peindre au fond de l'œil le point lumineux dont elle émane, dans la même direction relativement à son plan que l'onde incidente le fait relativement au sien, et qu'ainsi tout se réduit à déterminer l'inclinaison mutuelle de ces plans.

Nous terminerons en observant que non-seulement tous les points de la surface de chaque onde du système résultant se trouvent situés à la même distance de DC, mais, en outre, que si l'onde incidente a une intensité uniforme dans toute son étendue, cette égalité d'intensité doit se maintenir dans l'onde réfractée. En effet, comparons encore les vibrations résultantes qui s'exécutent dans deux points quelconques P et G : nous avons remarqué que, les parties de AC assez voisines des rayons de première arrivée NP et FG pour contribuer d'une manière sensible aux effets produits en P et en G, étant divisées en élémens proportionnels aux racines carrées des distances NP et FG, les ondes élémentaires envoyées par les centres d'ébranlement correspondans seraient situées de la même manière relativement aux points P et G : or l'intensité de la résultante ne dépend que des positions respectives des systèmes d'ondes qui la composent et de leur intensité ; il suffit donc de prouver que les intensités des ondes élémentaires sont égales de part et d'autre. Les centres d'ébranlement en lesquels nous subdivisons AC près des points F et N, ayant, parallèlement et perpendiculairement au plan de la figure, des largeurs proportionnelles aux racines carrées de FG et de NP, les vîtesses absolues des molécules dans les ondes élémentaires qu'ils envoient suivront le rapport de FG à NP, à égales distances des centres d'ébranlement : mais l'analyse démontre que les vîtesses absolues sont en raison inverse des distances ; donc elles seront égales en P et en G.

Les raisonnemens que nous venons de faire supposent que la surface réfringente est indéfiniment étendue, ou du moins que ses limites sont assez éloignées des points N et F pour que les rayons supprimés


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 9.
Bande obscure e
du 1.er ordr
Bande obscure
extérieure
du 1.er ordre
B.de Brillante
du 2.e
ordre.
B.de obscure
du 2.e
ordre.
Fig. 12.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

n'eussent pu influer d'une manière sensible sur l'intensité de la résultante aux points P et G. Dans le cas contraire, il est clair que l'égalité d'intensité pourrait être altérée, ainsi que la similitude des positions du système d'ondes résultant en P et en G; les formules d'interférences déjà citées donnent les moyens de déterminer les intensités de la lumière et la marche des faisceaux alternativement obscurs et brillans dans lesquels elle se divise alors; et les résultats du calcul s'accordent avec ceux de l'expérience. C'est en cela sur-tout que la théorie de la réfraction déduite du système des ondes est bien supérieure à celle de Newton, qui n'explique la marche de la lumière que dans le cas particulier d'une surface continue et indéfinie.

La théorie que nous venons d'exposer ne détermine la position des divers points de l'onde réfractée qu'à une distance de la surface réfringente très-grande relativement à la longueur d'ondulation; mais, si l'on se rappelle qu'un seul millimètre contient déjà près de deux mille fois la longueur moyenne des ondulations lumineuses, on sentira que les résultats numériques obtenus dans ce cas peuvent s'appliquer à toutes les expériences qui ont été faites pour mesurer la réfraction et vérifier la loi de Descartes.

NOTE

Sur la Propriété que possèdent quelques Métaux, de faciliter la combinaison des Fluides élastiques (1);

PAR MM. DULONG ET THÉNARD.

Lue à l'Académie royale des Sciences le 15 Septembre 1823.

M. DOEBEREINER, professeur à l'université d'Iéna, vient de découvrir un des phénomènes les plus curieux que puissent présenter les sciences physiques. Nous ne connaissons le travail qu'il a fait à ce sujet, que par l'annonce qui en a paru dans le *Journal des débats* du 24 août dernier, et qui est peu propre à en donner une idée exacte; et par une lettre de M. Kastner à M. le docteur Liebig, que ce savant, actuellement à Paris, a bien voulu nous communiquer. Il y est dit que M. Doebereiner a observé que le platine en éponge détermine, à la température ordinaire, la combinaison de l'hydrogène avec l'oxigène, et que le développement de chaleur résultant de cette action peut rendre le métal incandescent. Nous nous sommes empressés de vérifier un fait aussi surprenant. Nous l'avons trouvé très-exact; et comme l'expérience peut se faire

---

(1) Depuis l'impression de cette Note, les auteurs ont vu, 1.° que le palladium en masse spongieuse pouvait enflammer l'hydrogène, comme le fait le platine; 2.° que l'iridium, sous cette forme, s'échauffait très-fortement en produisant de l'eau; 3.° que le cobalt et le nickel en masse déterminaient à 300° environ l'union de l'hydrogène et de l'oxigène; 4.° que l'éponge de platine formait à froid de l'eau et de l'ammoniac avec le gaz nitreux et l'hydrogène, et agissait aussi sur un mélange d'hydrogène et de protoxide d'azote.

avec la plus grande facilité, nous allons l'exécuter sous les yeux de l'Académie (1).

N'ayant aucune connaissance des recherches que l'auteur de cette belle expérience a sans doute entreprises pour en découvrir la théorie, nous n'avons pu résister au desir de faire nous-mêmes quelques essais dirigés vers ce but; et quoique nous ne l'ayons point encore atteint, nous pensons que les résultats des observations que nous avons faites jusqu'ici ne sont pas indignes de l'attention de l'Académie.

Dans l'expérience que nous venons de faire, l'éponge de platine devient incandescente lorsqu'on la place à l'endroit où l'hydrogène qui s'échappe du réservoir se trouve intimement mêlé avec l'air. Il était évident, d'après cela, qu'en plongeant un morceau de cette éponge dans un mélange de deux parties d'hydrogène et d'une partie d'oxigène, il devait y avoir détonation : c'est ce que l'expérience a confirmé. Si les proportions du mélange gazeux s'éloignent beaucoup de celles de l'eau, ou s'il se trouve en présence un gaz étranger à la combinaison, tel que l'azote, par exemple, la combinaison se fait lentement, la température s'élève peu, et l'on voit bientôt l'eau se condenser sur la cloche.

L'éponge de platine fortement calcinée perd la propriété de devenir incandescente; mais, dans ce cas, elle produit len-

---

(1) La lampe à gaz hydrogène perfectionnée par M. Gay-Lussac est très-commode pour faire cette expérience. On enlève l'électrophore, ou l'on détache simplement les conducteurs; on place, à la distance de 2 centimètres environ de l'ouverture par laquelle le gaz s'échappe, un morceau d'éponge de platine très-légère, et, en tournant le robinet, le jet de gaz hydrogène arrive mêlé d'air sur la surface de l'éponge. Celle-ci devient aussitôt incandescente, et le gaz hydrogène, une fois enflammé, continue de brûler à mesure qu'il s'écoule, comme s'il eût été allumé par l'étincelle.

A défaut d'une lampe, on peut se servir de l'appareil ordinaire qui sert dans les laboratoires pour obtenir le gaz hydrogène. Il faut seulement avoir l'attention de faire sortir le gaz par une ouverture très-étroite, afin qu'il se mêle plus intimement avec l'air.

tement, et sans élévation très-sensible de température, la combinaison des deux gaz. Le platine réduit en poudre très-fine par un procédé chimique bien connu n'a point d'action, même lente, à la température ordinaire : même résultat avec des fils ou des lames. Le rapprochement de ces observations pouvait faire naître l'idée que la porosité du métal était une condition essentielle du phénomène ; mais les faits suivans détruisent cette conjecture.

Nous avons fait réduire du platine en feuilles aussi minces que le comporte la malléabilité de ce métal. Dans cet état, le platine agit, à la température ordinaire, sur le mélange d'hydrogène et d'oxigène, avec d'autant plus de rapidité que la feuille est plus mince. Nous en avons obtenu qui déterminaient la détonation après quelques instans. Mais ce qui rend cette action plus extraordinaire encore, c'est la condition physique indispensable pour la développer. Une feuille de platine très-mince, enroulée sur un cylindre de verre ou suspendue librement dans un mélange détonant, n'a produit aucun effet sensible, au bout de plusieurs jours. La même feuille, chiffonnée comme une bourre de fusil, agit instantanément et fait détoner le mélange. Les feuilles disposées comme nous venons de le dire, et qui sont alors sans effet à la température ordinaire, les fils, la poudre et les lames épaisses de platine, dont l'action est toujours nulle dans la même circonstance, agissent lentement et sans produire d'explosion à une température de 2 à 300°, suivant leur épaisseur.

Nous avons reconnu que d'autres métaux jouissent de la même propriété que le platine. Le fait très-remarquable que M. Davy a eu occasion de découvrir dans le cours de ses recherches sur la lampe de sûreté, savoir, que les fils de platine et de palladium portés au rouge obscur deviennent incandescens lorsqu'on les plonge dans un mélange détonant, nous ayant paru se rattacher à la même cause que le phéno-

mène dont il s'agit, nous avons été conduits à essayer d'abord le palladium.

Le morceau qui nous a servi avait été donné à l'un de nous par M. Wollaston ; il devait être exempt d'alliage : cependant nous n'avons pu en obtenir des feuilles très-minces; il s'est déchiré sous le marteau du batteur. Nous attribuons à cette circonstance la nullité de son action à la température de l'atmosphère; mais il agit au moins aussi bien que le platine, de la même épaisseur, à une température élevée. Le rhodium, étant cassant, n'a pu être soumis à la même préparation; mais il a déterminé la formation de l'eau à une température de 240° environ.

L'or et l'argent en feuilles minces n'agissent qu'à des températures élevées, mais toujours au-dessous de celle de l'ébullition du mercure. L'argent est moins efficace que l'or. Une lame épaisse de ce dernier agit encore, quoique plus difficilement que les feuilles; et une lame épaisse d'argent n'a plus qu'une action assez faible pour être douteuse.

Nous avons aussi recherché si d'autres combinaisons pourraient être effectuées par le même moyen. L'oxide de carbone et l'oxigène se combinent, et le gaz nitreux est décomposé par l'hydrogène à la température ordinaire, en présence de l'éponge de platine. Les feuilles minces du même métal n'opèrent la combustion du premier qu'à une température au-dessus de 300°. Les feuilles d'or la déterminent aussi à un degré voisin de l'ébullition du mercure.

Enfin le gaz oléfiant mêlé d'une quantité convenable d'oxigène est transformé complétement en eau et en acide carbonique par l'éponge de platine, mais seulement à une température de plus de 300°.

Nous rappellerons, au sujet des expériences précédentes, que l'un de nous a prouvé depuis long-temps que le fer, le cuivre, l'or, l'argent et le platine, avaient la propriété de

décomposer l'ammoniaque à une certaine température, sans absorber aucun des principes de cet alcali, et que cette propriété paraissait inépuisable. Le fer la possède à un plus haut degré que le cuivre, et le cuivre plus que l'argent, l'or et le platine, à égalité de surface.

Dix grammes de fer en fil suffisent pour décomposer, à quelques centièmes près, un courant de gaz ammoniac assez rapide et soutenu pendant huit à dix heures, sans que la température dépasse le terme auquel l'ammoniaque résiste complétement. Une quantité triple de platine en fil, de la même grosseur, ne produit pas, à beaucoup près, un semblable effet, même à une température plus élevée.

Les résultats remarquables de cette expérience dépendent peut-être des mêmes causes que celles qui font que l'or et l'argent déterminent la combinaison de l'hydrogène et de l'oxigène à 300°, le platine en masse à 270°, et le platine en éponge à la température ordinaire.

Or, si l'on observe que le fer qui décompose si bien l'ammoniaque n'opère point ou n'opère que difficilement la combinaison de l'hydrogène avec l'oxigène, et que le platine, qui est si efficace pour cette dernière combinaison, ne produit qu'avec peine la décomposition de l'ammoniaque, on est porté à croire que, parmi les gaz, les uns tendraient à s'unir sous l'influence des métaux, tandis que d'autres tendraient à se séparer, et que cette propriété varierait en raison de la nature des uns et des autres. Ceux des métaux qui produiraient le mieux l'un des effets, ne produiraient pas l'autre, ou ne le produiraient qu'à un moindre degré.

Nous nous abstiendrons d'ailleurs de présenter les conjectures que ces phénomènes singuliers ont fait naître dans notre esprit, jusqu'à ce que nous ayons terminé les expériences que nous avons entreprises pour les vérifier.

NOUVELLES OBSERVATIONS

Sur la Propriété dont jouissent certains Corps de favoriser la combinaison des Fluides élastiques;

PAR MM. DULONG ET THÉNARD.

Lues à l'Académie royale des Sciences le 3 Novembre 1823, et imprimées, par extrait, dans le *Moniteur* du 12 du même mois.

DEPUIS la lecture de la Note que nous avons eu l'honneur de soumettre à l'Académie à l'occasion du phénomène découvert par M. Doebereiner, le Mémoire que ce savant chimiste a publié sur cet objet est parvenu en France; mais, comme il ne renferme aucune théorie positive, nous avons continué nos recherches, dans l'espoir de découvrir le genre de forces auquel ce singulier phénomène doit être attribué. C'est le résultat de ces nouveaux essais que nous allons exposer.

A l'époque de notre première lecture, nous ne connaissions que le platine qui eût une action assez intense sur le mélange détonant pour devenir incandescent, en partant de la température de l'atmosphère. Maintenant nous savons que le palladium, le rhodium, l'iridium, se comportent de la même manière. L'osmium a besoin d'être porté à 40 ou 50°. Le

nickel en éponge agit aussi, mais très-lentement, à la température ordinaire. M. Doebereiner avait remarqué avant nous l'effet de ce métal en poudre.

Nous n'avons encore trouvé d'action appréciable, aux températures ordinaires, que dans les substances précédentes; mais, à des températures plus ou moins élevées, inférieures cependant à celle de l'ébullition du mercure, tous les métaux ont une action plus ou moins énergique. Il est difficile de comparer exactement leur pouvoir, parce que l'étendue de la surface, l'épaisseur des fragmens et même leur configuration, modifient son intensité. Ainsi l'or n'agit qu'à 280° en lames, à 260° en feuilles minces; tandis que, réduit en poudre fine, il détermine la combinaison à 120°.

Les métaux ne sont pas les seules substances dans lesquelles on remarque cette propriété. Le charbon, la pierre ponce, la porcelaine, le verre, le cristal de roche, déterminent aussi la combinaison des gaz hydrogène et oxigène à des températures moindres que 350°. Parmi les sels, le spath-fluor n'exerce qu'une action à peine sensible, et qui pourrait bien être due aux matières étrangères dont il est difficile de le trouver entièrement privé. Le marbre blanc ne paraît en avoir aucune au-dessous de cette même limite, que nous n'avons jamais dépassée.

Nous venons de dire que la configuration des corps solides modifie leur action : en effet, nous avons observé une différence très-notable entre les quantités d'eau formées dans le même temps par des fragmens de verre, les uns anguleux et les autres arrondis ; les surfaces étant à peu près égales de part et d'autre, les premiers ont produit un effet double de celui des seconds. M. Davy avait déjà signalé des combustions lentes d'hydrogène et d'hydrogène carboné à des températures supérieures, il est vrai, à celle de l'ébullition du mercure; mais il a considéré ces phénomènes comme

résultant exclusivement de l'action mutuelle des fluides élastiques mélangés, et sans avoir égard à la nature des vases qui les contenaient. Nos observations prouvent, au contraire, que la combinaison s'effectue à une température différente pour chaque substance solide qui se trouve en contact avec le mélange combustible. Il paraîtrait que les liquides ne partageraient point cette propriété; du moins le mercure en ébullition ou près de l'ébullition ne produit aucun effet mesurable en six heures.

Jusqu'ici tous ces phénomènes manifestent une propriété commune à la plupart des corps solides métalliques ou non métalliques, simples ou composés : mais nous avons été conduits à reconnaître que, dans les métaux qui agissent à la température ordinaire, cette propriété n'est pas inhérente à ces corps; que l'on peut la faire disparaître et reparaître à volonté autant de fois qu'on le desire, tandis que rien ne prouve encore que les mêmes vicissitudes puissent naître des mêmes causes, dans ceux qui n'agissent qu'à des températures élevées.

La plupart de nos expériences ont été faites sur le platine pris sous cinq formes différentes; savoir : en fil fin, en limaille, en feuilles minces, en éponges et en poudre impalpable.

Le fil que nous avons employé avait $\frac{1}{20}$ millimètre d'épaisseur. Nous en avons formé des faisceaux ou écheveaux de cent tours environ, pour ralentir le refroidissement qui aurait été trop prompt avec un seul fil. Cette disposition a toujours été la même dans toutes les expériences.

Le fil de platine neuf, à la température de l'atmosphère, ne s'échauffe point lorsqu'on le place sous un courant d'hydrogène qui se répand dans l'air. Il faut le porter au moins à 300° pour qu'il détermine la combinaison des deux gaz, et que la température s'élève spontanément au-dessus de celle

qui lui avait été communiquée : c'est l'expérience ancienne de M. Davy.

Lorsqu'on a fait rougir plusieurs fois le même fil et qu'il est revenu à la température ordinaire, il n'agit point encore; mais son action commence à 50 ou 60° environ.

Si l'on met le même fil de platine dans l'acide nitrique froid ou chaud pendant quelques minutes, et qu'on enlève par des lavages l'acide adhérent, après l'avoir séché par une chaleur de 200° environ, il s'échauffe sous le courant de gaz hydrogène, en partant de la température ordinaire; et, si le courant est assez rapide, le fil devient incandescent. L'acide sulfurique concentré et l'acide muriatique produisent le même effet, mais d'une manière moins marquée, sur-tout le dernier. Cette propriété se conserve, seulement pendant quelques heures, à l'air libre. Elle subsiste plus de vingt-quatre heures, si l'on a soin de renfermer le fil dans un vase. La nature de ce vase, son isolement du réservoir commun par des corps non conducteurs de l'électricité, ne paraissent avoir aucune influence sur le temps pendant lequel la propriété persiste. Elle se perd en cinq minutes à peu près lorsqu'on plonge le fil isolé par un bâton de gomme laque, dans une petite quantité de mercure isolé pareillement. Un courant rapide d'air atmosphérique, d'oxigène, d'hydrogène, d'acide carbonique sec, la détruit dans le même espace de temps.

La potasse, la soude, l'ammoniaque, n'enlèvent pas la propriété communiquée au fil par le contact de l'acide nitrique. Les deux premières substances paraissent même la ranimer dans le fil auquel on l'a déjà communiquée plusieurs fois par ce procédé.

La limaille de platine, faite avec une lime de moyenne grosseur, possède la propriété en question, immédiatement après sa formation, et la conserve, pendant une heure ou

deux, avec une intensité décroissante. Lorsqu'elle l'a complétement perdue, on la lui rend en la portant au rouge et la laissant refroidir. Elle l'acquiert à un plus haut degré par le contact de l'acide nitrique ou muriatique. Cette propriété persiste pendant plusieurs jours dans une masse limitée d'air.

Les supports conducteurs ou isolans n'apportent aucune différence dans le résultat. L'insufflation de l'air produit le même effet que sur le fil de platine, quoique moins promptement. La limaille faite dans l'eau est inerte à la température ordinaire.

Dans tous ces essais, nous nous contentions d'observer l'élévation de la température du métal, jusqu'au point de ne plus pouvoir le tenir entre les doigts. D'après l'ensemble de nos expériences, on ne pouvait douter que cet effet ne fût dû à la combinaison de l'oxigène de l'air avec l'hydrogène. Cependant, pour ne laisser aucune incertitude, nous avons constaté directement la formation de l'eau. Quand on place le fil ou la limaille de platine dans un mélange détonant, l'absorption est quelquefois très-rapide; et il y aurait certainement explosion, si l'on faisait l'expérience au moment où la propriété est à son *maximum* d'intensité; car, en dirigeant, à cette époque, sur la limaille, un jet de gaz hydrogène sous un excès de pression d'un ou de deux décimètres d'eau, la limaille devient incandescente et enflamme le gaz, comme dans l'expérience de M. Doebereiner.

Nous avons dit, dans notre première note, que les feuilles minces de platine agissent à la température ordinaire lorsqu'elles sont chiffonnées comme une bourre, tandis qu'elles n'ont aucune action quand elles sont développées. Il était assez naturel d'attribuer cette différence d'action à la diversité de la forme. Nous avons reconnu depuis qu'elle devait son origine à une autre cause.

Les feuilles de platine nouvellement battues, comme la

limaille récemment faite, possèdent la propriété d'agir, à la température ordinaire, sur le mélange d'hydrogène et d'oxigène; mais, exposées pendant quelques minutes à l'air, elles perdent complétement cette propriété. On la leur rend, et même bien plus énergique, en les chauffant jusqu'au rouge dans un creuset de platine fermé. Elles conservent alors toute leur puissance pendant vingt-quatre heures, sans aucun affaiblissement, si elles demeurent enfermées dans un vase clos. Lorsqu'on les plonge, après ce laps de temps, dans un mélange de deux parties d'hydrogène et d'une partie d'oxigène, il y a presque toujours détonation : mais, si on les expose à l'air pendant le temps nécessaire pour en effacer les plis, la propriété est anéantie; car non-seulement la feuille n'agit plus, ainsi développée, mais en la chiffonnant de nouveau elle ne produit plus aucun effet.

Nous avons observé des faits absolument semblables sur le palladium en feuilles et en limaille.

L'éponge de platine acquiert vraisemblablement la propriété que M. Doebereiner a découverte par le contact de l'acide qui se dégage pendant la calcination, ou par l'incandescence qu'elle subit lors de sa préparation. Sa structure s'oppose d'ailleurs très-efficacement au contact de l'air; aussi ne perd-elle sa propriété que beaucoup plus difficilement : mais, quand elle l'a perdue par une exposition de plusieurs jours à l'air ambiant, on la lui rend, comme dans les cas précédens, en la chauffant jusqu'au rouge ou la trempant dans l'acide nitrique. L'air humide n'a pas plus d'effet que l'air sec pour la priver de cette singulière propriété; l'imbibition de l'eau, ou le passage de la vapeur à 100°, ne l'affaiblit même pas sensiblement. Lorsqu'elle l'a recouvrée par l'action de l'acide nitrique, l'ammoniaque ou la potasse ne la fait pas disparaître.

La poudre de platine obtenue par la calcination du muriate ammoniaco de platine, mêlé de sel marin, présente les mêmes

phénomènes que l'éponge. Ce n'est, en effet, que de l'éponge très-divisée.

Celle que l'on obtient par la précipitation d'une dissolution de platine au moyen du zinc, nous a paru retenir plus obstinément sa propriété que du platine au même degré de ténuité qui aurait été préparé par une autre méthode. Nous nous occupons maintenant de rechercher si ce mode de préparation n'aurait pas, sur d'autres métaux, une influence pareille (1).

Les observations précédentes nous découvrent un genre d'action que l'on ne saurait encore rattacher à aucune théorie connue. Un grand nombre de substances solides déterminent, par leur contact et à des températures diverses, suivant leur nature, la combinaison des gaz mélangés. L'intensité de cette action paraît avoir quelque rapport avec l'état de saturation des corps solides. Outre cette propriété, quelques-unes de ces substances acquièrent, sous l'influence de certains agens, une puissance analogue, mais beaucoup plus prononcée; et, ce qui est bien remarquable, cette puissance est passagère comme la plupart des actions électriques. On pense bien que, dès le commencement de nos recherches, nous avons dirigé nos tentatives de manière à découvrir quelle part l'électricité pourrait avoir dans ces phénomènes; mais nous devons avouer que jusqu'ici nous ne saurions expliquer la plupart des effets que nous avons observés, en leur supposant une origine purement électrique.

---

(1) Nous avons déjà constaté que l'or, précipité par le zinc et séché à une basse température, détermine la combinaison des deux gaz à 120°, et lorsqu'il a été chauffé au rouge, à 55°; l'argent, précipité et chauffé de la même manière, produit son effet à 150°.

SECOND MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE DU MAGNÉTISME;

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie royale des Sciences le 27 Décembre 1824.

LE premier Mémoire sur cette matière que j'ai lu à l'Académie, il y a près d'un an, renferme une exposition très-développée des principes qui servent de base à l'application de l'analyse mathématique à cette partie importante de la physique (*) : ces principes sont des hypothèses auxquelles on est conduit par la considération des faits les plus généraux du magnétisme, et qui se trouvent ensuite vérifiées par la comparaison des résultats du calcul à ceux de l'expérience. L'analogie que l'on remarque entre les attractions et répulsions magnétiques, et les actions mutuelles des corps électrisés, nous porte d'abord à attribuer ces phénomènes, pour le magnétisme comme pour l'électricité, à deux fluides dont chacun attire les molécules de l'autre, et repousse avec la même force ses propres particules; mais on reconnaît bien-

---

(*) Page 247 de ce volume.

tôt que ces fluides impondérables ne doivent pas être disposés dans les corps susceptibles d'aimantation par influence, comme ils le sont dans les corps conducteurs de l'électricité. Dans ceux-ci, les deux fluides électriques, dès qu'ils sont séparés l'un de l'autre, se portent à la surface, et ils peuvent passer en toute quantité d'un corps dans un autre. Il n'en est pas de même à l'égard des deux fluides *boréal* et *austral :* ces fluides ne sortent jamais des plus petits corps auxquels ils appartiennent, quelque puissantes que soient les forces qui produisent l'aimantation; d'où l'on a conclu que, dans l'intérieur des corps aimantés, les deux fluides magnétiques n'éprouvent que des déplacemens insensibles, qui suffisent néanmoins pour rendre sensible au dehors la différence de leur action, répulsive pour l'un et attractive pour l'autre. J'ai nommé, dans mon premier Mémoire, *élémens magnétiques* d'un corps, les espaces extrêmement petits par rapport à son volume entier, dans lesquels les fluides boréal et austral peuvent se mouvoir séparément; je n'ai fait aucune supposition particulière sur leur forme ni sur leur disposition respective; et je les ai considérés comme isolés les uns des autres par des intervalles imperméables au magnétisme. D'après cette manière d'envisager la constitution intime des aimans, la somme des élémens magnétiques qu'ils contiennent, est une fraction de leur volume, qui peut varier dans les diverses substances susceptibles d'aimantation, et dépendre aussi de la température; ce qui explique comment deux corps de même forme, mais de différentes matières, ou pris à des degrés de chaleur différens, peuvent exercer, sous l'influence des mêmes forces, des actions magnétiques d'intensités très-inégales.

En partant de ces principes, que je ne rappelle ici que très-succinctement, j'ai formé, dans le premier Mémoire, les équations qui renferment, pour tous les cas, les lois de la

distribution du magnétisme dans l'intérieur des corps aimantés par influence, et celles des attractions ou répulsions qu'ils exercent sur des points donnés de position. Ce n'est plus maintenant qu'une question d'analyse, de résoudre ces équations pour en déduire des résultats comparables à l'expérience; mais cette résolution n'est possible que dans un nombre de cas très-limité, eu égard aux différentes formes des aimans. Celui que j'ai pris pour exemple dans le premier Mémoire, et qui admet une solution complète, est le cas d'une sphère pleine ou creuse, aimantée par des forces dont les centres d'action sont distribués d'une manière quelconque, au dehors ou dans son intérieur. En réduisant ces forces à une seule, à l'action magnétique de la terre, les formules qui contiennent cette solution deviennent très-simples; on en déduit sans difficulté la déviation d'une aiguille de boussole, produite par le voisinage d'une sphère ainsi aimantée par l'influence de la terre. Cette déviation varie avec les distances du milieu de l'aiguille au centre de la sphère, au plan du méridien magnétique passant par ce centre, et au plan mené par le même point perpendiculairement à la direction du magnétisme terrestre. Les lois de ces diverses variations, données par le calcul, s'accordent avec celles que M. Barlow, professeur à Woolwich, a conclues d'une nombreuse suite d'expériences qu'il a faites sur ce sujet. Le calcul rend aussi raison d'un fait très-remarquable, observé par M. Barlow, et relatif à l'action magnétique d'une sphère creuse. Ce physicien a remarqué que cette action ne varie pas sensiblement avec l'épaisseur du métal, du moins quand cette épaisseur n'est pas très-petite, et n'atteint pas une limite qu'il a fixée à environ un trentième de pouce, sur une sphère de dix pouces anglais de diamètre; d'où il a cru pouvoir conclure que le magnétisme se tient à la surface des corps aimantés, et qu'il ne les pénètre pas au-delà d'une très-petite profondeur : mais

un calcul fondé sur la distribution des deux fluides dans toute la masse des aimans montre que, conformément à l'expérience, l'action d'une sphère creuse est à très-peu près indépendante de son épaisseur, tant que le rapport de celle-ci au rayon n'est pas une très-petite fraction qui peut changer de valeur avec la matière et la température de la sphère.

Cet accord remarquable du calcul et de l'observation fournit déjà une confirmation importante de l'exactitude de notre analyse et de la théorie sur laquelle elle est fondée. Cependant on pourrait desirer que cette théorie fût soumise à des épreuves encore plus variées; et, dans cette vue, j'ai cherché s'il ne serait pas possible de résoudre les équations générales du premier Mémoire, en les appliquant à des corps qui n'eussent pas, comme la sphère, une forme constante. J'ai trouvé qu'en effet ces équations peuvent être résolues très-simplement, dans le cas d'un ellipsoïde quelconque, pourvu que la force qui produit son aimantation soit constante en grandeur et en direction dans toute son étendue; ce qui a lieu, par exemple, à l'égard du magnétisme terrestre. Cette solution est l'objet du premier paragraphe du Mémoire que je présente aujourd'hui à l'Académie.

Après avoir donné les formules relatives à un ellipsoïde dont les trois axes ont entre eux des rapports quelconques, j'ai spécialement considéré les deux cas extrêmes où ce corps est très-aplati, et où il est, au contraire, très-alongé. Un ellipsoïde très-aplati peut représenter une plaque dont l'épaisseur varierait très-lentement près du centre, et décroîtrait depuis ce point jusqu'à la circonférence; son action sur des points peu éloignés de son centre doit être sensiblement la même que celle de toute autre plaque d'une épaisseur constante et d'une très-grande étendue. De même, un ellipsoïde très-alongé est à très-peu près, dans la pratique, une aiguille ou une barre dont le diamètre décroît depuis son milieu

jusqu'à ses extrémités, en variant d'abord très-lentement, et son action sur des points voisins de son milieu doit très-peu différer de celle d'une barre dont le diamètre serait constant et très-petit par rapport à sa longueur.

Lors donc que les physiciens auront observé les actions d'une barre, ou d'une plaque aimantée par l'influence de la terre, sur des points très-rapprochés du milieu ou du centre de ces corps, on pourra comparer, sous ce nouveau point de vue, la théorie à l'observation. Afin de faciliter cette comparaison, j'ai eu soin d'énoncer dans mon Mémoire les conséquences principales du calcul qui mériteraient le plus d'être vérifiées par l'expérience.

Le second paragraphe de ce Mémoire est relatif à des questions curieuses en elles-mêmes, mais sur-tout importantes par le jour que leur solution peut jeter sur un procédé imaginé par M. Barlow, que l'on emploie à bord des vaisseaux, pour détruire les déviations de la boussole, dues aux masses de fer dont elle est environnée et qui sont aimantées par l'influence magnétique de la terre (*).

§. I.er

Application des Formules générales du Magnétisme au cas d'un Ellipsoïde quelconque.

(1) J'ai démontré, dans mon premier Mémoire sur cette matière (n.° 20), que l'action d'un corps homogène aimanté par influence, sur un point extérieur, est équivalente à l'action d'une couche de fluide libre, d'une très-petite épaisseur, qui recouvrirait la surface de ce corps dans toute son étendue.

(*) Voyez, relativement à ce procédé, les *Annales de physique et de chimie*, janvier 1825.

L'épaisseur de cette couche en un point quelconque, et la nature du fluide libre, boréal ou austral, qui doit s'y trouver, dépendent de la forme du corps et des forces magnétiques dont l'action produit son état d'aimantation. J'ai trouvé, pour déterminer cette épaisseur variable, des formules générales que je vais d'abord rappeler.

Soient x, y, z, les trois coordonnées rectangulaires d'un point quelconque M; et désignons par φ une fonction quelconque de ces trois variables qui satisfasse à l'équation :

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0. \qquad (1)$$

Supposons que ce point M appartienne au corps aimanté que nous considérons. Ce corps, que nous appellerons A pour abréger, est soumis à l'action d'un ou de plusieurs aimans : soit V la somme des particules de fluide libre que ces aimans contiennent, divisées par leurs distances respectives au point M, et regardées comme positives ou comme négatives, selon qu'elles sont boréales ou australes; les trois différences partielles

$$\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz},$$

seront, comme on sait, les composantes de l'action totale de ces mêmes aimans sur le point M, parallèles aux axes des x, y, z; et, la particule magnétique sur laquelle elles agissent en ce point, étant supposée australe, elles tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées x, y, z, de ce point M, selon que les valeurs de ces forces seront positives ou négatives : le contraire aurait lieu, si le fluide du point M était boréal.

Soit M' un point quelconque de la surface de A : x', y', z', ses coordonnées rectangulaires, rapportées aux mêmes axes que x, y, z; E' une fonction de x', y', z', qui représen-

tera l'épaisseur normale au point M' de la couche magnétique que nous voulons connaître, regardée comme positive ou comme négative, selon que le fluide en ce point M' sera boréal ou austral, et multipliée par sa densité; l', m', n', les angles que fait la partie extérieure de la normale en M', avec des droites parallèles aux axes des x', y', z', et dirigées dans le sens des coordonnées positives; φ' ce que devient la fonction φ quand on y met x', y', z', à la place de x, y, z; enfin k une constante dépendante de la matière de A, et exprimant le rapport de la somme des volumes de ses *élémens magnétiques* à son volume entier. On aura, d'après toutes ces notations,

$$E' = k\left(\frac{d\varphi'}{dx'}\cos l' + \frac{d\varphi'}{dy'}\cos m' + \frac{d\varphi'}{dz'}\cos n'\right);$$

ce qui fera connaître l'épaisseur E' quand la fonction φ' sera connue.

Soit encore ω' l'élément différentiel de la surface de A, correspondant au point M', et ρ la distance de M' au point M, en sorte qu'on ait

$$\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2.$$

Pour déterminer l'inconnue φ, il faudra joindre à l'équation (1), celle-ci:

$$V + \frac{4\pi(1+k)}{3}\varphi + \int E'\frac{d\omega'}{\rho} = 0, \qquad (2)$$

dans laquelle l'intégrale devra s'étendre à la surface entière de A: la quantité π représente, à l'ordinaire, le rapport de la circonférence au diamètre.

(2) Si le point M est situé au-dehors de A; que l'on fasse, pour abréger,

$$\int E'\frac{d\omega'}{\rho} = Q;$$

et que l'on désigne par X, Y, Z, les composantes de l'action

totale de A sur le point M', ou de l'action équivalente de la couche dont l'épaisseur est E' sur ce même point, suivant les coordonnées x, y, z, on aura

$$X = \frac{dQ}{dx}, \quad Y = \frac{dQ}{dy}, \quad Z = \frac{dQ}{dz}. \qquad (3)$$

L'intégrale que Q représente ne sera pas la même fonction de x, y, z, dans ces formules et dans l'équation (2), à cause que, dans l'un des cas, le point M est extérieur, et que, dans l'autre, il est situé dans l'intérieur de A. Il faut aussi observer que l'équation (2) ne subsiste plus, quand le point M est à la surface même de A, ou qu'il n'en est éloigné que d'une distance insensible relativement aux dimensions de ce corps : l'action exercée sur un point quelconque par les élémens magnétiques très-voisins de cette surface demeure inconnue, et l'on en fait abstraction dans le calcul de l'action totale de A sur un point extérieur, déterminée par les équations (3); ce qui ne peut, au reste, donner lieu à aucune erreur sensible.

Le point M étant intérieur, la fonction φ fera connaître la direction d'une petite aiguille aimantée, dont l'action sur les points sensiblement éloignés de M équivaudrait à celle de l'élément magnétique situé en ce point : les cosinus des angles de cette direction avec les axes des x, y, z, seront respectivement

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{1}{\Phi}\frac{d\varphi}{dy}, \quad \frac{1}{\Phi}\frac{d\varphi}{dz};$$

Φ représentant la racine carrée de

$$\frac{d\varphi^2}{dx^2} + \frac{d\varphi^2}{dy^2} + \frac{d\varphi^2}{dz^2};$$

et la quantité de fluide, soit boréal, soit austral, qui devrait être concentrée à chaque pôle de cette aiguille, sera proportionnelle à cette fonction Φ (premier Mémoire, n.ºs 4 et 20).

Le sens et l'intensité de l'aimantation en chaque point de A, ou ce qu'on peut appeler la distribution du magnétisme dans son intérieur, seront ainsi indiqués par les valeurs de ces quantités, quand la valeur de φ sera connue en fonction de x, y, z.

(3) Ces divers résultats, tirés de mon premier Mémoire sur le magnétisme, conviennent à un corps homogène de forme quelconque, aimanté par des forces aussi quelconques. On a vu, dans ce Mémoire, que l'équation (2) se résout d'une manière complète, lorsque ce corps est une sphère, quels que soient d'ailleurs le nombre et la disposition des aimans qui agissent sur ses deux fluides; nous allons montrer maintenant qu'on peut encore résoudre cette équation, en prenant pour A un ellipsoïde quelconque, mais en supposant en même temps que les forces qui produisent son état d'aimantation, émanent de centres assez éloignés de ce corps pour qu'on puisse les regarder comme constantes en grandeur et en direction dans toute son étendue.

L'origine des coordonnées étant au centre de cet ellipsoïde, soit

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1, \qquad (4)$$

l'équation de sa surface, dans laquelle a, b, c, sont les longueurs de ses trois demi-axes. Nous aurons, par les formules connues,

$$\cos l' = Nb^2c^2x', \quad \cos m' = Na^2c^2y', \quad \cos n' = Na^2b^2z',$$

en faisant, pour abréger,

$$N=\frac{1}{(b^4c^4x'^2+a^4c^4y'^2+a^4b^4z'^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De même, si l'on désigne par r' le rayon vecteur mené du

centre au point M', et par ϖ' l'angle compris entre le prolongement de ce rayon et la partie extérieure de la normale en ce point, on aura

$$\cos \varpi' = \frac{x'}{r'} \cos l' + \frac{y'}{r'} \cos m' + \frac{z'}{r'} \cos n';$$

expression équivalente à celle-ci :

$$\cos \varpi' = N \frac{a^2 b^2 c^2}{r'},$$

en vertu de l'équation de la surface.

Pour que les forces comprises dans la fonction V soient constantes en grandeur et en direction, il faut que la valeur de cette quantité ait cette forme :

$$V = \alpha x + \beta y + \gamma z;$$

α, β, γ, étant trois constantes qui exprimeront les composantes suivant les axes des x, y, z, de la force appliquée au point quelconque M, lesquelles composantes tendront à augmenter ou à diminuer les coordonnées d'une particule australe, située en ce point, selon qu'elles seront positives ou négatives. On satisfait à l'équation (1) par une valeur de φ de la même forme, savoir :

$$\varphi = \alpha_{,} x + \beta_{,} y + \gamma_{,} z;$$

$\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, étant aussi des coefficiens constans ; et comme cette fonction linéaire de x, y, z, est la solution la plus simple de l'équation (1), il est naturel d'essayer d'abord si, dans le cas que nous examinons, cette valeur de φ ne peut pas satisfaire en même temps à l'équation (2), en déterminant convenablement les constantes $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, d'après les valeurs données de α, β, γ.

(4) En joignant cette expression de φ aux valeurs précédentes de $\cos l'$, $\cos m'$, $\cos n'$, on aura

$$E' = kN(b^2c^2x'\alpha_, + a^2c^2y'\beta_, + a^2b^2z'\gamma_,), \quad (5)$$

pour l'épaisseur normale de la couche magnétique du point M'; et si l'on désigne par $E_,$ son épaisseur inclinée suivant le rayon vecteur r', en sorte qu'on ait $E' = E_, \cos \varpi'$, il en résultera

$$E_, = k(b^2c^2x'\alpha_, + a^2c^2y'\beta_, + a^2b^2z'\gamma_,)\frac{r'}{a^2b^2c^2}.$$

Multiplions cette valeur par une quantité δ que nous supposerons infiniment petite, et faisons

$$k\alpha_,\delta = \alpha', \quad k\beta_,\delta = \beta', \quad k\gamma_,\delta = \gamma';$$

nous aurons

$$E_,\delta = (b^2c^2x'\alpha' + a^2c^2y'\beta' + a^2b^2z'\gamma')\frac{r'}{a^2b^2c^2}.$$

Or on peut prouver que cette expression de $E_,\delta$ est l'épaisseur infiniment petite d'une couche comprise entre deux surfaces d'ellipsoïdes, dont l'une serait celle de l'ellipsoïde donnée A, et l'autre aurait ses axes égaux et parallèles à ceux de la première surface, et n'en différerait que par la position de son centre, les coordonnées de ce point, rapportées au centre et aux axes de A, étant α', β', γ'. Admettons donc cette proposition, qui sera démontrée dans le numéro suivant. L'action de la couche dont l'épaisseur est $E_,\delta$ sur le point quelconque M, sera la différence des actions que les deux ellipsoïdes entiers exerceraient sur le même point : mais, la loi de l'attraction étant la raison inverse du carré des distances, l'action d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur se décompose en trois forces parallèles à ses axes et respectivement proportionnelles aux coordonnées de ce point, rapportées à ces mêmes droites; relativement à l'ellipsoïde A, les composantes de son action sur le point intérieur M dont les coordonnées sont x, y, z, auraient donc pour expressions :

$$Cx, \quad C'y, \quad C''z;$$

C, C', C'', étant des coefficiens qui ne dépendent que des demi-axes a, b, c, et qui resteront les mêmes, par conséquent, par rapport au second ellipsoïde. Les coordonnées du point M rapportées à son centre et à ses axes, seront

$$x-\alpha', \quad y-\beta', \quad z-\gamma';$$

les composantes de l'action de ce corps auront donc pour valeurs :

$$C(x-\alpha'), \quad C'(y-\beta'), \quad C''(z-\gamma').$$

Si l'on en retranche les précédentes, on aura

$$-C\alpha', \quad -C'\beta', \quad -C''\gamma',$$

pour les composantes relatives à l'action de la couche dont l'épaisseur est $E_, \delta$. Si donc on remet à la place de α', β', γ', leurs valeurs, et que l'on supprime le facteur δ; on aura les composantes relatives à l'action de la couche dont l'épaisseur inclinée est $E_,$, ou dont l'épaisseur normale à la surface de A est E'.

Ces composantes seront

$$-kC\alpha_,, \quad -kC'\beta_,, \quad -kC''\gamma_,.$$

Elles devront représenter les trois différences partielles de $\int \frac{E'd\omega'}{\rho}$ par rapport à x, y, z; ainsi l'on aura

$$\int \frac{E'd\omega'}{\rho} = -k(C\alpha_, x + C'\beta_, y + C''\gamma_, z),$$

relativement à un point quelconque M, pris dans l'intérieur de A. Substituant cette valeur et celles de V et ϕ dans le premier membre de l'équation (2), on rendra ensuite cette équation identique en égalant séparément à zéro les coefficiens de x, y, z; ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{l}\alpha+\left(\frac{(1-k)\pi}{3}-kC\right)\alpha_{,}=0\,;\\ \beta+\left(\frac{(1-k)\pi}{3}-kC'\right)\beta_{,}=0\,;\\ \gamma+\left(\frac{(1-k)\pi}{3}-kC''\right)\gamma_{,}=0\,.\end{array}\right\}\quad(6)$$

Donc, en déterminant les inconnues $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, au moyen de ces équations, la valeur que nous avons prise pour φ satisfera en même temps aux deux équations (1) et (2); et l'expression de E', donnée par l'équation (5), sera l'épaisseur normale de la couche magnétique, dont l'action sur un point extérieur est équivalente à celle de A.

— — —

(5) Pour démontrer que la couche dont l'épaisseur infiniment petite en un point quelconque M' de la surface de A a pour expression E,δ, est comprise, comme nous l'avons dit, entre cette surface et celle d'un autre ellipsoïde, qui ne diffère de A que par le déplacement infiniment petit de son centre, appelons M'' le point où le rayon vecteur r' de M' rencontre la surface du second ellipsoïde ; soient x'', y'', z'', les coordonnées de ce point rapportées au centre et aux axes du premier ellipsoïde : ses coordonnées relatives au centre et aux axes du second seront $x''-\alpha'$, $y''-\beta'$, $z''-\gamma'$; et en vertu de l'équation (4), on aura

$$\frac{(x''-\alpha')^2}{a^2}+\frac{(y''-\beta')^2}{b^2}+\frac{(z''-\gamma')^2}{c^2}=1.$$

De plus, les points M' et M'' et le centre de A étant sur la même droite, si l'on désigne par r'' la distance de M'' à ce centre, on aura en même temps

$$x''=\frac{x'r''}{r'},\quad y''=\frac{y'r''}{r'},\quad z''=\frac{z'r''}{r'}.$$

Retranchant l'équation (4) de la précédente, il vient

$$\frac{(x''-\alpha'-x')\,(x''-\alpha'+x')}{a^2}+\frac{(y''-\beta'-y')\,(y''-\beta'+y')}{b^2}$$
$$+\frac{(z''-\gamma'-z')\,(z''-\gamma'+z')}{c^2}=0\,;$$

mettant à la place de x'', y'', z'', leurs valeurs ; observant que $r''-r'$, α', β', γ', sont des quantités infiniment petites ; et négligeant leurs carrés et leurs produits, on trouve

$$\left(\frac{r''-r'}{r'}\right)\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right)$$
$$-\frac{\alpha' x'}{a^2}-\frac{\beta' y'}{b^2}-\frac{\gamma' z'}{c^2}=0\,;$$

d'où l'on tire, en ayant égard à l'équation (4),

$$r''-r'=(b^2c^2\alpha'x'+a^2c^2\beta'y'+a^2b^2\gamma'z')\,\frac{r'}{a^2b^2c^2}.$$

Or $r''-r'$ est l'épaisseur évaluée suivant le rayon vecteur r', de la couche comprise entre les surfaces des deux ellipsoïdes que nous avons considérés ; et, son expression coïncidant avec celle de $E_{,}\delta$ du numéro précédent, il s'ensuit que $E_{,}\delta$ est aussi l'épaisseur de cette couche au point M' ; ce qu'il s'agissait de prouver.

(6) D'après la théorie connue des attractions des sphéroïdes elliptiques, les coefficiens que nous avons représentés par C, C', C'', auront pour valeurs :

$$C=-\frac{4\pi bc}{a^2}F,\quad C'=-\frac{4\pi bc}{a^2}\,\frac{d.\lambda F}{d\lambda},\quad C''=-\frac{4\pi bc}{a^2}\,\frac{d.\lambda' F}{d\lambda'}\,;$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{b^2-a^2}{a^2}=\lambda^2,\quad \frac{c^2-a^2}{a^2}=\lambda'^2,$$

$$\int\frac{u^2\,du}{\sqrt{(1+\lambda^2u^2)(1+\lambda'^2u^2)}}=F\,;$$

supposant que a soit le plus petit des trois demi-axes, et

prenant l'intégrale depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$ (*). On a fait précéder ces valeurs du signe —, afin que les forces Cx, $C'y$, $C''z$, tendent, comme toutes les autres composantes que l'on a considérées dans ce qui précède, à augmenter ou à diminuer les coordonnées x, y, z, d'une particule australe située au point M, selon que les valeurs de ces forces se trouveront positives ou négatives.

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (6), on aura

$$\left.\begin{array}{l} \alpha + 4\pi\alpha_{,}\left(\frac{1-k}{3} + \frac{kbc}{a^2}F\right) = 0, \\ \beta + 4\pi\beta_{,}\left(\frac{1-k}{3} + \frac{kbc}{a^2}\frac{d.\lambda F}{d\lambda}\right) = 0, \\ \gamma + 4\pi\gamma_{,}\left(\frac{1-k}{3} + \frac{kbc}{a^2}\frac{d.\lambda' F}{d'}\right) = 0; \end{array}\right\} \quad (7)$$

équations qui ne contiennent plus d'autres inconnues que $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$.

Ces trois constantes étant ainsi déterminées, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dx} = \alpha_{,}, \quad \frac{d\varphi}{dy} = \beta_{,}, \quad \frac{d\varphi}{dz} = \gamma_{,}.$$

Les aiguilles aimantées dont l'action peut remplacer celle des élémens magnétiques (n.° 2), auront donc la même direction, et des pôles d'égale intensité dans toute l'étendue de l'ellipsoïde A; mais, les quantités $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, qui détermineront cette direction, n'ayant pas entre elles les mêmes rapports que α, β, γ, il en résulte que ces aiguilles parallèles ne seront pas dirigées suivant la résultante des forces extérieures qui produisent par influence l'état d'aimantation de A.

L'expression de E' en fonction de x', y', z', donnée par l'équation (5), ne contenant plus de quantités incon-

(*) *Mécanique céleste*, tome II, page 11.

nues, il ne restera qu'à trouver la valeur de l'intégrale $\int \frac{E' d\omega'}{\rho}$, relative à un point M extérieur, pour avoir, au moyen des équations (3), les composantes X, Y, Z, de l'action de A sur ce point; mais on obtiendra plus facilement les valeurs de ces forces, en considérant, ainsi que nous l'avons pratiqué à l'égard des points intérieurs, la couche dont l'épaisseur normale est E', comme la différence infiniment petite entre deux ellipsoïdes homogènes, divisée par une constante infiniment petite; ce qui donne au quotient une valeur finie.

(7) Pour calculer de cette manière les valeurs de X, Y, Z, désignons par h une quantité positive donnée par l'équation

$$x^2 + \frac{h^2 y^2}{h^2 + b^2 - a^2} + \frac{h^2 z^2}{h^2 + c^2 - a^2} = h^2, \quad (8)$$

qui admet toujours une racine réelle, et n'en admet qu'une seule, les différences $b^2 - a^2$ et $c^2 - a^2$ étant supposées positives ou nulles. Faisons ensuite, pour abréger,

$$\frac{b^2 - a^2}{h^2} = l^2, \quad \frac{c^2 - a^2}{h^2} = l'^2,$$

$$\int \frac{u^2 du}{\sqrt{(1 + l^2 u^2)(1 + l'^2 u^2)}} = f;$$

l'intégrale étant prise depuis $u = 0$ jusqu'à $u = 1$: les composantes parallèles aux axes des x, y, z, de l'action exercée sur le point extérieur M par l'ellipsoïde entier A, regardé comme homogène, seront (*)

$$-\frac{4\pi abcxf}{h^3}, \quad -\frac{4\pi abcy}{h^3} \frac{d.lf}{dl}, \quad -\frac{4\pi abcz}{h^3} \frac{d.l'f}{dl'}.$$

On en déduira l'action sur le même point d'un autre ellip-

(*) *Mécanique céleste*, tome II, page 21.

soïde qui aurait les axes égaux et parallèles à ceux du premier, et dont le centre répondrait à des coordonnées α', β', γ', rapportées aux mêmes axes que x, y, z, en y substituant $x-\alpha'$, $y-\beta'$, $z-\gamma'$, à la place de x, y, z. Si donc α', β', γ', sont des quantités infiniment petites, la couche formée par l'excès du second ellipsoïde sur le premier exercera sur le point M une action dont les composantes seront les différentielles complètes de ces formules par rapport à x, y, z, dans lesquelles on remplacera dx, dy, dz, par $-\alpha'$, $-\beta'$, $-\gamma'$. Donc aussi, en remettant à la place de α', β', γ', leurs valeurs $k\alpha_{,}\delta$, $k\beta_{,}\delta$, $k\gamma_{,}\delta$, et divisant par le facteur infiniment petit δ, on aura les valeurs cherchées des forces X, Y, Z.

Ces valeurs ainsi trouvées, seront

$$X=4\pi kabc\left[\alpha_{,}\frac{d.\frac{xf}{h^3}}{dx}+\beta_{,}\frac{d.\frac{xf}{h^3}}{dy}+\gamma_{,}\frac{d.\frac{xf}{h^3}}{dz}\right],$$

$$Y=4\pi kabc\left[\alpha_{,}\frac{d.\frac{y\,d.lf}{h^3\,dl}}{dx}+\beta_{,}\frac{d.\frac{y\,d.lf}{h^3\,dl}}{dy}+\gamma_{,}\frac{d.\frac{y\,d.lf}{h^3\,dl}}{dz}\right],$$

$$Z=4\pi kabc\left[\alpha_{,}\frac{d.\frac{z\,d.l'f}{h^3\,dl'}}{dx}+\beta_{,}\frac{d.\frac{z\,d.l'f}{h^3\,dl'}}{dy}+\gamma_{,}\frac{d.\frac{z\,d.l'f}{h^3\,dl'}}{dz}\right];$$

mais on peut leur donner une forme plus simple par la considération suivante.

Les trois composantes de l'action d'un corps sur un point quelconque sont toujours les trois différences partielles d'une même fonction des coordonnées de ce point. En appliquant ce principe aux trois composantes ci-dessus citées de l'action exercée par l'ellipsoïde A sur le point extérieur M, et faisant abstraction du facteur constant et commun qu'elles renferment, il en résultera que l'expression

$$\frac{xf}{h^3}dx+\frac{y\,d.lf}{h^3\,dl}dy+\frac{z\,d.l'f}{h^3\,dl'}dz$$

doit être la différentielle d'une fonction des trois variables x, y, z; par conséquent, on aura

$$\frac{d.\frac{xf}{h^3}}{dy} = \frac{d.\frac{y\,d.lf}{h^3\,dl}}{dx},$$

$$\frac{d.\frac{xf}{h^3}}{dz} = \frac{d.\frac{z\,d.l'f}{h^3\,dl'}}{dx},$$

$$\frac{d.\frac{y\,dl.f}{h^3\,dl}}{dz} = \frac{d.\frac{z\,d.l'f}{h^3\,dl'}}{dy};$$

au moyen de quoi les valeurs de X, Y, Z, pourront s'écrire ainsi :

$$X = 4\pi kabc\frac{d.}{dx}\left[\frac{\alpha, xf}{h^3} + \frac{\beta, y\,d.lf}{h^3\,dl} + \frac{\gamma, z\,d.l'f}{h^3\,dl'}\right],$$

$$Y = 4\pi kabc\frac{d.}{dy}\left[\frac{\alpha, xf}{h^3} + \frac{\beta, y\,d.lf}{h^3\,dl} + \frac{\gamma, z\,d.l'f}{h^3\,dl'}\right],$$

$$Z = 4\pi kabc\frac{d.}{dz}\left[\frac{\alpha, xf}{h^3} + \frac{\beta, y\,d.lf}{h^3\,dl} + \frac{\gamma, z\,d.l'f}{h^3\,dl'}\right].$$

En les comparant aux équations (5), on aura

$$Q = 4\pi kabc\left[\frac{\alpha, xf}{h^3} + \frac{\beta, y\,d.lf}{h^3\,dl} + \frac{\gamma, z\,d.l'f}{h^3\,dl'}\right].$$

Telle sera donc la fonction de x, y, z, dont les différences partielles relatives à ces variables feront connaître en grandeur et en direction l'action de A sur un point extérieur M, déterminé par ces trois coordonnées; résultat qui comprend la solution complète du problème que nous nous étions proposé de résoudre.

(8) J'ai déjà remarqué dans mon premier Mémoire, qu'en faisant la quantité k égale à l'unité dans les formules relatives au magnétisme, elles se réduisent à celles qui se rapportent aux actions des corps conducteurs de l'électricité,

dans le cas où ces corps sont électrisés par influence, et contiennent en quantités égales les deux fluides vitreux et résineux. Si donc on a un ellipsoïde métallique, ou formé d'une matière quelconque conductrice de l'électricité, qui soit électrisé par l'influence d'une force constante en grandeur et en direction dans toute son étendue, les formules précédentes, en y faisant $k = 1$, feront connaître l'action exercée par ce corps sur un point extérieur donné de position. L'équation (5) déterminera en même temps l'épaisseur variable de la couche électrique qui se formera à la surface, la nature du fluide en chaque point, et la pression électrique proportionnelle, comme on sait, au carré de cette épaisseur. Si, en outre, ce corps a reçu une quantité donnée de fluide vitreux ou résineux, ce fluide libre formera à sa superficie une couche terminée par deux surfaces semblables et concentriques, dont l'action sur les points intérieurs sera nulle, et qui s'ajoutera à la couche précédente sans y rien changer; en sorte que l'action totale de l'ellipsoïde sur un point extérieur sera la somme des actions qui seraient exercées par les deux couches fluides considérées successivement.

(9) Afin de vérifier les formules que nous venons de trouver par un exemple déjà traité dans le premier Mémoire, supposons que A soit une sphère, et qu'on ait en conséquence $a = b = c$. Les quantités λ, λ', f, f', seront nulles; il en résultera $F = \frac{1}{3}$, $f = \frac{1}{3}$; et si l'on fait

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

en sorte que r soit le rayon vecteur du point M, ou sa distance au centre de A, l'équation (8) donnera $h = r$: on aura donc

$$Q = \frac{4\pi k a^3}{3 r^3}(\alpha_{,} x + \beta_{,} y + \gamma_{,} z).$$

D'ailleurs les équations (7) se réduiront à

$$\alpha + \frac{4\pi\alpha_{,}}{3} = 0, \quad \beta + \frac{4\pi\beta_{,}}{3} = 0, \quad \gamma + \frac{4\pi\gamma_{,}}{3} = 0;$$

ce qui changera la valeur de Q en celle-ci :

$$Q = -\frac{ka^3}{r^3}(\alpha x + \beta y + \gamma z);$$

d'où l'on conclut

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{ka^3}{r^3}\left[\alpha - \frac{3x}{r^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right], \\ Y &= -\frac{ka^3}{r^3}\left[\beta - \frac{3y}{r^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right], \\ Z &= -\frac{ka^3}{r^3}\left[\gamma - \frac{3z}{r^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right]. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Si l'on suppose que la force dont les composantes sont α, β, γ, et qui a produit l'état magnétique de cette sphère, soit l'action du globe terrestre ; que l'on représente son intensité par m, et que l'on prenne l'axe des z positives, parallèle à sa direction et tourné vers le pôle boréal, on aura

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -m;$$

par conséquent,

$$X = -\frac{3ka^3mzx}{r^5},$$

$$Y = -\frac{3ka^3mzy}{r^5},$$

$$Z = \frac{ka^3m}{r^3}\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right);$$

résultats qui coïncident avec ceux du n.° 28 de mon premier Mémoire, en ajoutant la force $-m$ à Z, afin d'avoir, comme dans ce numéro, les composantes des forces appliquées au point M, qui proviennent à-la-fois de l'action de la terre et de celle de la sphère A.

L'équation (8) donne encore $h = r$, lorsque, A étant un

ellipsoïde quelconque, la distance r du point M à son centre est très-grande par rapport à ses axes, et que l'on néglige les carrés des fractions $\frac{a}{r}$, $\frac{b}{r}$, $\frac{c}{r}$. On a aussi, dans ce cas, $l=0$, $l'=0$, $f=\frac{1}{3}$, et les valeurs de X, Y, Z, sont des fonctions de x, y, z, de la même forme que dans le cas de la sphère.

(10) Il suffit que deux des trois quantités a, b, c, soient égales, et que A soit un ellipsoïde de révolution, pour qu'on puisse obtenir, sous forme finie, les intégrales représentées par f et F; mais leur expression est différente selon que cet ellipsoïde est aplati ou alongé.

Dans le premier cas, les deux axes égaux sont les plus grands; on a donc $b=c$, par suite $\lambda'=\lambda$, et en effectuant l'intégration,

$$F=\int_0^1 \frac{u^2\,du}{(1+\lambda^2 u^2)}=\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^3}\,\text{arc}\,(\text{tang}=\lambda).$$

Les différences partielles de F par rapport à λ et λ' qui entrent dans les équations (7) seront égales entre elles, et à la moitié de celle de cette valeur de F par rapport à λ, c'est-à-dire, égales à

$$-\frac{1}{\lambda^3}-\frac{1}{2\lambda^3(1+\lambda^2)}+\frac{3}{2\lambda^4}\,\text{arc}\,(\text{tang}=\lambda);$$

au moyen de quoi ces équations deviendront

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha+4\pi\alpha_{,}\left[\frac{1-k}{3}+\frac{kc^2}{c^2-a^2}\left(1-\frac{1}{\lambda}\,\text{arc}(\text{tang}=\lambda)\right)\right]=0,\\
&\beta+4\pi\beta_{,}\left[\frac{1-k}{3}+\frac{kc^2}{2(c^2-a^2)}\left(\frac{1}{\lambda}\,\text{arc}(\text{tang}=\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right]=0,\\
&\gamma+4\pi\gamma_{,}\left[\frac{1-k}{3}+\frac{kc^2}{2(c^2-a^2)}\left(\frac{1}{\lambda}\,\text{arc}(\text{tang}=\lambda)-\frac{1}{1+\lambda^2}\right)\right]=0.
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

On aura de même $l' = l = \frac{1}{h}\sqrt{c^2 - a^2}$, et

$$f = \frac{h^2}{c^2 - a^2}\left(1 - \frac{1}{l}\,\text{arc}\,(\text{tang} = l)\right),$$

$$\frac{d.lf}{dl} = \frac{d.l'f}{dl'} = \frac{h^2}{2(c^2 - a^2)}\left(\frac{1}{l}\,\text{arc}(\text{tang} = l) - \frac{1}{1 + l^2}\right);$$

par conséquent,

$$Q = \frac{4\pi k a c^2}{h(c^2 - a^2)}\left[x\alpha_{,}\left(1 - \frac{1}{l}\,\text{arc}\,(\text{tang} = l)\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}(y\beta_{,} + z\gamma_{,})\left(\frac{1}{l}\,\text{arc}(\text{tang} = l) - \frac{1}{1 + l^2}\right)\right];$$

la quantité h étant une fonction de x et de r, déterminée par l'équation :

$$x^2 + \frac{(r^2 - x^2)h^2}{h^2 + c^2 - a^2} = h^2;$$

d'où l'on tire

$$h^2 = \frac{1}{2}(r^2 - c^2 + a^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(r^2 - c^2 + a^2)^2 + 4(c^2 - a^2)x^2};$$

où l'on a pris le signe $+$ devant le radical, afin que la valeur de h^2 soit réelle.

(11) Supposons maintenant que a soit très-petit par rapport à c, de manière que l'ellipsoïde soit très-aplati et puisse représenter une plaque circulaire dont l'épaisseur décroîtrait du centre à la circonférence, sa plus grande valeur étant égale à $2a$, et le diamètre de la plaque égal à $2c$.

En négligeant le carré de $\frac{a}{c}$, on aura

$$\frac{\lambda a}{c} = 1, \quad \text{arc}\,(\text{tang} = \lambda) = \frac{1}{2}\pi - \frac{a}{c};$$

et les équations (10) donneront

$$4\pi\alpha_{,} = -\frac{3\alpha}{1+2k-\frac{3\pi k a}{2c}},$$

$$4\pi\beta_{,} = -\frac{3\beta}{1-k+\frac{3\pi k a}{4c}-\frac{3ka^2}{c^2}},$$

$$4\pi\gamma_{,} = -\frac{3\gamma}{1-k+\frac{3\pi k a}{4c}-\frac{3ka^2}{c^2}}:$$

on a conservé le terme $\frac{-3ka^2}{c^2}$ au dénominateur commun à ces deux dernières formules, à cause que la valeur numérique de $1-k$ est en général une très-petite fraction, et ce dénominateur une très-petite quantité. La valeur de Q devient ensuite

$$Q = -\frac{3k\alpha a x}{1+2k-\frac{3\pi k a}{2c}}\left[\frac{1}{h}-\frac{1}{c}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{c}{h}\right)\right]$$

$$-\frac{3ka(\beta y+\gamma z)}{2\left(1-k+\frac{3\pi k a}{4c}-\frac{3ka^2}{c^2}\right)}\left[\frac{1}{c}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{c}{h}\right)-\frac{h}{h^2+c^2}\right].$$

Supposons, de plus, que le point M ne soit pas très-éloigné du centre de la plaque, de sorte que $\frac{x^2}{c^2}$ et $\frac{r^2}{c^2}$ soient de très-petites fractions. Si l'on néglige leurs carrés, ainsi que a^2 par rapport à c^2, et qu'on réduise l'expression de h en série, on aura

$$h = \pm x\left(1+\frac{r^2-x^2}{2c^2}\right),$$

en prenant le signe supérieur ou le signe inférieur, selon que la variable x sera positive ou négative, afin que la valeur de h soit toujours positive (n.° 7). On a d'ailleurs

$$\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{c}{h}\right) = \frac{1}{2}\pi - \frac{h}{c} + \frac{h^3}{3c^3} - \&c.;$$

si donc on supprime la partie constante de la valeur de Q, qui disparaîtrait dans les valeurs des forces X, Y, Z, on aura

$$Q = -\frac{3kaa}{1+2k}\left(\mp\frac{y^2+z^2}{2c^2} - \frac{\pi x}{2c} \pm \frac{x^2}{c^2}\right)$$
$$-\frac{3ka(\beta y+\gamma z)}{2c\left(1-k+\frac{3\pi ka}{4c}-\frac{3ka^2}{c^2}\right)}\left(\frac{1}{2}\pi \mp \frac{2x}{c}\right);$$

d'où l'on conclut

$$X = \frac{3\pi kaa}{2(1+2k)c} \pm \frac{3ka(\beta y+\gamma z)}{\left(1-k+\frac{3\pi ka}{4c}\right)c^2},$$

$$Y = -\frac{3\pi ka\beta}{4c\left(1-k+\frac{3\pi ka}{4c}-\frac{3ka^2}{c^2}\right)} \pm \frac{3ka\beta x}{\left(1-k+\frac{3\pi ka}{4c}\right)c^2},$$

$$Z = -\frac{3\pi ka\gamma}{4c\left(1-k+\frac{3\pi ka}{4c}-\frac{3ka^2}{c^2}\right)} \pm \frac{3ka\gamma x}{\left(1-k+\frac{3\pi ka}{4c}\right)c^2};$$

en ne conservant parmi les termes qui ont l'une des fractions $\frac{ax}{c^2}$, $\frac{ay}{c^2}$, $\frac{az}{c^2}$, pour facteur, que ceux qui peuvent augmenter de valeur à cause de la petitesse de leur dénominateur : les signes supérieurs correspondront toujours à x positive, et les inférieurs à x négative.

(12) Voici les principales conséquences qui se déduisent de ces formules, et qui mériteraient d'être vérifiées par l'expérience :

1.° En ajoutant α, β, γ à ces expressions, on aura les composantes totales des forces qui agissent sur le point M, et qui proviennent, soit de l'action de la plaque, soit de l'action directe de la cause qui a produit son état d'aimantation. Si la quantité $1-k$ est assez petite pour qu'on puisse la

négliger par rapport à $\frac{a}{c}$, et remplacer k par l'unité, on aura, de cette manière,

$$X+\alpha=\alpha+\frac{\pi a \alpha}{2c}\pm\frac{4(\beta y+\gamma z)}{\pi c},$$

$$Y+\beta=-\frac{4a\beta}{\pi c}\pm\frac{4\beta x}{\pi c},$$

$$Z+\gamma=-\frac{4a\gamma}{\pi c}\pm\frac{4\gamma x}{\pi c};$$

où l'on voit que l'action de la plaque détruira à très-peu près les composantes β et γ de la force directe qui lui sont parallèles, et laissera intacte, aussi à très-peu près, la composante perpendiculaire α; en sorte que, si le point M appartient à une aiguille aimantée, librement suspendue par son centre de gravité, cette aiguille prendra la direction de la force α, pourvu que cette force ne soit pas très-petite par rapport aux autres composantes β et γ, ou, autrement dit, pourvu que la force qui produit l'aimantation de la plaque, ne soit pas très-peu inclinée sur son plan.

2.° Pour fixer les idées, nous supposerons que la plaque soit horizontale, et qu'elle soit aimantée par l'action de la terre; nous prendrons l'axe des x positives, vertical et dirigé de bas en haut, ou vers l'hémisphère qui contient le pôle magnétique boréal; d'où il résultera que la composante α sera positive ou négative, selon que la particule magnétique sur laquelle elle agira, sera boréale ou australe. Une aiguille aimantée, dont la longueur et la distance au centre de la plaque seront très-petites eu égard à son rayon, prendra, d'après ce qu'on vient de dire, une direction sensiblement verticale, son pôle boréal étant tourné vers le haut, et son pôle austral vers le bas, soit que cette aiguille soit placée au-dessus ou au-dessous de la plaque aimantée. Si l'on appelle λ sa longueur, et x' la valeur de x qui répond à son

centre, $x' + \frac{1}{2}\delta$ et $x' - \frac{1}{2}\delta$ seront les ordonnées verticales de son pôle boréal et de son pôle austral; les coordonnées horizontales seront les mêmes pour ces deux points, et les valeurs de α, β, γ, qui s'y rapportent, seront égales et de signes contraires. En désignant donc par X', Y', Z', les sommes des forces parallèles aux axes des x', y', z', qui agissent sur ces deux pôles, on aura simplement, d'après les formules précédentes,

$$X' = 0, \quad Y' = \pm \frac{4\beta\delta}{c}, \quad Z' = \pm \frac{4\gamma\delta}{c};$$

les valeurs de α, β, γ, répondant au pôle boréal, ce qui rend la quantité α positive. Si l'on prend pour unité la quantité de fluide libre, de l'une ou de l'autre espèce, que l'aiguille contient, ces forces, divisées par la masse de l'aiguille, seront à très-peu près celles qui tendront à mouvoir son centre de gravité, sans changer sa direction perpendiculaire au plan de la plaque. La force X' étant nulle, le mouvement sera parallèle à ce plan, et, les forces Y' et Z' étant entre elles comme les composantes β et γ, il aura lieu dans le plan vertical parallèle à la direction du magnétisme terrestre. Quant au sens, vers le sud ou vers le nord, où l'aiguille sera poussée, on le déterminera en considérant que, si l'aiguille est au-dessus de la plaque, on devra prendre les signes supérieurs dans les valeurs de Y' et Z', et le mouvement se fera alors dans le sens où les particules de fluide boréal sont poussées par le magnétisme terrestre, ou du sud vers le nord : si, au contraire, l'aiguille est au-dessous de la plaque, cas dans lequel on devra prendre les signes inférieurs, le mouvement horizontal aura lieu dans le sens où la terre pousse les particules australes, ou du nord vers le sud.

3.° Ces résultats cesseront d'avoir lieu, lorsque la plaque

sera parallèle à la direction du magnétisme terrestre, ou seulement très-peu inclinée sur cette direction. Supposons qu'elle lui soit tout-à-fait parallèle; on aura alors $\alpha = 0$, ce qui réduira les forces totales qui agissent sur le point M, à

$$X + \alpha = \pm \frac{4(\beta y + \gamma z)}{\pi c},$$

$$Y + \beta = - \frac{4(a \mp x)\beta}{\pi c},$$

$$Z + \gamma = - \frac{4(a \mp x)\gamma}{\pi c}.$$

La projection de leur résultante sur le plan de la plaque sera parallèle à l'action de la terre : mais la résultante même s'inclinera plus ou moins sur ce plan, selon que le point M sera plus ou moins éloigné de la normale passant par le centre de la plaque; et à une distance de cette normale, très-grande par rapport à la distance du même point au plan de la plaque, la résultante des forces qui lui sont appliquées sera sensiblement perpendiculaire à ce plan, comme dans le cas précédent.

4.° Il n'est pas probable que, dans aucune substance susceptible d'aimantation, la quantité k soit rigoureusement égale à l'unité; et, quelque peu qu'elle en diffère, on peut toujours supposer l'épaisseur de la plaque assez petite pour que la fraction $\frac{a}{c}$ soit négligeable par rapport à la différence $1 - k$. A cette limite, les valeurs de X, Y, Z du numéro précédent seront très-petites relativement aux forces α, β, γ; d'où il résulte que l'épaisseur d'une plaque aimantée par l'action de la terre peut toujours être assez diminuée pour que l'action de cette plaque sur un point quelconque M n'altère pas sensiblement l'action directe du globe terrestre sur le même point.

(13) Examinons actuellement le cas où les deux axes égaux de l'ellipsoïde de révolution sont plus petits que son troisième axe. Soit donc $a=b$, et toujours $c>a$. Nous aurons

$$\lambda=0,\ F=\frac{\sqrt{1+\lambda'^2}}{2\lambda'^2}-\frac{1}{2\lambda'^3}\log(\lambda'+\sqrt{1+\lambda'^2}),$$

$$\frac{d.\lambda F}{d\lambda}=F,\ \frac{d.\lambda'F}{d\lambda'}=-\frac{1}{\lambda'^2\sqrt{1+\lambda'^2}}+\frac{1}{\lambda'^3}\log(\lambda'+\sqrt{1+\lambda'^2});$$

et de même

$$l=0,\ f=\frac{\sqrt{1+l'^2}}{2l'^2}-\frac{1}{2l'^3}\log(l'+\sqrt{1+l'^2}),$$

$$\frac{d.lf}{dl}=f,\ \frac{d.l'f}{dl'}=-\frac{1}{l'^2\sqrt{1+l'^2}}+\frac{1}{l'^3}\log(l'+\sqrt{1+l'^2}).$$

En même temps l'équation (8) deviendra

$$x^2+y^2+\frac{h^2z^2}{h^2+c^2-a^2}=h^2;$$

d'où l'on tire

$$h^2=\frac{1}{2}(r^2-c^2+a^2)+\frac{1}{2}\sqrt{(r^2-c^2+a^2)+4(c^2-a^2)(x^2+y^2)},$$

en prenant le signe + devant le radical, afin que la valeur de h^2 soit réelle : r représente ici, comme précédemment, la distance du point M au centre de l'ellipsoïde.

Il ne restera plus que des substitutions à faire pour former les valeurs des forces X, Y, Z; mais nous considérerons spécialement le cas d'un ellipsoïde très-alongé, qui pourra représenter une aiguille dont a serait le rayon à son milieu, et c sa demi-longueur.

Dans ce cas, la fraction $\frac{a}{c}$ sera très-petite; en négligeant son carré, on aura $\frac{1}{\lambda'}=\frac{a}{c}$, et les équations (7) donneront

$$4\pi\alpha_1=-\frac{3\alpha}{1+\frac{1}{3}k},$$

$$4\pi\beta_{,} = -\frac{3\beta}{1+\frac{1}{2}k},$$

$$4\pi\gamma_{,} = -\frac{3\gamma}{1-k+\frac{3ka^2}{c^2}\left(\log\frac{2c}{a}-1\right)}.$$

On aura aussi $l'h = c$, et, toute réduction faite,

$$Q = -\frac{3ka^2(\alpha x+\beta y)}{(1+\frac{1}{2}k)h^2} - \frac{3ka^2\gamma z\left(\log\frac{2c}{h}-1\right)}{(1-k)c^2+3ka^2\left(\log\frac{2c}{a}-1\right)}.$$

Supposons, en outre, que la distance r du point M au milieu de l'aiguille soit très-petite par rapport à c; sa distance $\sqrt{x^2+y^2}$ à l'axe de l'aiguille, divisée par c, sera aussi une très-petite fraction; et en négligeant son carré, la valeur de h se réduira à

$$h = \sqrt{x^2+y^2};$$

au moyen de quoi, les expressions de X, Y, Z, déduites de la valeur précédente de Q, seront, à très-peu près,

$$X = \frac{3ka^2[\alpha(x^2-y^2)+2\beta xy]}{(1+\frac{1}{2}k)(x^2+y^2)^2} + \frac{k'\gamma z x}{x^2+y^2},$$

$$Y = \frac{3ka^2[\beta(y^2-x^2)+2\alpha xy]}{(1+\frac{1}{2}k)(x^2+y^2)^2} + \frac{k'\gamma z y}{x^2+y^2},$$

$$Z = -k'\gamma\left(\log\frac{2c}{\sqrt{x^2+y^2}}-1\right),$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{3ka^2}{(1-k)c^2+3ka^2\left(\log\frac{2c}{a}-1\right)} = k'.$$

(14) Les cas principaux que ces formules renferment et

dans lesquels il serait utile de les comparer à l'expérience, sont ceux-ci :

1.° La force qui produit l'aimantation de l'aiguille, étant l'action de la terre, si l'axe de l'aiguille est perpendiculaire au plan du méridien magnétique, on aura $\gamma = 0$; ce qui réduira d'abord à zéro la force Z, ou la force de l'aiguille parallèle à son axe. Prenant, en outre, l'axe des x positives parallèle à l'action de la terre, et dirigé vers le pôle magnétique boréal, on aura $\beta = 0$, et α sera une quantité positive ou négative, selon que la particule magnétique que l'on considérera au point M, sera boréale ou australe. Soit encore u la perpendiculaire abaissée du point M sur l'axe de l'aiguille, et v l'angle compris entre cette perpendiculaire et l'axe des x, en sorte qu'on ait

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v.$$

Faisons enfin

$$\frac{3k}{1 + \frac{1}{2}k} = 2g;$$

g sera une constante positive dont la valeur dépendra de la matière de l'aiguille que l'on considère, et sera, par exemple, très-peu différente de l'unité relativement au fer doux. Les valeurs des forces X et Y deviendront

$$X = \frac{3ga^2\alpha \cos 2v}{u^2}, \quad Y = \frac{3ga^2\alpha \sin 2v}{u^2};$$

leur résultante sera la même tout autour de l'aiguille à distance égale de son axe; et quand le point M s'éloignera ou se rapprochera, elle variera suivant la raison inverse du carré de la distance u.

Si le point M appartient à une aiguille aimantée, suspendue librement par son centre de gravité, les forces X et Y ne la feront pas sortir du plan du méridien magnétique; mais elles changeront son inclinaison; et si nous appelons ε l'angle

que la partie de cette aiguille qui aboutit au pôle boréal, fera avec sa direction naturelle, nous aurons

$$\tang \varepsilon = \frac{Y}{\alpha + X},$$

c'est-à-dire,

$$\tang \varepsilon = \frac{2ga^2 \sin 2v}{u^2 + 2ga^2 \cos 2v};$$

en supposant, toutefois, la longueur de cette aiguille très-petite par rapport à la distance u de son milieu à l'aiguille aimantée par influence. Il y aura un cas particulier dans lequel la petite aiguille n'affectera plus de direction déterminée; il faudra pour cela que les deux composantes Y et $X + \alpha$ soient séparément nulles; ce qui exige qu'on ait

$$v = \frac{1}{2}\pi \text{ et } u = a\sqrt{2g}.$$

2.° La force qui produit l'aimantation de l'aiguille A étant toujours l'action de la terre, quand son axe sera parallèle à cette force, on aura $\alpha = 0$, $\beta = 0$; et si l'axe des z positives est dirigé vers le pôle magnétique boréal, la quantité γ sera positive ou négative selon que la particule située au point M sera boréale ou australe. En appelant, comme précédemment, u la distance de ce point à l'axe de l'aiguille, et v l'angle que fait cette ligne avec l'axe des x, les valeurs de X, Y, Z, relatives à ce nouveau cas, seront

$$X = \frac{k'\gamma z \cos v}{u},$$

$$Y = \frac{k'\gamma z \sin v}{u},$$

$$Z = -k'\gamma\left(\log\frac{2c}{u} - 1\right).$$

La quantité k' diminuera indéfiniment à mesure que la longueur de l'aiguille augmentera, et sera nulle à la limite $c = \infty$; ce qui fera disparaître ces trois forces, excepté dans

le cas où l'on aurait rigoureusement $k = 1$, cas dans lequel la troisième force subsisterait à cette limite, et deviendrait égale à $-\gamma$, c'est-à-dire, égale et contraire à l'action directe de la terre sur le point M. Mais, relativement à une aiguille de fer doux, par exemple, où la différence $1 - k$, sans être nulle, est cependant très-petite, les variations de k' par rapport à c seront très-peu rapides; et quoique l'aiguille soit très-longue par rapport à son épaisseur, les composantes de son action magnétique pourront encore être plus ou moins sensibles. La quantité k', à laquelle elles seront proportionnelles, renfermant à son dénominateur le produit $(1-k)c^2$, ne pourra être évaluée *à priori*, et devra être déterminée par l'expérience lors même que l'on regarderait la différence $1 - k$ comme une très-petite quantité.

La résultante des forces X, Y, aura pour valeur

$$\frac{k'\gamma z}{u};$$

ce qui montre qu'elle variera sensiblement en raison inverse de la distance u du point M à l'axe de l'aiguille A. De plus, elle sera toujours dirigée suivant la perpendiculaire à cet axe; d'où il résulte que, si le point M appartient à une aiguille aimantée, librement suspendue par son centre de gravité, la projection de cette aiguille sur un plan perpendiculaire à l'axe de A sera normale à cette droite; et d'après les signes de γ et de z, il est aisé de voir que ce sera la projection de son pôle boréal, ou celle de son pôle austral, qui tombera du côté de l'aiguille A, selon que le plan normal à cette aiguille et mené par son milieu passera au-dessous ou au-dessus du milieu de l'autre aiguille, ou selon que la variable z, relative à ce dernier point, sera négative ou positive. Si l'on appelle ε' l'inclinaison de cette aiguille sur sa projection, et qu'on suppose sa longueur très-petite par rapport à sa distance à l'axe de A, on aura

$$\operatorname{tang} \varepsilon' = \frac{k'\gamma z}{u(Z+z)},$$

ou bien, en mettant pour Z sa valeur,

$$\operatorname{tang} \varepsilon' = \frac{k'z}{u\left(1+k'-k'\log\frac{2c}{u}\right)}.$$

3.° Les mêmes choses que dans le cas précédent étant supposées, si la petite aiguille à laquelle le point M appartient est assujettie à rester horizontale, il sera facile de déterminer la déviation que le voisinage de l'aiguille A lui fera éprouver. Pour cela, menons par le milieu de A un plan perpendiculaire à son axe et un plan horizontal ; prenons l'axe des y sur l'intersection de ces deux plans ; projetons l'axe des z sur le second plan ; soit i l'inclinaison de cet axe sur sa projection, c'est-à-dire, l'inclinaison magnétique dans le lieu de l'observation : par le milieu de la petite aiguille, menons une parallèle à cette même projection, qui sera la direction naturelle de cette aiguille horizontale ; et soit enfin δ sa déviation, ou l'angle compris entre la direction qu'elle prendra et cette parallèle. Si l'on décompose les forces X et $Z+\gamma$ suivant la verticale et suivant cette parallèle, la somme des composantes dans cette seconde direction sera

$$X\sin i + (Z+\gamma)\cos i\,;$$

cette force et la composante Y seront les forces horizontales qui agiront sur le point M, et la direction de leur résultante sera celle de la petite aiguille, en sorte qu'on aura

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{Y}{X\sin i + (Z+\gamma)\cos i},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{k'z\sin v}{k'z\cos v\sin i + u\left(1+k'-k'\log\frac{2c}{u}\right)\cos i}.$$

Dans les applications qu'on pourra faire de cette formule, il

faudra se rappeler que u est la perpendiculaire abaissée, du milieu de la petite aiguille soumise à l'expérience, sur l'axe de A; z, l'élévation du plan mené par ce point perpendiculairement à cet axe, au-dessus du plan parallèle mené par le milieu de A; et v, l'inclinaison de la perpendiculaire u sur le plan du méridien magnétique : l'angle δ est compté, à partir de ce plan, dans le même sens que l'angle v, et se rapporte à la partie de la petite aiguille qui aboutit à son pôle boréal. On se souviendra aussi que ces résultats, de même que ceux du n.° 12, supposent qu'on fait abstraction de la réaction de la petite aiguille aimantée sur le corps A.

§. II.

Considérations relatives aux actions simultanées de plusieurs Corps aimantés par l'influence d'une même force.

(15) Nous supposerons que ces corps sont des sphères assez distantes les unes des autres pour que leur réaction mutuelle soit insensible; et, pour fixer les idées, la force qui produit leur aimantation sera l'action magnétique de la terre.

Reprenons donc les équations (9) du n.° 9, savoir :

$$\left.\begin{aligned} X &= -\frac{ka^3}{r^3}\left(\alpha - \frac{3\alpha x^2}{r^2} - \frac{3\beta y x}{r^2} - \frac{3\gamma z x}{r^2}\right), \\ Y &= -\frac{ka^3}{r^3}\left(\beta - \frac{3\beta y^2}{r^2} - \frac{3\alpha x y}{r^2} - \frac{3\gamma z y}{r^2}\right), \\ Z &= -\frac{ka^3}{r^3}\left(\gamma - \frac{3\gamma z^2}{r^2} - \frac{3\alpha x z}{r^2} - \frac{3\beta y z}{r^2}\right), \end{aligned}\right\}(a)$$

dans lesquelles X, Y, Z, sont les trois composantes de l'action exercée par une sphère du rayon a sur un point quelconque M : k est une constante positive, dépendante de la matière de cette sphère; r, la distance de son centre au point

M : x, y, z, peuvent être prises pour les coordonnées de ce centre rapportées à trois axes rectangulaires, menés par le point M; α, β, γ, sont les trois composantes de l'action magnétique de la terre, qui a produit l'aimantation de la sphère, dirigées, ainsi que X, Y, Z, suivant les axes des x, y, z positives. Dans le cas où la sphère aimantée serait creuse, il faudrait, d'après le n.° 28 de mon premier Mémoire, remplacer, dans ces formules, la quantité k par celle-ci :

$$\frac{(a^3-b^3)(1+k)k}{(1+k)a^3-2k^2b^3},$$

b étant le rayon de sa surface intérieure, et $b-a$ son épaisseur constante. Cette quantité est, comme on l'a déjà remarqué dans le premier Mémoire, à très-peu près indépendante de a et de b, et égale à l'unité, lorsque la différence $1-k$ est très-petite, à moins qu'en même temps l'épaisseur $a-b$ ne soit aussi très-petite, de sorte que la fraction $\frac{a-b}{a}$ soit comparable à $1-k$.

Si le rayon a varie, et que le centre de la sphère aimantée se déplace sans sortir d'une même droite menée arbitrairement par le point M, les rapports $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$, ne varieront pas en grandeur; ils changeront de signes lorsque le centre de la sphère passera d'un côté à l'autre du point M: mais leurs produits et leurs carrés, qui entrent seuls dans les formules précédentes, resteront les mêmes; et, dans ce déplacement, les composantes X, Y, Z, conserveront entre elles les mêmes rapports. L'action de la sphère sur le point M ne changera donc pas de direction : son intensité variera proportionnellement à $\frac{ka^3}{r^3}$; par conséquent, si la distance r de son centre au point M augmente ou diminue dans le même rapport que le rayon a, son action sur ce point n'éprou-

vera aucun changement en grandeur comme en direction. Il suit de là que l'action d'une sphère sur un point quelconque M peut remplacer identiquement les actions simultanées de plusieurs autres sphères aimantées par la même cause, lorsque tous ces corps ont leurs centres sur une même droite passant par le point M : il suffira, pour cela, que la quantité $\frac{ka^3}{r^3}$, relative à la première sphère, soit égale à la somme des valeurs de la même quantité qui se rapportent aux sphères auxquelles on veut la substituer. Mais il n'en serait plus de même si l'on voulait détruire les actions de plusieurs sphères par celle d'une seule sphère, aimantée par la même force qui agit sur toutes les autres, pour toutes les directions de cette force : cette destruction serait impossible, comme il est aisé de s'en assurer, quels que fussent les rayons des sphères et la disposition de leurs centres.

En effet, désignons, par rapport à une sphère quelconque, par X_n, Y_n, Z_n, x_n, y_n, z_n, r_n, a_n et k_n, les quantités qui ont été représentées par les mêmes lettres sans indices inférieurs, relativement à la sphère que nous avons d'abord considérée. Les équations (a) donneront les valeurs de X_n, Y_n, Z_n, en y affectant les lettres x, y, z, a, r, k, de l'indice n; et pour que les actions de toutes les sphères sur le point M se détruisent, il faudra qu'on ait

$$X+\Sigma X_n=0, \quad Y+\Sigma Y_n=0, \quad Z+\Sigma Z_n=0;$$

les sommes Σ étant composées d'autant de termes qu'il y a de corps, moins la première sphère, et s'étendant à tous les indices n relatifs aux nouvelles sphères. Ces équations devront être identiques par rapport à α, β, γ, si l'on veut que la destruction de ces forces magnétiques ait lieu pour toutes les directions de l'action de la terre; car, cette force venant à changer de direction, ou, ce qui revient au même, le sys-

tème des sphères aimantées venant à changer de situation relativement à la direction du magnétisme terrestre, les composantes α, β, γ de cette force seront les seules quantités qui varieront dans les équations précédentes. Il faudra donc que le coefficient de chacune de ces trois quantités dans chaque équation soit séparément égal à zéro ; ce qui donnera neuf équations qui se réduiront à six différentes entre elles, parmi lesquelles il nous suffira de considérer les trois suivantes :

$$\frac{ka^3}{r^3}\left(1-\frac{3x^2}{r^2}\right)+\Sigma\frac{k_n a^3_n}{r^3_n}\left(1-\frac{3x^2_n}{r^2_n}\right)=0,$$
$$\frac{ka^3}{r^3}\left(1-\frac{3y^2}{r^2}\right)+\Sigma\frac{k_n a^3_n}{r^3_n}\left(1-\frac{3y^2_n}{r^2_n}\right)=0,$$
$$\frac{ka^3}{r^3}\left(1-\frac{3z^2}{r^2}\right)+\Sigma\frac{k_n a^3_n}{r^3_n}\left(1-\frac{3z^2_n}{r^2_n}\right)=0.$$

En faisant leur somme et réduisant, on aura

$$\frac{ka^3}{r^3}+\Sigma\frac{k_n a^3_n}{r^3_n}=0;$$

équation impossible, puisque son premier membre est la somme de termes essentiellement positifs. Il faut donc en conclure que les actions simultanées d'un nombre quelconque de sphères aimantées par la même force ne peuvent jamais se détruire pour toutes les directions de cette force ; ce qu'il s'agissait de démontrer.

(16) Supposons actuellement qu'on ait une aiguille aimantée, maintenue forcément dans un plan horizontal, et soumise à l'action de la terre et aux actions simultanées de plusieurs sphères aimantées par cette même force, mais dont la réaction sur ces sphères soit insensible. Pour qu'elle conserve la direction qui lui serait donnée par le magnétisme terrestre, il suffira que la résultante des forces horizontales de ces actions des sphères coïncide en direction avec l'ac-

tion horizontale de la terre; et il ne sera plus nécessaire, comme dans le cas précédent, que cette résultante soit égale à zéro, non plus que celle des forces verticales. Cherchons donc les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette coïncidence subsiste constamment, lorsque la direction du magnétisme terrestre changera d'une manière quelconque, par rapport à ce système de corps aimantés. C'est cette coïncidence constante qu'il importe d'obtenir dans l'application à la pratique, qui a été indiquée au commencement de ce Mémoire, et dont sont susceptibles les considérations qui font l'objet de ce paragraphe.

En conservant toutes les notations du numéro précédent, prenons le plan des x, y, horizontal, et l'origine des coordonnées au milieu de l'aiguille aimantée. Supposons qu'on puisse négliger sa longueur eu égard aux distances des centres des sphères à cette origine, il suffira alors que la coïncidence demandée existe relativement à ce point, pour qu'elle ait lieu, à très-peu près, dans toute la longueur de l'aiguille. Or, pour que la résultante des forces horizontales $X + \Sigma X_n$ et $Y + \Sigma Y_n$ ait la même direction que celle des forces α et β, il faudra que les premières soient entre elles comme les secondes, ou qu'on ait

$$\beta\,(X + \Sigma X_n) = \alpha\,(Y + \Sigma Y_n).$$

Substituant à la place de X, Y, &c. leurs valeurs, cette équation devient

$$\left(\frac{ka^3x^2}{r^5} + \Sigma\,\frac{k_na^3_nx^2_n}{r^5_n}\right)\alpha\beta + \left(\frac{ka^3xy}{r^5} + \Sigma\,\frac{k_na^3_nx_ny_n}{r^5_n}\right)\beta^2$$
$$+ \left(\frac{ka^3xz}{r^5} + \Sigma\,\frac{k_na^3_nx_nz_n}{r^5_n}\right)\gamma\beta = \left(\frac{ka^3y^2}{r^5} + \Sigma\,\frac{k_na^3_ny^2_n}{r^5_n}\right)\beta\alpha$$
$$+ \left(\frac{ka^3yx}{r^5} + \Sigma\,\frac{k_na^3_ny_nx_n}{r^5_n}\right)\alpha^2 + \left(\frac{ka^3yz}{r^5} + \Sigma\,\frac{k_na^3_ny_nz_n}{r^5_n}\right)\gamma\alpha;$$

et enfin qu'elle subsiste pour toutes les valeurs de α, β, γ, il sera nécessaire que les termes semblables par rapport à ces

quantités soient égaux dans les deux membres; ce qui donne quatre équations de condition, entre les rayons des sphères et les coordonnées de leurs centres, savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{ka^3x^2}{r^5}+\Sigma\,\frac{k_n a^3_n x^2_n}{r^5_n}=\frac{ka^3y^2}{r^5}+\Sigma\,\frac{k_n a^3_n y^2_n}{r^5_n},\\
&\frac{ka^3xy}{r^5}+\Sigma\,\frac{k_n a^3_n x_n y_n}{r^5_n}=0,\\
&\frac{ka^3xz}{r^5}+\Sigma\,\frac{k_n a^3_n x_n z_n}{r^5_n}=0,\\
&\frac{ka^3yz}{r^5}+\Sigma\,\frac{k_n a^3_n y_n z_n}{r^5_n}=0.
\end{aligned}\right\}(b)$$

(17) Nous considérerons d'abord le cas où les sphères aimantées sont au nombre de deux seulement, en sorte que les sommes Σ ne comprennent qu'un seul terme qui répondra à l'indice $n=1$. Les équations (b) pourront s'écrire ainsi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{ka^3x^2}{r^5}-\frac{ka^3y^2}{r^5}=\frac{k_,a^3_,y^2_,}{r^5_,}-\frac{k_,a^3_,x^2_,}{r^5_,},\\
&\frac{ka^3xy}{r^5}=-\frac{k_,a^3_,x_,y_,}{r^5_,},\\
&\frac{ka^3xz}{r^5}=-\frac{k_,a^3_,x_,z_,}{r^5_,},\\
&\frac{ka^3yz}{r^5}=-\frac{k_,a^3_,y_,z_,}{r^5_,}.
\end{aligned}\right\}(c)$$

En multipliant membre à membre les deux dernières, nous aurons

$$\frac{k^2a^6xyz^2}{r^{10}}=\frac{k^2_,a^6_,x_,y_,z^2_,}{r^{10}_,};$$

et en vertu de la deuxième, cette équation se réduira à

$$\frac{ka^3z^2}{r^5}+\frac{k_,a^3_,z^2_,}{r^5_,}=0.$$

Comme les deux termes de son premier membre sont essentiellement positifs, il faudra qu'ils soient nuls séparément, ou qu'on ait $z=0$, $z_,=0$; d'où il résulte que les actions

simultanées des deux sphères changeront nécessairement la direction naturelle de l'aiguille horizontale, à moins que leurs centres ne soient situés dans le même plan horizontal que cette aiguille.

Cette condition remplie, les deux dernières équations (c) seront satisfaites. Si l'on fait ensuite

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad x_, = r_,\cos v_,, \quad y_, = r_,\sin v_,,$$

de manière que v et $v_,$ soient les angles que font les rayons vecteurs r et $r_,$ des centres des sphères avec l'axe des x positives, les deux premières deviendront

$$\frac{ka^3}{r^3}(\cos^2 v - \sin^2 v) = -\frac{k_,a_,^3}{r_,^3}(\cos^2 v_, - \sin^2 v_,),$$

$$\frac{ka^3}{r^3}\cos v \sin v = -\frac{k_,a_,^3}{r_,^3}\cos v_, \sin v_,.$$

Multipliant la seconde par $2\sqrt{-1}$, et l'ajoutant à la première, on aura

$$\frac{ka^3}{r^3}(\cos v + \sin v\sqrt{-1})^2 = -\frac{k_,a_,^3}{r_,^3}(\cos v_, + \sin v_,\sqrt{-1})^2;$$

d'où l'on tire, en extrayant les racines carrées des deux membres, et égalant séparément entre elles les parties réelles et les parties imaginaires,

$$\sqrt{\frac{ka^3}{r^3}}\cos v = \pm\sqrt{\frac{k_,a_,^3}{r_,^3}}\sin v_,,$$

$$\sqrt{\frac{ka^3}{r^3}}\sin v = \mp\sqrt{\frac{k_,a_,^3}{r_,^3}}\cos v_,;$$

les signes supérieurs ayant lieu ensemble, ainsi que les signes inférieurs. Ces deux nouvelles équations donnent

$$\frac{ka^3}{r^3} = \frac{k_,a_,^3}{r_,^3}, \quad v = v_, \mp \frac{1}{2}\pi.$$

La première condition est la même, d'après le n.° 15, que si l'action de l'une des sphères devait remplacer celle de l'autre identiquement ; mais, en vertu de la seconde con-

dition, les rayons vecteurs de leurs centres, au lieu d'être en ligne droite, seront, au contraire, perpendiculaires l'un à l'autre.

Ainsi, lorsqu'une sphère aimantée par l'action de la terre a son centre dans le plan horizontal qui contient une aiguille de boussole, la déviation qu'elle ferait subir à cette aiguille peut être détruite pour toutes les directions du magnétisme terrestre, par l'action d'une autre sphère aimantée par la même cause, qui aurait son centre dans le même plan horizontal, et tel que les droites menées des centres des deux sphères au milieu de l'aiguille soient à angle droit l'une sur l'autre. La distance du centre de la seconde sphère au milieu de l'aiguille, dépendra du rayon qu'on voudra lui donner, et elle sera déterminée par la première des deux conditions que nous venons de trouver. Si les deux sphères sont formées de la même matière, qu'elles ne soient pas creuses, ou, du moins, que leurs épaisseurs ne soient point très-petites, les quantités k et $k_{,}$ seront égales, et leurs rayons a et $a_{,}$ devront être proportionnels aux distances r et $r_{,}$ de leurs centres à l'aiguille.

(18) Examinons maintenant le cas général où les sphères aimantées sont en nombre quelconque. Soit toujours

$$x = r \cos v, \quad y = r \sin v;$$

et faisons, pour abréger,

$$\Sigma \frac{k_n a^3_n x_n y_n}{r^5_n} = A,$$

$$\Sigma \frac{k_n a^3_n x_n z_n}{r^5_n} = B,$$

$$\Sigma \frac{k_n a^3_n y_n z_n}{r^5_n} = C,$$

$$\Sigma \frac{k_n a^3_n (x^2_n - y^2_n)}{r^5_n} = D.$$

en sorte que A, B, C, D, soient quatre quantités données dans chaque cas particulier. Les équations (b) prendront la forme :

$$\left.\begin{aligned} \frac{ka^3 \cos 2v}{r^5} &= -D, \\ \frac{ka^3 \sin 2v}{r^5} &= -2A, \\ \frac{ka^3 z \cos v}{r^4} &= -B, \\ \frac{ka^3 z \sin v}{r^4} &= -C. \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

Les deux dernières donnent immédiatement

$$\operatorname{tang} v = \frac{C}{B}.$$

En les combinant avec la seconde, on en déduit

$$\frac{ka^3 z^2}{r^5} = -\frac{BC}{A}; \qquad (e)$$

équation qui ne pourra pas subsister, à moins que la quantité $\frac{BC}{A}$ ne soit nulle ou négative. On tire ensuite des deux premières équations (d)

$$\left.\begin{aligned} \frac{ka^3}{r^5} &= \sqrt{D^2 + 4A^2}, \\ v &= \frac{1}{2} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2A}{D}\right) \pm \frac{1}{2}\pi; \end{aligned}\right\} \quad (f)$$

mais, la tangente de cet angle v devant d'ailleurs être égale à $\frac{C}{B}$, il faudra qu'on ait l'équation de condition :

$$C \operatorname{tang}\left[\frac{1}{2} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2A}{D}\right)\right] + B = 0. \qquad (g)$$

On voit par ces résultats que, si l'on a plusieurs sphères aimantées par l'action de la terre, et placées dans le voisinage d'une boussole horizontale, la déviation que ces corps tendront à lui faire subir, ne pourra être corrigée en ajoutant

une nouvelle sphère aimantée par la même cause, qu'autant que l'équation (g) sera satisfaite d'elle-même, et qu'en même temps le second membre de l'équation (e) sera positif ou égal à zéro. Quand ces conditions seront remplies, la première équation (f) fera connaître la distance du centre de la sphère ajoutée au milieu de la boussole; l'équation suivante servira à déterminer la direction du plan vertical, passant par ce point, qui devra contenir le centre de cette sphère; enfin ce centre pourra être pris sur l'une ou l'autre de deux droites menées par le milieu de la boussole, également inclinées sur le plan horizontal qui la contient, et dont l'inclinaison sera déterminée par l'équation (e).

(19) Si l'on voulait que la sphère ajoutée, au lieu de détruire la déviation horizontale de la boussole, produite par l'action des sphères données, fût capable de lui faire subir une déviation égale à celle-ci, pour toutes les directions du magnétisme terrestre, il faudrait, en conservant toutes les notations précédentes, que les forces $\alpha + X$ et $\beta + Y$ fussent entre elles comme les forces $\alpha + \Sigma X_n$ et $\beta + \Sigma Y_n$, pour toutes les valeurs de α, β, γ. On aurait donc alors

$$(\alpha + X)(\beta + \Sigma Y_n) = (\beta + Y)(\alpha + \Sigma X_n);$$

et si l'on suppose, pour simplifier la question, que les forces provenant de l'action des sphères soient très-petites relativement à l'action magnétique de la terre, de manière qu'on puisse négliger la quantité $X\Sigma Y_n - Y\Sigma X_n$ du second ordre par rapport à ces forces, cette équation se réduira à

$$\beta(X - \Sigma X_n) = \alpha(Y - \Sigma Y_n).$$

En la comparant à celle dont nous sommes partis dans le n.° 16, on voit qu'elle n'en diffère que par les signes de ΣX_n et ΣY_n; d'où il résulte que les quatre équations qu'on en déduira, ne différeront non plus des équations (d) que

par les signes de leurs seconds membres, c'est-à-dire, que l'on aura

$$\frac{k a^3 \cos 2v}{r^3} = D,$$

$$\frac{k a^3 \sin 2v}{r^3} = 2A,$$

$$\frac{k a^3 z \cos v}{r^4} = B,$$

$$\frac{k a^3 z \sin v}{r^4} = C;$$

$A, B, C, D,$ étant les mêmes quantités que précédemment. Nous en conclurons d'abord

$$\operatorname{tang} v = \frac{C}{B}, \quad \frac{k a^3 z^2}{r^5} = \frac{BC}{A};$$

où l'on voit que la quantité $\frac{BC}{A}$ qui, d'après l'équation (e), devait être négative ou nulle dans le problème précédent, devra maintenant être nulle ou positive. Les deux premières des quatre équations précédentes donneront aussi,

$$\frac{k a^3}{r^3} = \sqrt{D^2 + 4A^2}, \quad v = \frac{1}{2} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2A}{D}\right);$$

et si l'on compare cette valeur de v à celle qui était donnée par la seconde équation (f), on voit que les plans verticaux qui renferment le rayon vecteur du centre de la sphère ajoutée, dans le problème précédent et dans celui-ci, seront toujours perpendiculaires l'un à l'autre. Enfin nous aurons cette équation de condition :

$$B \operatorname{tang}\left[\frac{1}{2} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{2A}{D}\right)\right] - C = 0,$$

qui remplacera l'équation (g) relative au problème précédent. Ainsi il y aura, pour que le nouveau problème soit possible, deux conditions analogues à celles du premier problème, et auxquelles devront satisfaire les quantités $A, B, C, D.$

Les conditions relatives aux deux questions se vérifieront à-la-fois, et les deux problèmes seront possibles, dans le seul cas où les quantités B et C seront toutes deux nulles. C'est ce qui arrivera, par exemple, lorsque toutes les sphères données auront leurs centres dans le plan horizontal où la boussole est située. La sphère ajoutée aura aussi son centre dans ce même plan : selon que son action devra remplacer ou détruire l'action des sphères données, ce point devra être pris sur l'une ou l'autre de deux droites horizontales et rectangulaires, passant par le milieu de l'aiguille aimantée, et dont les directions seront déterminées, dans chaque cas particulier, par les valeurs de l'angle ν.

(20) Afin de pouvoir parvenir à des solutions complètes des questions que nous nous sommes proposées dans ce paragraphe, nous avons supposé que les corps aimantés par l'action de la terre et agissant simultanément sur un même point étaient des sphères pleines ou creuses : mais, quelles que soient leurs formes, et lors même qu'on aurait égard à leurs actions mutuelles, on déterminera toujours sans difficulté le nombre des équations auxquelles ils devront satisfaire, pour que, par exemple, la déviation horizontale d'une aiguille de boussole, produite par ces aimans, soit égale à zéro dans toutes les directions du magnétisme terrestre; abstraction faite, toutefois, de la réaction de l'aiguille sur ces corps, et en négligeant, comme précédemment, le rapport de sa longueur aux distances de son milieu à ces mêmes corps.

En effet, α, β, γ, étant toujours les trois composantes rectangulaires de l'action magnétique de la terre, les composantes de l'action exercée sur un point quelconque par un système de corps aimantés par l'influence de cette force seront, dans tous les cas, des fonctions linéaires de ces trois quantités, et pourront être représentées par

$$P\alpha + Q\beta + R\gamma,$$
$$P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma,$$
$$P''\alpha + Q''\beta + R''\gamma;$$

les neuf coefficiens P, Q, &c. étant indépendans de α, β, γ. Si donc le point sur lequel ces forces agissent est le milieu de l'aiguille; si, de plus, ces trois composantes se rapportent respectivement aux mêmes axes que α, β, γ, et que les deux premières soient horizontales, il faudra, pour que la boussole ne dévie pas de sa direction naturelle, que ces deux forces soient entre elles comme α et β, ou qu'on ait

$$\beta(P\alpha + Q\beta + R\gamma) = \alpha(P'\alpha + Q'\beta + R'\gamma);$$

et comme cette équation devra subsister pour toutes les valeurs de α, β, γ, elle devra se décomposer en celles-ci :

$$P = Q', \quad Q = 0, \quad R = 0, \quad P' = 0, \quad R' = 0.$$

Donc, dans le cas le plus général, les équations auxquelles le système d'aimans devra satisfaire, seront au nombre de cinq : dans des cas particuliers, elles pourront se réduire à un moindre nombre, comme nous l'avons vu dans le cas du n.° 16, où, les deux quantités Q et P' étant égales, ces cinq équations se sont réduites à quatre seulement.

FIN DU TOME V.

